Bölüm 8

Sayısal Integral Yöntemleri

Bu bölümde

- temel sayısal integrasyon yöntemlerini özetleyerek,
- hata analizlerini gerçekleştiriyor ve
- MATLAB/Octave ortamında uygulama sonuçlarını tartışıyoruz. Ayrıca
- bilinen yöntemlerden yüksek mertebeli yöntemlerin nasıl elde edildiğini inceliyor ve son olarak ta daha güncel bir konu olarak
- eşit aralıklı olmayan ağ üretimi ve bu tür ağlar üzerinde sayısal integrasyonu inceliyoruz.

8.1 Giriş

Giriş bölümünde de belirttiğimiz üzere, sayısal analiz yöntemlerinin kullanılmasını gerektiren diğer bir alan belirli integrasyon işlemidir. Örneğin

$$\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$$

integralini kısmi integrasyon yardımıyla kolayca hesaplayabiliriz, ancak kısmi integrasyon veya başka bir yöntem yardımıyla

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

integralini hesaplayamayız. Bu örneği çoğaltmak mümkündür: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ve belirsiz integrali F olan bir fonksiyon ve g de türevlenebilir bir fonksiyon ise,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

kuralını hatırlayalım. Ancak f ve g nin farklı kalitatif davranışlara sahip olması durumunda,

$$\int_a^b f(g(x))dx$$

integralini analitik olarak hesaplamak mümkün olmayabilir: Örneğin f nin trigonometrik, logaritmik veya üstel bir fonksiyon ve g nin ise derecesi birden büyük bir polinom olması, yani $g(x) = p_n(x), n = 2, 3, ...,$ durumlarını gözönüne alalım:

$$\int_a^b \sin(p_n(x))dx, \int_a^b \log(p_n(x))dx, \int_a^b e^{p_n(x)}dx, ...$$

Yukarıda belirtilen türdeki integrallere sayısal yöntemler yardımıyla uygun yaklaşımlar bulunması gerekir. Bu amaçla öncelikle $[a, b]$ aralığına doğrudan uygulanan ve **basit yöntemler** adı verilen yöntemleri inceleyelim.

8.2 Basit yöntemler

Öncelikle *integraller için Ortalama Değer Teoremini(ODT)* hatırlayalım:

TEOREM 8.1. f *fonksiyonu* $[a, b]$ *aralığında sürekli bir fonksiyon ise*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\chi)(b - a)$$

$f(\chi)$	Kural	isim
$\cong f(a)$	$I_{sol}(f) = f(a)(b-a)$	Sol dikdörtgen
$\cong f(b)$	$I_{sağ}(f) = f(b)(b-a)$	Sağ dikdörtgen
$\cong f(\frac{a+b}{2})$	$I_{ort}(f) = f(\frac{a+b}{2})(b-a)$	Orta nokta
$\cong \frac{f(a)+f(b)}{2}$	$I_Y(f) = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$	Yamuk

Tablo 8.1: Bazı basit yöntemler

sağlanacak biçimde $\chi \in (a,b)$ *noktası mevcuttur.*

Burada $f(\chi)$, f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki ortalama değeri olarak tanımlanır ve bu nedenle Teorem *İntegraller için Ortalama Değer Teoremi* olarak adlandırılır.

Ancak Teorem 8.1 de belirtilen χ değerinin ne olduğu genel olarak bilinmemektedir. Farklı sayısal yaklaşım yöntemleri $f(\chi)$ için farklı yaklaşımlar yapmak suretiyle verilen integral değerini yaklaşık olarak elde etmektedirler. Tablo 8.1 de sol ve sağ dikdörtgen kuralı ile orta nokta ve yamuk yaklaşım kurallarının verilmektedir. Sol sütunda $f(\chi)$ için uygun yaklaşım değeri yer almakta, orta sütunda ise ilgili seçime karşılık gelen sayısal yöntem ifade edilmektedir.

ÖRNEK 8.1.

$$\int_0^1 e^x dx = 1.7183$$

integrali için sol ve sağ dikdörtgen kuralı ile orta nokta ve yamuk kuralı yaklaşımlarını hesaplayınız.

Çözüm.

Sırasıyla her bir yaklaşımı elde edelim:

- $$\begin{aligned} I_{sol}(f) &= f(a)(b-a) \\ &= f(0) \times 1 = 1 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} I_{sag}(f) &= f(b)(b-a) \\ &= f(1) \times 1 \\ &= e \doteq 2.718\,3 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} I_{ort}(f) &= f((a+b)/2)(b-a) \\ &= f(1/2) \times 1 \\ &= e^{1/2} \doteq 1.6487 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} I_Y(f) &= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \\ &= \frac{f(0)+f(1)}{2}(1-0) \\ &= (1+e)/2 \doteq 1.8591 \end{aligned}$$

Gerçek sonucun $e-1 \doteq 1.7183$ olduğu dikkate alındığında her bir yaklaşımın hatalı sonuçlar içerdiği görülmektedir.

Teorem 8.1 yardımıyla yukarıda gözönüne aldığımız sayısal integral yaklaşımlarını farklı bir açıdan daha değerlendirmek mümkündür: $[a,b]$ aralığında f fonksiyonuna sırasıyla aşağıda belirtilen sıfırıncı dereceden polinomlarla yaklaşıldığını kabul edelim:

- $P_0(x) \equiv f(a)$,
- $P_0(x) \equiv f(b)$ ve
- $P_0(x) \equiv f((a+b)/2)$

Birinci yaklaşım sonucunda

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_0(x)dx = f(a)(b-a),$$

ikinci yaklaşım sonucunda

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_0(x)dx = f(b)(b-a)$$

ve üçüncü yaklaşım sonucunda ise

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_0(x)dx = f((a+b)/2)(b-a)$$

kuralını elde ederiz.

Yamuk kuralında ise $[a,b]$ aralığında f fonksiyonuna $(a,f(a)),(b,f(b))$ noktalarından geçen birinci dereceden

$$P_1(x) = f(a) + f[a,b](x-a)$$

polinomu ile yaklaşarak

$$\begin{aligned} I_Y(f) &= \int_a^b P_1(x)dx = \int_a^b (f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a))dx \\ &= f(a)(b-a) + (f(b)-f(a))(b-a)/2 \\ &= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \end{aligned}$$

yöntemini elde ederiz.

Simpson Kuralı

Bu kural f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki ortalama değerini, $a,(a+b)/2$ ve b noktalarındaki değerlerin ağırlıklı bir ortalaması olarak kabul eder:

$$f(\chi) = \frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{6}f(b)$$

Buna göre basit Simpson kuralı

$$\begin{aligned} I_s(f) &= (b-a)f(\chi) \\ &= (b-a)\frac{1}{6}\left(f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b)\right)) \end{aligned} \tag{8.1}$$

olarak ifade edilir.

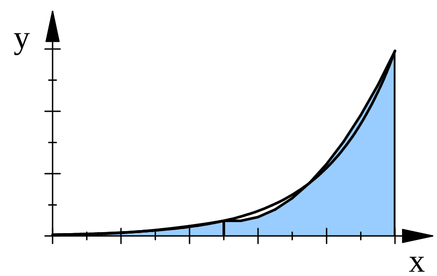
Alternatif bir bakış açısıyla Simpson kuralı, $h = (b-a)/2$ olmak üzere

$$(a,f(a)),(a+h,f(a+h)),(b,f(b))$$

noktalarından geçen

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(a) + f[a,a+h](x-a) \\ &\quad + f[a,a+h,a+2h](x-a)(x-(a+h)) \end{aligned} \tag{8.2}$$

polinomunun integralini, f fonksiyonun verilen aralık üzerindeki integrali için yaklaşım kabul eder(Alıştırma 11). Simpson kuralı şematik olarak Şekil 8.1 de sunulmaktadır.



Şekil 8.1: Simpson kuralı şematik gösterimi

ÖRNEK 8.2. $f(x) = e^x$ *fonksiyonunun* $[0, 1]$ *aralığı üzerindeki integralini basit Simpson kuralı yardımıyla hesaplayınız.*

Çözüm.

$$a = x_1 = 0, x_2 = (a + b)/2 = 1/2, x_3 = b = 1$$

olup, noktalar arasındaki uzaklık

$$h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = 1/2$$

olmak üzere (8.1) kuralına göre

$$\begin{aligned} I_s(f) &= \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b))) \\ &= \frac{1}{6}(f(0) + 4f(1/2) + f(1)) \\ &= \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{1/2} + e^1) \\ &\doteq 1.7189 \end{aligned}$$

(8.1) ve (8.2) değerleri gerçek integral değeri ile karşılaştırıldığında, en iyi yaklaşımın Simpson kuralı ile elde edildiği görülür.

8.3 Bileşik yöntemler

Bir aralık üzerindeki integrasyon işleminde elde edilen yaklaşımlarda oluşan hatayı minimize etmek için söz konusu aralık n adet eşit uzunluklu alt aralığa bölünerek, herbir alt aralık üzerinde ilgili yöntem uygulanır. Daha somut olarak, $[a,b]$ aralığının n adet ve $h=(b-a)/n$ uzunluklu alt aralığa bölünmesiyle oluşan alt aralıkların uç noktalarını

$$x_1=a,\ x_2=a+h,\ x_3=a+2h,...,x_{n+1}=a+nh$$

ile gösterim.

Bu durumda

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a=x_1}^{x_2} f(x)dx+\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx+...+\int_{x_n}^{x_{n+1}=b} f(x)dx$$

olarak ifade edilir ve herbir alt aralık üzerinde ilgili yöntemin uygulanması suretiyle elde edilen yaklaşımların toplamı, yöntemin *bileşik versiyonunu* verir. Yukarıda incelenen yöntemlerin bileşik versiyonları Tablo 8.2 de verilmektedir.

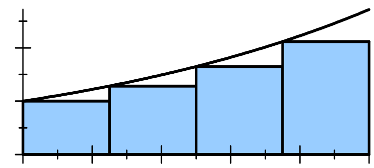
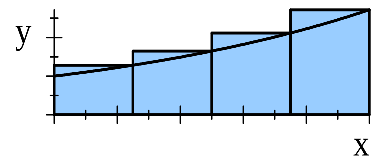
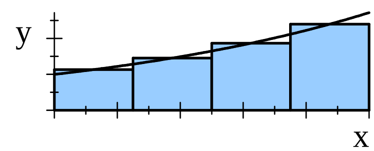
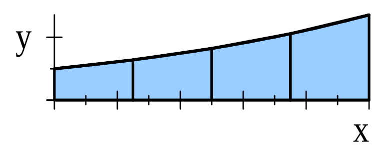
Yukarıda verilen yöntemlere ilaveten, Simpson kuralının bileşik versiyonu ise $[a,b]$ aralığını $n=2k$ ile belirtilen çift sayıda alt aralığa bölerek, $h=(b-a)/n$ olmak üzere, herbir $[x_i,x_{i+2}]$ alt aralığına basit Simpson kuralını uygulamak suretiyle elde edilir:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{a=x_1}^{x_3} f(x)dx+\int_{x_3}^{x_5} f(x)dx+...+\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}=b} f(x)dx \text{ olup,}\\
I_S(f,n) &= \frac{h}{3}\left(f(x_1)+4f(x_2)+f(x_3)\right)\\
&\quad +\frac{h}{3}\left(f(x_3)+4f(x_4)+f(x_5)\right)\\
&\quad +\cdots\\
&\quad +\frac{h}{3}\left(f(x_{2k-1})+4f(x_{2k})+f(x_{2k+1})\right)\\
&= \frac{h}{3}\Big(f(a)+4\sum_{i=1}^{k} f(x_{2i})+2\sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i+1})+f(b)\Big)
\end{aligned}$$

ÖRNEK 8.3. $[0,1]$ *aralığını dört alt aralığı bölmek suretiyle*

$$\int_0^1 e^x dx$$

integrali için Sol ve Sağ Dikdörtgen Kuralı ile Orta Nokta, Yamuk ve Simpson kuralı yaklaşımlarını hesaplayınız.

$f(\chi) \simeq$	Bileşik Yöntem	Şematik gösterim
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$	$I_{sol}(f,n) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$	 Bileşik sol dikdörtgen
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1})$	$I_{sağ}(f,n) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1})$	 Bileşik sağ dikdörtgen
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i + h/2)$	$I_{ort}(f,n) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i + h/2)$	 Bileşik orta-nokta
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$	$I_{Y}(f,n) = h\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$	 Bileşik yamuk

Tablo 8.2: Bazı bileşik yöntemler ve şematik gösterimleri

Çözüm.

- $[0,1]$ aralığını dört alt aralığa böldüğümüzde elde edilen alt aralıkların uç noktaları arasındaki uzaklık
$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 1/4$$
tür ve karşılık gelen alt aralıkların uç noktaları ise
$$x_1 = 0, x_2 = 1/4, x_3 = 2/4, x_4 = 3/4, x_5 = 1$$
olarak elde edilir.

- Sol Dikdörtgen yaklaşımı:
$$\begin{aligned} I_{sol}(f, n &= 4) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} f(x_i) \\ &= \frac{1}{4}(f(0) + f(1/4) + f(2/4) + f(3/4)) \\ &= \frac{1}{4}(e^0 + e^{1/4} + e^{2/4} + e^{3/4}) \\ &\doteq 1.5124 \end{aligned}$$

- Sağ Dikdörtgen yaklaşımı:
$$\begin{aligned} I_{sag}(f, n &= 4) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} f(x_{i+1}) \\ &= \frac{1}{4}(f(1/4) + f(2/4) + f(3/4) + f(4/4)) \\ &= \frac{1}{4}(e^{1/4} + e^{2/4} + e^{3/4} + e^{4/4}) \\ &\doteq 1.942 \end{aligned}$$

- Orta Nokta yaklaşımı:
$$\begin{aligned} I_{ort}(f, n &= 4) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i + h/2) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} f(x_i + 1/8)) \\ &= \frac{1}{4}(f(0+1/8) + f(1/4+1/8) + f(2/4+1/8) + f(3/4+1/8)) \\ &= \frac{1}{4}(e^{1/8} + e^{3/8} + e^{5/8} + e^{7/8}) \\ &\doteq 1.7138 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

- Yamuk Kuralı yaklaşımı: Yöntemi uygulamadan önce yeniden düzenleyelim:

$$\begin{aligned}
I_Y(f,n) &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \\
&= h(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}+...+\frac{f(x_n)+f(x_{n+1})}{2}) \\
&= h(\frac{1}{2}f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+...+f(x_n)+\frac{1}{2}f(x_{n+1}))
\end{aligned}$$

Buna göre verilen problem için

$$\begin{aligned}
I_Y(f,n &= 4) = h(\frac{1}{2}f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+\frac{1}{2}f(x_5)) \\
&= \frac{1}{4}(\frac{1}{2}e^0+e^{1/4}+e^{2/4}+e^{3/4}+\frac{1}{2}e^1) \\
&\doteq 1.7272
\end{aligned}$$

elde ederiz.

- Elde edilen yamuk yaklaşımının sol ve sağ dikdörtgen kuralı ile elde edilen yaklaşımların ortalaması olduğuna dikkat edelim:

$$\begin{aligned}
\frac{I_{sol}(f,4)+I_{sag}(f,4)}{2} &\doteq \frac{1.5124+1.942}{2} \\
&\doteq 1.7272 = I_Y(f,4)
\end{aligned}$$

- Simpson yaklaşımı:

$$\begin{aligned}
I_S(f,n &= 4) = h/3(f(x_1)+4f(x_2)+2f(x_3)+4f(x_4)+f(x_5)) \\
&= \frac{1}{12}(e^0+4\times e^{1/4}+2\times e^{2/4}+4\times e^{3/4}+e^1) \\
&\doteq 1.7183
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Alıştırmalar 8.1.

1. *Sol ve Sağ Dikdörtgen, Orta Nokta, Yamuk ve Simpson kuralları ile* $[0,1]$ *aralığı üzerinde* $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ *fonksiyonlarının integrallerini hesaplayarak tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.*

Yöntem	$\int_0^1 1dx$	$\int_0^1 xdx$	$\int_0^1 x^2dx$	$\int_0^1 x^3dx$
Sol D.	....	....	....	....
Sağ D.				
Orta N.				
Yamuk				
Simpson				

2. *Soru 1 de incelenen, Sol ve Sağ Dikdörtgen, Orta Nokta, Yamuk ve Simpson kuralları ile* $[0,1]$ *aralığı üzerinde* $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ *fonksiyonlarından hangilerinin integralinin sonucu, gerçek integral değerine eşit olur? Gerçek sonucu veren yöntemler için aşağıdaki tabloda belirtildiği üzere* $(+)$ *ve hatalı sonuç veren yöntem için ise* $(-)$ *işareti koyunuz.*

Yöntem\Fonksiyon	1	x	x^2	x^3	x^4
Sol D.	$+$				$-$
Sağ D.	$+$				$-$
Orta N.	$+$				$-$
Yamuk	$+$				$-$
Simpson	$+$				$-$

3. *Soru 2 de* $[0,1]$ *aralığı üzerinde elde ettiğiniz sonuçları keyfi bir* $[a,b]$ *aralığı üzerinde de gerçekleştiriniz. Tablo işaretlerinde herhangi bir değişikliğin olmadığını gözlemleyiniz.*

4. *Soru 2 ve Soru 3 de elde ettiğiniz sonuçlar ve integral operatörünün lineerlik özelliliği yardımıyla, hangi yöntemin hangi dereceden polinomların* $[a,b]$ *aralığı üzerindeki integralini hatasız olarak hesapladığını belirleyiniz.*

$$I(f) = \int_0^1 x^4 dx$$

integrali için $5-8$ *nolu soruları cevaplandırınız.*

5.
$$I_{sol}(f, n = 2^i), i = 0, 1, 2$$

Sol Dikdörtgen yaklaşımlarını hesaplayınız

6.
$$I_Y(f, n = 2^i), i = 0, 1, 2$$

Yamuk yaklaşımlarını hesaplayınız.

7.
$$I_{ort}(f, n = 2^i), i = 0, 1, 2$$

Orta Nokta yaklaşımlarını hesaplayınız

8.
$$I_S(f, n = 2^i), i = 1, 2$$

Simpson yaklaşımlarını hesaplayınız.

9. *Soru 5 ve 7 deki cevaplarınız yardımıyla Sol Dikdörtgen ve Orta Nokta yaklaşımları arasında* $i = 1$ *ve* $i = 2$ *için*

$$I_{ort}(f, n = 2^{i-1}) = 2I_{Sol}(f, n = 2^i) - I_{Sol}(f, n = 2^{i-1})$$

bağıntısının mevcut olduğunu gözlemleyiniz.

10. *Soru 6 ve 8 deki cevaplarınız yardımıyla Simpson ve Yamuk yaklaşımları arasında* i = 1 *ve* i = 2 *için*

$$I_S(f, n = 2^i) = \frac{4I_Y(f, n = 2^i) - I_Y(f, n = 2^{i-1})}{3}$$

bağıntısının mevcut olduğunu gözlemleyiniz.

11. *(8.2) interpolasyon polinomunun* $[a, b]$ *aralığı üzerinden integralini hesaplayarak, (8.1) ile verilen Simpson kuralını elde ediniz.*

8.4 Hata analizi

Sayısal integrasyon yöntemleri, gerçek integral değeri için yaklaşım oluşturmak amacıyla geliştirilmişlerdir ve genelde hata içerirler. Bu hatanın neye bağlı olduğu ve minimizasyonu için neler yapılması gerektiği konusunun anlaşılması oldukça önemlidir.

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

integrali için h adım uzunluğu ile sayısal yaklaşım $I_{sayisal}(f,h)$ olmak üzere

$$Hata = E(f,h) = I(f) - I_{sayisal}(f,h)$$

ile tanımlanan integrasyon hatasını, adım uzunluğu ve f fonksiyonunun türevi cinsinden tahmin etmek mümkündür. Böylece sayısal yöntemin hangi durumlarda gerçek sonuç üretebileceğini tahmin edebiliriz. Ayrıca integralde kullanılan alt aralık sayısına bağlı olarak hatanın nasıl değişeceği konusunda fikir sahibi oluruz.

Sayısal yöntemlerde oluşan hatayı incelemeden önce, hata ifadesinde kullanacağımız *O(Büyük O) notasyonu* tanıyalım.

O notasyonu, belirli bir noktanın komşuluğunda verilen bir fonksiyonun artış veya azalma hızını elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade etmek için kullanılır.

TANIM 8.1. *$x = a$ noktası komşuluğunda tanımlı f ve g fonksiyonları için eğer lim$_{x\to a}$ $(f(x))/(g(x) = sabit \neq 0$ ise bu taktirde $f(x)$ fonksiyonuna, $x = a$ noktası komşuluğunda $g-inci$ basamaktandır denir ve durum $f(x) \cong O(g(x)), x \to a$ gösterimi ile ifade edilir.*

Yukarıdaki tanımda $a = \infty$ olması durumunda, bu noktanın komşuluğu olarak yeterince büyük $c > 0$ için (c, ∞) aralığı alınır.

ÖRNEK 8.4. *O(büyük o) notasyonunun kullanımına ilişkin olarak aşağıdaki örnekleri inceleyelim.*

- $sin(x) \cong O(x), x \to 0$ dır, çünkü

  $$lim_{x\to 0}(sin(x))/x = 1 \neq 0$$

  dır. Bu durumda $x = 0$ noktası komşuluğunda $sin(x)$ fonksiyonu x fonksiyonu ile benzer davranış gösterir, o halde bu nokta komşuluğunda $sin(x) \approx x$ alınabilir.

- $$x^2+x+1 \cong O(x^2), x \to \infty \text{ çünkü } lim_{t\to\infty}((x^2+x+1))/x^2 = 1 \neq 0$$

  dir. O halde yeterince büyük x ler için $x^2+x+1 \approx x^2$ alınabilir.

- $$\begin{aligned} sinh(x) &= 1/2(e^x - e^{-x}) = 1/2(e^x) - 1/2(e^{-x}) \\ &= 1/2(1+x+x^2/2!+x^3/3!\ldots) \\ &\quad -1/2(1-x+x^2/2!-x^3/3!\ldots) \\ &= x + x^3/3! - \ldots \\ &\cong O(x), x \to 0 \end{aligned}$$

  O halde $x=0$ noktasının küçük komşuluğunda $sinh(x) \approx x$ alınabilir. Benzer biçimde

- $$cos(x) \cong O(1), x \to 0$$

Özetle büyük O notasyonu yardımıyla bir fonksiyonun bir nokta komşuluğundaki davranışı daha basit fonksiyonlarla(örneğin $x^n, n \in Z$) ifade edilmektedir. Örneğin

$$lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$$

olup, büyük O notasyonu ile

$$e^x - 1 \cong O(x), x \to 0$$

ile sıfır noktasının küçük komşuluğunda $e^x - 1 \approx x$ alınabileceğini anlıyoruz.

8.4.1 Sayısal İntegrasyon Kuralları için Yerel hata

Öncelikle sol dikdörtgen kuralını inceleyelim:

Sol dikdörtgen Kuralı için Yerel Hata

Yeterince küçün $h > 0$ sabiti için f fonksiyonunun $[a, a+h]$ aralığı üzerindeki integrali sonucu oluşan hataya yerel hata adını veriyoruz. f nin yeterli sayıda basamaktan türevlerinin mevcut olduğunu kabul ederek, $x = a$ noktası komşuluğundaki Taylor açılımı yardımıyla,

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^{a+h} f(x)dx \\ &= \int_a^{a+h} \left[f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots\right] dx, \\ &= hf(a) + \frac{h^2}{2}f'(a) + \cdots \qquad (8.3) \\ &= I_{sol}(f,h) + \frac{h^2}{2}f'(a) + \cdots \end{aligned}$$

elde ederiz.

O halde $[a, a+h]$ aralığında oluşan ve sol dikdörtgen kuralının **yerel hatası** olarak tanımlayabileceğimiz hata,

$$\begin{aligned} E_{sol}(f,h) &= I(f) - I_{sol}(f,h) \qquad (8.4) \\ &= \frac{h^2}{2}f'(a) + \cdots \\ &= ch^2 f'(\xi), \xi \in (a, a+h) \\ &= O(h^2) \qquad (8.5) \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir.

Alternatif olarak sırasıyla integraller ve türevler için Ortalama Değer Teoremlerinden(ODT),

$$\begin{aligned} E_{sol}(f,h) &= I(f) - I_{sol}(f,h) \\ &= \int_a^{a+h} f(x)dx - f(a)h \\ &= f(\chi)h - f(a)h, \chi \in (a, a+h)(\text{integraller için ODT}) \\ &= h(f(\chi) - f(a)) \\ &= hf'(\xi)(\chi - a), \xi \in (a, a+\chi)(\text{türevler için ODT}) \\ &= ch^2 f'(\xi) \\ &= O(h^2) \end{aligned}$$

elde ederiz, burada $c := (\chi - a)/h \in (0,1)$ dir.

- Bu sonuca göre türevi özdeş olarak sıfıra eşit olmayan her fonksiyon için Sol Dikdörtgen kuralına göre hatalı sonuçlar beklenmelidir.

- $f(x) = x$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı üzerindeki integrali yardımıyla (8.4) ifadesindeki, c sabitini belirleyebiliriz:

$$\begin{aligned} E_{sol}(f,h) &= I(f) - I_{sol}(f,h) \\ &= \int_0^1 x dx - [1 \times f(0)] \\ &= \frac{1}{2} \\ &= cf'(\xi) = c \end{aligned}$$

olup,

$$E_{sol}(f,h) = \frac{1}{2}h^2 f'(\xi), \xi \in (a, a+h) \tag{8.6}$$

elde ederiz.

Yamuk Kuralı için Yerel Hata
Şimdi de yamuk kuralını gözönüne alalım: Taylor açılımı ile

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^{a+h} f(x)dx \\ &= \int_a^{a+h} \left[f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \cdots \right] dx, \\ &= hf(a) + \frac{h^2}{2} f'(a) + \frac{h^3}{6} f''(a) + \cdots \end{aligned} \tag{8.7}$$

elde ederiz. Öte yandan

$$\begin{aligned} I_Y(f,h) &= \frac{h}{2}(f(a) + f(a+h)) \\ &= \frac{h}{2}(f(a) + f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \xi \epsilon (a, a+h)) \\ &= hf(a) + \frac{h^2}{2} f'(a) + \frac{h^3}{4} f''(a) + \cdots \end{aligned} \tag{8.8}$$

olarak ifade edilebilir. Bu durumda (8.7) den (8.8) i çıkarmak suretiyle, Yamuk yöntemi için **yerel hata**

$$E_Y(f) = I(f) - I_Y(f) = \frac{h^3}{6} f''(a) - \frac{h^3}{4} f''(a) + \cdots$$

$$= ch^3 f''(\alpha), c \in R, \alpha \in (a, a+h) \tag{8.9}$$

$$= O(h^3) \tag{8.10}$$

olarak elde edilir. Bu sonuca göre

- ikinci türevi özdeş olarak sıfıra eşit olmayan her fonksiyon için Yamuk kuralına göre hatalı sonuçlar beklenmelidir ve
- yöntem birinci dereceden polinomların integralini hatasız olarak hesaplaya-bilmektedir.

İkinci türevi sabit olan, örneğin $f(x) = x^2$, fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığı üzerindeki integrali yardımıyla (8.9) daki hata sabitini belirleyebiliriz:

$$\begin{aligned} E_Y(f) &= I(f) - I_Y(f) \\ &= \int_0^1 x^2 dx - 1/2(f(0) + f(1)) \\ &= 1/3 - 1/2 = -1/6 \\ &= cf''(\alpha) \\ &= 2c \end{aligned}$$

yani, $c = -1/12$ olup,

$$E_Y(f, h) = -\frac{1}{12} h^3 f''(\alpha), \alpha \in (a, a + h) \tag{8.11}$$

olarak elde ederiz.

Simpson Kuralı için Yerel Hata

Simpson yöntemi için $h = (b - a)/2$ olmak üzere, Taylor açılımı ile

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{a+2h} f(x)dx \\ &= \int_a^{a+2h} \left[\begin{array}{c} f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{6} f'''(a) \\ + \frac{(x-a)^4}{24} f^{(iv)}(a) + \cdots \end{array} \right] dx \\ &= 2hf(a) + 2h^2 f'(a) + \frac{4}{3} h^3 f''(a) + \frac{2}{3} h^4 f'''(a) + \frac{4}{15} h^5 f^{(iv)}(a) + \cdots \end{aligned}$$

elde ederiz.

Simpson yönteminde yer alan $f(\frac{a+b}{2})$ ve $f(b)$ değerlerinin $x = a$ noktası komşuluğunda Taylor açılımlarını hesaplayarak,

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a) + \frac{h^4}{24}f^{(iv)}(a) + \cdots$$

ve

$$f(b) = f(a) + 2hf'(a) + 2h^2 f''(a) + \frac{4}{3}h^3 f'''(a) + \frac{2h^4}{3}f^{(iv)}(a) + \cdots$$

elde ederiz. O halde

$$\begin{aligned} & f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \\ = \; & 6f(a) + 6hf'(a) + 4h^2 f''(a) + 2h^3 f'''(a) + h^4 \frac{5}{6} f^{(iv)}(a) + \cdots \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} I_S(f) &= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \\ &= 2hf(a) + 2h^2 f'(a) + \frac{4}{3}h^3 f''(a) + \frac{2h^4}{3}f'''(a) + \frac{5h^5}{18}f^{(iv)}(a) + \cdots \end{aligned}$$

olur. Buradan, Simpson kuralı için **yerel hata**

$$\begin{aligned} E_S(f,h) &= \int_a^b f(x)dx - I_S(f) \\ &= \frac{4}{15}h^5 f^{(iv)}(a) - \frac{5h^5}{72}f^{(iv)}(a) + \cdots \\ &= ch^5 f^{(iv)}(\xi), \xi \in (a,b) \qquad (8.12) \\ &= O(h^5) \qquad (8.13) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu sonuca göre

- dördüncü türevi özdeş olarak sıfıra eşit olmayan her fonksiyon için Simpson kuralına göre hatalı sonuçlar beklenmelidir ve
- yöntem üçüncü dereceden polinomların integralini hatasız olarak hesaplayabilmektedir.

- Dördüncü türevi sabit olan, örneğin $f(x) = x^4$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı üzerindeki integrali yardımıyla (8.12) daki hata sabitini belirleyebiliriz:

$$\begin{aligned} E_S(f) &= I(f) - I_S(f) \\ &= \int_0^1 x^4 dx - 1/6(f(0) + 4f(1/2) + f(1)) \\ &= 1/5 - 1/6 \times (0 + 4 \times 1/16 + 1) \\ &= -\frac{1}{120} \\ &= c \times \frac{1}{32} \times 24 \end{aligned}$$

bağıntısından, $c = -\frac{32}{24\times 120} = -\frac{1}{90}$ olup,

$$E_S(f,h) = -\frac{1}{90} h^5 f^{(iv)}(\xi), \xi \in (a,b)$$

olarak elde ederiz.

8.4.2 Sayısal İntegrasyon Kuralları için Kümülatif Hata

f fonksiyonunun verilen bir $[a,b]$ aralığı üzerinde herhangi bir bileşik integrasyon yöntemiyle integrali sonucu oluşan hataya, ilgili integral yönteminin kümülatif hatası adı verilmektedir. Bileşik kurallar için elde edeceğimiz hata ifadeleri, her bir alt aralıkta ilgili kuralın uygulanmasıyla oluşan yerel hataların toplamı olarak ifade edilirler.

Sol Dikdörtgen Kuralı için Kümülatif Hata

- Sol Dikdörtgen kuralı için $[a, a+h]$ aralığında elde edilen yerel hata tahmini yardımıyla,

$$h = \frac{b-a}{n}$$

olmak üzere,

$$[a,b] = [a, a+h] \cup (a+h, a+2h] \cup ... \cup (a+(n-1)h, b]$$

ve

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + ... + \int_{a+(n-1)h}^{b} f(x)dx$$

özelliğinden yararlanarak, $[a,b]$ aralığında oluşan kümülatif hatayı her bir alt aralıkta oluşan yerel hataların toplamı şeklinde ifade edebiliriz:

$$E_{sol}(f,h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h^2}{2} f'(c_i), c_i \in (a+(i-1)h, a+ih)$$

Elde edilen bu hata ifadesini, alternatif olarak

$$\begin{aligned}
E_{sol}(f,h) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)^2}{n^2} f'(c_i) \\
&= \frac{(b-a)^2}{2n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f'(c_i)\right) \\
&= \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c), c \in (a,b) \\
&= O(1/n) = O(h)
\end{aligned}$$

biçiminde de ifade edebiliriz, burada f fonksiyonunun türevinin sürekliğini kabul ederek, türevler için ortalama değer teoremini yardımıyla

$$f'(c) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f'(c_i), c \in (a,b)$$

özelliğini kullandık. O halde yöntem $O(1/n) = O(h)$ hızıyla gerçek sonuca yakınsar. Diğer bir değimle, $[a,b]$ *aralığı* n *yerine* $2n$ *alt aralığa bölünmesi durumunda, yani* h *yerine* $h/2$ *alınması durumunda, hata yaklaşık olarak* 2 *kat küçülür.*

- Kümülatif hatası $O(h^m)$ olan bir yöntem **m-inci basamaktan** bir yöntem olarak adlandırılmaktadır.
- O halde **sol dikdörtgen kuralı birinci basamaktan** bir yöntemdir.

Yamuk Kuralı için Kümülatif Hata

- Yukarıdaki işlemler Yamuk kuralı için elde edilen yerel hata formülü için uygulanırsa,

$$\begin{aligned} E_Y(f,h) &= -\sum_{i=1}^{n}\frac{(b-a)^3}{12n^3}f''(c_i) \\ &= -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f''(c_i)\right) \\ &= -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(c), c\in(a,b) \\ &= O(1/n^2)=O(h^2) \end{aligned}$$

  elde ederiz.

- O halde **Yamuk kuralı ikinci basamaktan bir yöntemdir**: $[a,b]$ *aralığı n yerine $2n$ alt aralığa bölünmesi durumunda, yani h yerine $h/2$ alınması durumunda, hata yaklaşık olarak 4 kat küçülür.*

Simpson Kuralı için Kümülatif Hata

Simpson yöntemi için her iki bitişik aralık üzerinde oluşan $n/2$ adet yerel hatanın toplamını hesaplayarak

$$\begin{aligned} E_S(f,h) &= -\sum_{i=1}^{n/2}\frac{(b-a)^5}{90n^5}f^{(iv)}(c_i), c_i\in(a+2(i-1)h, a+2ih) \\ &= -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n/2}f^{(iv)}(c_i) \\ &= -\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(iv)}(c), c\in(a,b) \\ &= O(1/n^4)=O(h^4) \end{aligned}$$

elde ederiz.

- **Simpson yöntemi dördüncü basamaktan bir yöntemdir**: $[a,b]$ *aralığı n yerine $2n$ alt aralığa bölünmesi durumunda hata yaklaşık olarak 16 kat küçülür.*

Sonuç 8.1. *Yukarıdaki sonuçlardan yöntemin basit versiyonu üzerinde elde edilen yerel hatanın $O(h^{m+1})$ olması durumunda, bileşik versiyonu üzerinde elde edilen kümülatif hatanın ise $O(h^m)$ olduğunu gözlemliyoruz. Bu sonucun her yöntem için geçerli olduğunu söyleyebilir miyiz? Neden?*

Uyarı. *Bir yöntemin basit versiyonunun yerel hatası $O(h^{m+1})$ iken bileşik versiyon hatasının $O(h^m)$ olması, basit versiyonun daha hassas olduğu yanılgısına neden olmamalıdır. Çünkü basit ve bileşik versiyonlardaki h adım uzunlukları aynı değildir. Örneğin Simpson yöntemi $[0,1]$ aralığında uygulandığında basit versiyon, iki adet alt aralık ve $h = 2^{-1}$ adım uzunluğu ile $O(h^5) = O(2^{-5})$ yerel hatasına sahip iken, $n = 4$ alt aralık sayısı($h = 2^{-2}$) ile(en az sayıda alt aralığı sahip bileşik versiyon) çok daha küçük olan $O(h^4) = O(2^{-8})$ hatasına sahiptir.*

ÖRNEK 8.5. $f(x) = \sin(5x)$ *fonksiyonun* $[0,1]$ *aralığındaki integralini en fazla* $\varepsilon = 10^{-4}$ *hatasıyla belirlemek isteyelim. Buna göre*

- Sol Dikdörtgen kuralına göre verilen aralık en az kaç alt aralığa bölünmek suretiyle integrasyon işlemi gerçekleştirilmelidir?

- Yamuk kuralı için minimum alt aralık sayısı ne olmalıdır?

- Simpson kuralı için minimum alt aralık sayısı ne olmalıdır?

- Sol dikdörtgen kuralına göre

$$\begin{aligned}
|E_{sol}(f,n)| &= \left|\frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)\right| \\
&= \left|\frac{(1-0)^2}{2n} f'(c)\right| \\
&= \frac{1}{2n} 5|\cos(5c)| \\
&\leq \frac{5}{2n} \leq 10^{-4}
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlanması için

$$n \geq 2.5 \times 10^4$$

olmalıdır. Bu durumda minimum alt aralık sayısı 2.5×10^4 olmalıdır.

- Yamuk kuralına göre

$$\begin{aligned}|E_Y(f,n)| &= |-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(c)| \\ &= |\frac{(1-0)^2}{12n^2}f''(c)| \\ &= \frac{1}{12n^2}25|\sin(5c)| \\ &\leq \frac{25}{12n^2} \leq 10^{-4}\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlanması için

$$n \geq \sqrt{\frac{25}{12} \times 10^4} = 144.34$$

olmalıdır. Bu durumda minimum alt aralık sayısı 145 olmalıdır.

- Simpson kuralına göre

$$\begin{aligned}|E_S(f,n)| &= |-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(iv)}(c)| \\ &= |\frac{(1-0)^2}{180n^4}f^{(iv)}(c)| \\ &= \frac{1}{180n^4}375|\sin(5c)| \\ &\leq \frac{375}{180n^4} \leq 10^{-4}\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlanması için

$$n \geq (\frac{375}{180} \times 10^4)^{1/4} = 12.014$$

sağlanmalıdır. Bu durumda minimum alt aralık sayısı 14 olmalıdır.(Neden 13 değil?)

8.5 MATLAB/Octave ortamında uygulamalar

Yukarıdaki örneklerden görüldüğü üzere, sayısal integrasyon yöntemi ile iyi bir yaklaşım elde edebilmek için verilen aralığın çok sayıda alt aralığa bölünmesi suretiyle bileşik yöntemlerin uygulanması gerekmektedir. Ancak bu durumda ise oluşan aritmetik işlemler ancak elektronik ortamda gerçekleştirilebilir. Bu kısımda MATLAB/Octave yardımıyla belirtilen integrasyon işlemlerinin nasıl gerçekleştiridiğini örnekler üzerinde inceliyoruz.

Yöntem: Sol dikdörtgen

$$I_{sol}(f,n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Algoritma 8.1 Sol dikdörtgen algoritması

1. İnput: f fonksiyonu, $[a,b]$ aralığı ve n değeri
2. $h = (b-a)/n$ alt aralıklar uzunluğu
3. x: alt aralıklara ait uç noktalar vektörü
4. $y = f(x)$; uç noktalardaki fonksiyon değerleri
5. y değerlerinin toplamını h ile çarp ve geri gönder

Algoritma 8.1 e karşılık gelen Program 8.1 aşağıda verilmektedir.

```
function sonuc=soldik(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a:h:b;
y=f(x);
toplam=sum(y(1:n));
sonuc=toplam*h;
%-------------------------------
```

Program 8.1: Bileşik sol dikdörtgen kuralı

ÖRNEK 8.6.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0.746\,82$$

integrali için

- $n = 2, 10, 100, 1000, 5000$ değerlerine karşılık gelen sol dikdörtgen yaklaşımlarını hesaplayınız.

- Sonucun en fazla en fazla $\varepsilon = 10^{-4}$ hatası ile belirlenebilmesi için minimum n ne olmalıdır?

- $>> f = inline('exp(-x.\hat{}2)')$

ile tanımlanan f fonksiyonunu yukarıda verilen soldik programıyla çalıştırarak aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

n	2	10	100	1000	5000
$soldik(f, 0, 1, n) \doteq$	0.8894	0.7778	0.7500	0.7471	0.7469

-

$$\begin{aligned}
|E_{sol}(f,n)| &= |\frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)| \\
&= |\frac{(1-0)^2}{2n} f'(c)| \\
&= \frac{1}{2n} 2ce^{-c^2} \\
&\leq \frac{ce^{-c^2}}{n} \\
&\leq \frac{0.42888}{n} \leq 10^{-4}
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlanması için $n \geq 4289$ olmalıdır. Yukarıda $f(x) = xe^{-x^2}$ fonksiyonunun $x = 1/\sqrt{2}$ noktasında maksimumuna ulaştığını ve maksimum değerinin ise $f(1/\sqrt{2}) = 0.42888$ olduğunu kullandık.

ÖRNEK 8.7. *Yukarıdaki örneği Simpson kuralı için tekrarlayınız.*

Çözüm.

Öncelikle Simpson kuralına ait programı geliştirmeliyiz. $k = n/2, h = (b-a)/n$ olmak üzere Simpson kuralının

$$I_S(f,n) = \frac{h}{3}(f(a) + 4\sum_{i=1}^{k} f(x_{2i}) + 2\sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i+1}) + f(b))$$

olarak ifade edildiğini biliyoruz. Buna göre iki toplamın ayrı ayrı hesaplanması gerekmektedir.

Algoritma 8.2 Simpson yöntemi algoritması

1. Girdiler: f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı ve n değeri
2. $h = (b - a)/n$ alt aralıklar uzunluğu
3. x: alt aralıklara ait uç noktalar vektörü
4. $y = f(x)$; uç noktalardaki fonksiyon değerleri
5. $\sum_{i=1}^{k} f(x_{2i})$ toplamını hesapla ve ciftop değişkenine ata
6. $\sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i+1})$ toplamını hesapla ve tektop değişkenine ata
7. Çıktı: $h/3 \times (f(a) + 4 \times ciftop + 2 \times tektop + f(b))$

```
%-----------------------------------

function sonuc=simpson(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=linspace(a,b,n+1);
fd=f(x);
tektop=sum(fd(3:2:n-1));
cifttop=sum(fd(2:2:n));
toplam=4*cifttop+2*tektop+(fd(1)+fd(n+1));
sonuc=toplam*h/3;
%-----------------------------------
```

Program 8.2: Bileşik Simpson yöntemi

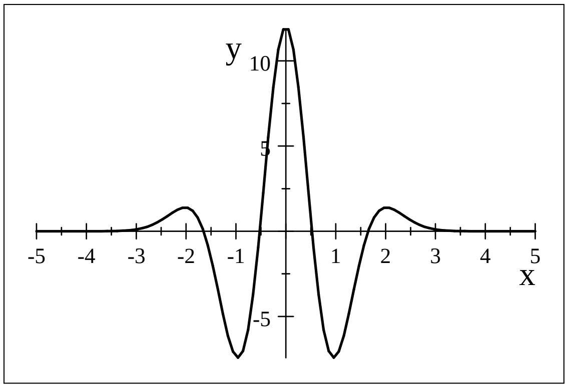
Algoritma 8.2 ile verilen algoritmaya ait MATLAB/Octave kodu Program 8.2 ile verilmektedir.

$f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu ile $[0, 1]$ aralığı üzerinde farklı n değerleri ile elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmektedir:

n	2	10	100
$simpson(f, 0, 1, n) \doteq$	0.7472	0.7468	0.7468

f fonksiyonunun dördüncü türevi

$$f^{(iv)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$$



Şekil 8.2: $f^{iv}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$ fonksiyonunun grafiği

dir ve grafiği Şekil 8.2 de sunulmaktadır. $f^{(iv)}(x)$ maksimum değerine $x = 0$ noktasında ulaşır ve bu noktadaki değeri 12 dir(Alıştırma 7.10).

O halde

$$
\begin{aligned}
|E_S(f,n)| &= |-\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(iv)}(c)| \\
&= |\frac{(1-0)^2}{180n^4} f^{(iv)}(c)| \\
&= \frac{12}{180n^4} \leq 10^{-4}
\end{aligned}
$$

eşitsizliğinden

$$
n \geq (\frac{3 \times 10^4}{45})^{1/4} \doteq 166.67
$$

elde ederiz. O halde hatanın belirtilen değerden küçük olması için *yeter şart* n sayısının $n \geq 168$(alt aralık sayısı çift olmalı!) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Alıştırmalar 8.2.

1. *Yukarıda takip edilen yöntemleri uygulayarak* $[a,b]$ *aralığının* n *adet alt aralığa bölünmesiyle uygulanan Sağ Dikdörtgen ve Orta Nokta yöntemleri için hata ifadelerini elde ediniz. Yöntemler hangi hızla gerçek çözüme yakınsamaktadırlar?*

2. $f(x) = \cos(4x)$ *fonksiyonun* $[0,1]$ *aralığındaki integralini en fazla* $\varepsilon = 10^{-4}$ *hatasıyla belirlemek isteyelim. Buna göre*

(a) *Sol Dikdörtgen kuralına göre verilen aralık en az kaç alt aralığa bölünmek suretiyle integrasyon işlemi gerçekleştirilmelidir?*

(b) *Yamuk kuralı için minimum alt aralık sayısı ne olmalıdır?*

(c) *Simpson kuralı için minimum alt aralık sayısı ne olmalıdır?*

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

integrali için yukarıda verilen soldikdörtgen yöntemi integral yaklaşım programını düzenleyerek, $n = 2{,}10{,}100{,}1000{,}5000$ değerleri için

Alıştırmalar 8.3. 1. (a) *Sağ dikdörtgen yaklaşımlarını hesaplayınız.*

(b) *Orta Nokta yaklaşımlarını hesaplayınız.*

(c) *Yamuk yaklaşımlarını hesaplayınız.*

(d) *Herbir* n *değeri için hangi yöntemle elde ettiğiniz sonuçlar virgülden sonra beş haneye kadar gerçek olarak kabul edilebilen* $0.746\,82$ *değerine daha yakındır?*

(e) *Herbir yönteme göre hatanın* $\varepsilon = 10^{-4}$ *den küçük olması için elde edilen en küçük* n *ne olmalıdır?*

4

$$I(f) = \int_0^1 \sin(x^2)dx \simeq 0.310\,27$$

integrali için $n = 2$ alt aralık üzerinde Sol Dikdörtgen, Orta Nokta, Yamuk ve Simpson kuralına göre aşağıdaki yaklaşımlar elde edilmiştir. Hangi yaklaşımın hangi kural ile elde edildiğini belirleyiniz.

Alıştırmalar 8.4. 1.

2. (a) $I(f) = 0.3341$

(b) $I(f) = 0.1237$

(c) $I(f) = 0.3052$

(d) $I(f) = 0.2979$

5 *Soru 4 te verilen integrali, belirtilen yöntemlere göre ve $n = 10$ değeri için hesaplatınız. Yöntemleri yaklaşım sonuçlarına göre, en iyi yaklaşımı veren yöntem ilk sırada olmak üzere sıralayınız.*

6 *Octave ortamında sayısal integral gerçekleştiren iki fonksiyon quadl ve quadgk dır. f fonksiyonu inline fonksiyon olmak üzere kullanımı*

$$> \ > f = inline('\sin(x.\hat{}2)')$$
$$> \ > quadl(f, 0, 1)$$
$$> \ > ans = 0.31027$$

örneğinde olduğu gibidir. quadl ve quadgk sayısal integral fonksiyonlarını siz de deneyiniz?

7

$$\int_0^1 \sin(x)dx \doteq 0.4597$$

integralini Sol dikdörtgen, Sağ dikdörtgen, Orta Nokta, Yamuk ve Simpson kuralıyla farklı n değerleri için hesaplayınız. Her bir kural ile yukarıdaki sonucu virgülden sonra üç basamağa kadar elde edebileceğiniz en küçük n değerini belirlemeye çalışınız.

8 *Soru 7 yi*

$$\int_0^1 \sin(10x)dx \doteq 0.183\,9$$

ve

$$\int_0^1 \sin(100x)dx \doteq 1.\,376\,8 \times 10^{-3}$$

fonksiyonları için de tekrar ediniz. Fonksiyonun integrasyon bölgesi üzerindeki salınım sayısı arttığında, virgülden sonra dört basamağa kadar verilen yaklaşımları elde edebilmek için gerekli alt aralık sayısı her bir yönteme göre nasıl değişmektedir?

9 *$[a, b]$ aralığında tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun bu aralık üzerindeki yay uzunluğunun*

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

belirli integrali ile tanımlandığını hatırlayalım. Buna göre aşağıdaki fonksiyonların karşılarında verilen aralıklar üzerinde ve önceden hesaplanmış *yay uzunluklarını bileşik Simpson yöntemi yardımıyla elde edebileceğiniz en küçük çift* n *değerini hesaplayınız.*

(a) $y = x^2, [0, 1], 1.4789$

(b) $y = x^3, [0, 1], 1.5479$

(c) $y = \sin(x), [0, \pi], 3.8202$

(d) $y = \sin(2x), [0, \pi], 5.2704$

10

$$f(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$$

fonksiyonunun maksimumuna $x = 0$ noktasında ulaştığını gösteriniz.

11 (Grup Projesi) Yukarıdaki alıştırmalardan da gözlemleyeceğiniz gibi, herhangi bir bileşik yöntemin uygulanmasında alt aralık sayısının seçimi sonucu önemli ölçüde etkilemektedir. Öte yandan yöntemler kullanılacak olan alt aralık sayısı seçimini kullanıcıya bırakmaktadırlar. Bu projede en uygun alt aralık sayısının nasıl tahmin edilebileceğini inceliyoruz. Akla gelen ilk yaklaşım şöyle olabilir:

(a) *Yöntemi ilk olarak verilen aralığı $n = 10$ alt aralığa bölerek yöntemi uygulayalım, daha sonra $n = 20$ alt aralığa bölerek uygulayıp her bir durumda elde edilen yaklaşımlar arasındaki mutlak farkı hesaplayınız.*

(b) *Eğer söz konusu fark belirleyeceğiniz bir toleranstan(örneğin $\epsilon = 10^{-5}$) küçük ise elde ettiğiniz son yaklaşımı geçerli yaklaşım olarak kabul ediniz.*

(c) *Elde edilen yaklaşım belirtilen toleranstan küçük değilse alt aralık sayısını tekrar iki katına çıkararak işlemleri tekrar ediniz.*

(d) *(a)-(c) adımlarında özetlenenen yöntemi uyguladıktan sonra avantaj ve dezavantajlarını değerlendirerek, daha iyi bir yöntemin nasıl geliştirilebileceğini tartışınız.*

8.6 Yüksek basamaktan iteratif yaklaşımlar

Sol Dikdörtgen veya Yamuk gibi düşük basamaklı yöntemlerden farklı adım uzunlukları ile oluşturulan uygun lineer kombinasyonlar yardımıyla daha yüksek basamaktan yöntemler elde edebiliriz:

8.6.1 Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

Örneğin Sol Dikdörtgen yönteminin farklı adım uzunlukları ile oluşturulan aşağıdaki lineer kombinasyon Orta Nokta yöntemine eşittir:

$$I_{ort}(f,2h) = 2I_{sol}(f,h) - I_{sol}(f,2h)$$

Gerçekten de

$$I_{sol}(f,h) = h(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_N))$$

ve

$$I_{sol}(f,2h) = 2h(f(x_1) + f(x_3) + ... + f(x_{N-1}))$$

yaklaşımlarından

$$2I_{sol}(f,h) - I_{sol}(f,2h) = 2h(f(x_2) + f(x_4) + ... + f(x_N))$$

elde edilir ki bu yöntem $I_{ort}(f,2h)$ dır.

Bu sonucu daha somut bir örnek üzerinde gözlemlemeye çalışalım:

$$[a,b] = [0,1], h = 1/10$$

olsun. Bu durumda alt aralıkların uç noktaları

$$x = [0, 1/10, 2/10, ..., 9/10, 1]$$

olup

$$I_{sol}(f,2h) = I_{sol}(f,1/5) = 1/5(f(0) + f(1/5) + ... + f(4/5)) \tag{8.14}$$

dir. Öte yandan

$$\begin{aligned} I_{sol}(f,h) &= I_{sol}(f,1/10) \\ &= 1/10(f(0) + f(1/10) + ... + f(9/10)) \end{aligned} \tag{8.15}$$

dir. O halde (8.15) i iki ile çarpıp, (8.14) ile toplamak suretiyle

$$2I_{sol}(f,h) - I_{sol}(f,2h) = 1/5(f(1/10) + f(3/10) + ... + f(9/10))$$

elde ederiz ki bu yöntem $2h = 1/5$ adım uzunluğu ile Orta Nokta yöntemi, yani $I_{ort}(f, 2h)$ dir.

Orta Nokta yönteminin yerel hatası

$$E_{ort}(f,h) = \frac{h^3}{24} f''(c), c\epsilon(a,b) \tag{8.16}$$

ve kümülatif hatası ise

$$\begin{aligned} E_{ort}(f,h) &= \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c), c\epsilon(a,b) \\ &= \frac{(b-a)}{24} h^2 f''(c), c\epsilon(a,b) \\ &= O(h^2) \end{aligned} \tag{8.17}$$

olduğu kolayca gösterilebilir(Önceki bölüm Alıştırma 1).

TEOREM 8.2. *$\int_a^b f(x)dx$ integralini gözönüne alalım.*

$$S(i,1), i = 1, 2, ...$$

ile $[a,b]$ aralığının 2^{i-1} ,$i = 1, 2, ...$ alt aralığa bölünmesi suretiyle uygulanan sol dikdörtgen kuralı yaklaşımlarını gösterelim:

$$S(i,1) := I_{sol}(f, \frac{b-a}{2^{i-1}}), i = 1, 2, ...$$

Bu taktirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- $$S(i,2) := I_{ort}(f, \frac{b-a}{2^{i-2}}) = 2S(i,1) - S(i-1,1), i = 2, 3, ...$$

  yaklaşımları kümülatif hatası $O(h^2)$ olan yaklaşımlardır.

- $$S(i,j) := \frac{4^{j-2}S(i,j-1) - S(i-1,j-1)}{4^{j-2}-1}, i = 3, 4, ...; j = i, i+1, ...$$

  yaklaşımları ise, kümülatif hataları $O(h^{2(j-1)})$ olan yaklaşımlardır.Yukarıda tanımlanan dizinin başlangıç elemanları aşağıdaki tabloda sunulmaktadır.

Sol dikdörtgen yöntemi esaslı yüksek basamaktan iteratif yaklaşımlar tablosu			
Sol D.	Orta Nokta	O(h^4)	O(h^6)
$S(1,1)$			
$S(2,1)$	$S(2,2) = 2S(2,1) - S(1,1)$		
$S(3,1)$	$S(3,2) = 2S(3,1) - S(2,1)$	$S(3,3) = \frac{4S(3,2)-S(2,2)}{3}$	
$S(4,1)$	$S(4,2) = 2S(4,1) - S(3,1)$	$S(4,3) = \frac{4S(4,2)-S(3,2)}{3}$	$S(4,4) = \frac{16S(4,3)-S(3,3)}{15}$

İspat.

$S(i,2), i = 2,3,...$ yaklaşımlarının kümülatif hataları $O(h^2)$ olan orta nokta yaklaşımları olduklarını yukarıda gözlemlemiştik. İlk olarak $S(i,3)$ yaklaşımlarının kümülatif hatalarının $O(h^4)$ olduğunu göstereceğiz.

- Öncelikle $S(3,3)$ yaklaşımını dikkate alarak, yöntemin yerel hatasını elde etmeye çalışalım. Açık olarak ifade edecek olursak, $h = (b-a)/2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S(3,3) &= \frac{4S(3,2) - S(2,2)}{3} \\ &= \frac{4h\left(f(a+h/2) + f(a+3h/2)\right) - 2hf(a+h)}{3} \\ &= \frac{2(b-a)}{3}\left(f(a+h/2) - 1/2f(a+h) + f(a+3h/2)\right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Yeteri düzeyde türevlenebilir olduğunu kabul ederek, f fonksiyonunun önce $x = a$ noktası komşuluğunda Taylor açılımını gerçekleştirip, ardından da integral almak suretiyle

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x)dx \\ = \; & 2hf(a) + 2h^2f'(a) + 4/3h^3f''(a) + 2/3h^4f'''(a) + 4/15h^5f^{(iv)}(a) + ... \end{aligned} \tag{8.18}$$

elde ederiz. Benzer biçimde yine $x = a$ noktası komşuluğundaki Taylor açılımı yardımıyla

$$\begin{aligned} &\left(f(a+h/2) - 1/2f(a+h) + f(a+3h/2)\right) \\ = \; & 3/2f(a) + (3/2h)f'(a) + h^2f''(a) + h^3/2f'''(a) + 74/384h^4f^{(iv)}(a) + ... \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde

$$\begin{aligned}
& S(3,3) \\
= \; & \frac{2(b-a)}{3}\left(f(a+h/2) - 1/2 f(a+h) + f(a+3h/2)\right) \qquad (8.19) \\
= \; & 2hf(a) + 2h^2 f'(a) + 4/3h^3 f''(a) + 2/3h^4 f'''(a) + 37/144h^5 f^{(iv)}(a) + ...
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx - S(3,3) &= (4/15 - 37/144)h^5 f^{(iv)}(a) + ... \\
&= ch^5 f^{(iv)}(\xi), \xi \in (a,b) \qquad (8.20)
\end{aligned}$$

elde ederiz. (8.20) Dördüncü türevi sabit olan, örneğin $f(x) = x^4$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı üzerindeki integrali yardımıyla (8.20) deki hata sabitini belirleyebiliriz:

$$\begin{aligned}
E_Y(f) &= I(f) - S(3,3) \\
&= \int_0^1 x^4 dx - 2/3(f(1/4) - 1/2f(1/2) + f(0+3/4)) \\
&= 1/5 - 2/3 \times (1/256 - 1/2 \times 1/16 + 81/256) \\
&= 7/960 \\
&= c \times \frac{1}{32} \times 24
\end{aligned}$$

bağıntısından, $c = \frac{32 \times 7}{24 \times 960} = 7/720$ olup, yöntemin yerel hatasını

$$E_{S(3,3)}(f, h = (b-a)/2) = 7/720h^5 f^{(iv)}(\xi), \xi \in (a,b)$$

olarak elde ederiz. Buradan $S(i,3), i = 4,5,...$ yöntemlerinin kümülatif hatasını ise, $n/2$ adet yerel hatanın toplamı olarak

$$\begin{aligned}
E_{S(i,3)}(f, (b-a)/n) &= 7/1440(b-a)^5/n^4 f^{(iv)}(\xi), \xi \in (a,b) \\
&= O(h^4)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

- Benzer biçimde $E_{S(4,4)}(f,h) = O(h^7)$ olduğu ve bileşik yöntemler için ise $E_{S(i,4)}(f,h) = O(h^6), i = 5,6,...; n = 4,6,...$ gösterilebilir.(Alıştırma 11)

- O halde $E_{S(i,2)} = O(h^2), E_{S(i,3)} = O(h^4), E_{S(i,4)} = O(h^6)$ gözlemlerinde hareketle, tümevarım gereği kümülatif hatanın h nın *çift* kuvvetleri cinsinden

$$I(f)-S(i,j) = E_{S(i,j)} = c_1 h^{2(j-1)} f^{(2(j-1))}(a) + c_2 h^{2j} f^{(2j)}(a) + ..., j = 2,3,... \quad (8.21)$$

olarak ifade edildiğini kabul edelim. Bu taktirde $i- > i+1$(veya $h- > h/2$) için

$$I(f) - S(i+1,j) = E_{S(i+1,j)} = c_1 \frac{h^{2(j-1)}}{2^{2(j-1)}} f^{(2(j-1))}(a) + c_2 h^{2j} f^{(2j)}(a) + ... \quad (8.22)$$

elde ederiz. 8.22 ifadesini $2^{2(j-1)} = 4^{j-1}$ ile çarpıp, 8.21 den farkını almak suretiyle

$$4^{j-1} E_{S(i+1,j)} - E_{S(i,j)} = (4^{j-1}(c_2 h^{2j} f^{(2j)}(a) + ...) - (c_2 h^{2j} f^{(2j)}(a) + ...)) = O(h^{2j})$$

veya

$$E_{S(i+1,j+1)} = \frac{4^{j-1} E_{S(i+1,j)} - E_{S(i,j)}}{4^{j-1}} = O(h^{2j})$$

elde ederiz.

ÖRNEK 8.8. $g(x) = \sin(x)$ *fonksiyonun* $[0,1]$ *aralığındaki yay uzunluğu*

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \cos(x)^2} dx$$

dir. Buna göre söz konusu integral için yukarıda tanımlanan $S(i,j), i,j = 1,2,3$ *yaklaşımlarını hesaplayınız.*

- $[0,1]$ aralığında uygulanan basit sol dikdörtgen kuralı olarak, $f(x) = \sqrt{1 + \cos(x)^2}$ ile

$$S(1,1) = hf(0) = f(0) = \sqrt{2} = 1.414213562373095$$

dir.

- $[0,1]$ aralığının iki alt aralığa bölünmesiyle uygulanan sol dikdörtgen kuralı olarak, $h = 1/2, x_1 = 0, x_2 = 1/2$ değerleri ile

$$\begin{aligned} S(2,1) &= h(f(x_1) + f(x_2)) \\ &= 1/2 \times (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos(1/2)^2}) = 1.372341918738314 \end{aligned}$$

  dir.

- $[0,1]$ aralığının dört alt aralığa bölünmesiyle uygulanan sol dikdörtgen kuralı olarak,

$$h = 1/4, x_1 = 0, x_2 = 1/4, x_3 = 1/2, x_4 = 3/4$$

  değerleri ile

$$\begin{aligned} S(3,1) &= h(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)) \\ &= 1/4 \times (f(0) + f(1/4) + f(1/2) + f(3/4)) \\ &= 1.344047152082966 \end{aligned}$$

  dir.

- $[0,1]$ aralığının sekiz alt aralığa bölünmesiyle uygulanan sol dikdörtgen kuralı olarak,

$$h = 1/8, x_1 = 0, x_2 = 1/8, ..., x_8 = 7/8$$

  değerleri ile $S(4,1) = 1.328270049119772$ elde ederiz. O halde elde edilen bu yaklaşım değerlerinden aşağıdaki ortanokta yaklaşımlarını elde edebiliriz

- $S(2,2) = 2 \times S(2,1) - S(1,1) = 1.330470275103533$
- $S(3,2) = 2 \times S(3,1) - S(2,1) = 1.315752385427619$
- $S(4,2) = 2 \times S(4,1) - S(3,1) = 1.312492946156577$
- Ayrıca elde edilen orta nokta yaklaşımları yardımıyla
- $S(3,3) = \frac{4 \times S(3,2) - S(2,2)}{3} = 1.310846422202314$
- $S(4,3) = \frac{4 \times S(4,2) - S(3,2)}{3} = 1.311406466399563$

  Son olarak

- $S(4,4) = \frac{16\times S(4,3)-S(3,3)}{15} = 1.311443802679379$

  yaklaşımını elde ederiz.

MATLAB/Octave quadl fonksiyonu ile elde edilen yaklaşım değeri ise **1.311442**2498208092 dir. Bu yaklaşımları tablo halinde sunmak daha uygundur:

$\int_0^1 \sqrt{1+\cos(x)^2}dx$ için Sol dikdörtgen esaslı iteratif yaklaşımlar tablosu			
Sol Diktörtgen	Orta Nokta	$O(h^4)$	$O(h^6)$
1.414213562373095			
1.372341918738314	1.330470275103533		
1.344047152082966	1.315752385427619	1.310846422202314	
1.328270049119772	1.312492946156577	1.311406466399563	**1.31144**3802

8.6.2 Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

Sol dikdörtgen yöntemi esaslı ardışık yöntemlere benzer biçimde Yamuk yöntemini esas alan ardışık ve yüksek basamaktan yöntemler türetilebilir:

Yamuk yönteminden h ve $2h$ adım uzunlukları ile oluşturulan aşağıdaki lineer kombinasyon $I_S(f,h)$ ile göstereceğimiz Simpson yöntemine eşittir:

$$I_S(f,h) = \frac{4I_Y(f,h) - I_Y(f,2h)}{3}$$

Gerçekten de $h = 1/10$ için

$$I_Y(f,h) = \frac{1}{10}(\frac{1}{2}f(0) + f(1/10) + ... + f(9/10) + \frac{1}{2}f(1))$$

olup,

$$4I_Y(f,h) = \frac{2}{10}f(0) + \frac{2}{5}f(1/10) + ... + \frac{2}{5}f(9/10) + \frac{2}{10}f(1)$$

dir. Öteyandan

$$I_Y(f,2h) = \frac{1}{10}f(0) + \frac{1}{5}f(2/10) + \frac{1}{5}f(4/10) + ... + \frac{1}{10}f(1)$$

dır ve buradan

$$
\begin{aligned}
& 4I_Y(f,h) - I_Y(f,2h) \\
= \; & \frac{1}{10}f(0) + \frac{2}{5}f(1/10) + \frac{1}{5}f(2/10) + \frac{2}{5}f(3/10) + ... + \frac{1}{10}f(1) \\
= \; & \frac{1}{10}(f(0) + 4f(1/10) + 2f(2/10) + 4f(3/10) + ... + f(1))
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
& \frac{4I_Y(f,h) - I_Y(f,2h)}{3} \\
= \; & \frac{h}{3}(f(0) + 4f(h) + 2f(2h) + 4f(3h) + ... + f(1)) = I_S(f,h)
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

TEOREM 8.3. *$\int_a^b f(x)dx$ integralini gözönüne alalım.*

$$R(i,1), i = 1,2,....$$

ile $[a,b]$ aralığının 2^{i-1} ,$i = 1,2,....$ alt aralığa bölünmesi suretiyle uygulanan Yamuk kuralı yaklaşımlarını gösterelim:

$$R(i,1) := I_Y(f, \frac{b-a}{2^{i-1}}), i = 1,2,...$$

olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- $$R(i,2) := \frac{4R(i,1) - R(i-1,1)}{3}, i = 2,3,...$$

  yaklaşımları kümülatif hatası $O(h^4)$ olan Simpson yaklaşımlardır.

- $$R(i,j) := \frac{4^{j-2}R(i,j-1) - R(i-1,j-1)}{4^{j-2}-1}, i = 3,4,...; j = i, i+1,...$$

  yaklaşımları ise, kümülatif hataları $O(h^{2(j-1)})$ olan yaklaşımlardır. $R(i,j)$ yaklaşımlarına Romberg yaklaşımları adı verilir.

İspat.

Teorem 7.1 e benzer biçimde yapılabilir.

ÖRNEK 8.9. *Örnek 1 deki integral için yukarıda tanımlanan* $R(i,j), i,j = 1,2,3$ *yaklaşımlarını hesaplayınız.*

Çözüm.

- $[0,1]$ aralığında uygulanan basit yamuk kuralı olarak, $f(x) = \sqrt{1+\cos(x)^2}$ ile

  $$R(1,1) = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) = 1.275421522708890$$

  dir.

- $[0,1]$ aralığının iki alt aralığa bölünmesiyle uygulanan Yamuk kuralı olarak,

  $$h = 1/2, x_1 = 0, x_2 = 1/2, x_3 = 1$$

  değerleri ile

  $$\begin{aligned} R(2,1) &= h(\frac{1}{2}f(x_1) + f(x_2) + \frac{1}{2}f(x_3)) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}f(0) + f(1/2) + \frac{1}{2}f(1)) \\ &= 1.302945898906212 \end{aligned}$$

  dir.

- $[0,1]$ aralığının dört alt aralığa bölünmesiyle uygulanan sol dikdörtgen kuralı olarak,

  $$h = 1/4, x_1 = 0, x_2 = 1/4, x_3 = 1/2, x_4 = 3/4, x_5 = 1$$

  değerleri ile

  $$\begin{aligned} R(3,1) &= h(\frac{1}{2}f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \frac{1}{2}f(x_5)) \\ &= \frac{1}{4}(\frac{1}{2}f(0) + f(1/4) + f(1/2) + f(3/4) + \frac{1}{2}f(1)) \\ &= 1.309349142166915 \end{aligned}$$

  dir.

- $R(2,2) = \frac{4\times R(2,1)-R(1,1)}{3} = 1.312120690971986$
- $R(3,2) = \frac{4\times R(3,1)-R(2,1)}{3} = 1.311483556587149$
- $R(3,3) = \frac{16\times R(3,2)-R(2,2)}{15} = 1.311441080961493$
- Bu yaklaşımları tablo halinde sunmak daha uygundur. $j = 3$ için elde edilen yaklaşımlar Boole yaklaşımları olarak adlandırılırlar:

$\int_0^1 \sqrt{1+\cos(x)^2}dx$ için Yamuk yöntemi esaslı Romberg yaklaşımları			
	Yamuk	Simpson	Boole
i	$R(i,1)$	$R(i,2)$	$R(i,3)$
1	1.275421522708890		
2	1.302945898906212	1.312120690971986	
3	1.311441080961493	1.311483556587149	1.311441080961493

Alıştırmalar 8.5.

1. *Verilen f fonksiyonu ve $[a,b]$ aralığı için yukarıda tanımlanan Sol Dikdörtgen tabanlı* S(i, j) *yaklaşımlarını hesaplayan bir MATLAB/Octave programı hazırlayınız.*

2. *Soru 1 de hazırladığınız program yardımıyla*

$$\int_0^1 \sqrt{1+\sin(x)^2}dx$$

integraline ait aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri Sol Dikdörtgen tabanlı uygun iteratif yaklaşımlar yardımıyla doldurunuz.

Sol Dikdörtgen yöntemi esaslı iteratif yaklaşımlar tablosu			
	Sol Dikdörtgen	*Orta Nokta*	
i	$S(i,1)$	$S(i,2)$	$S(i,3)$
1	1.000000000000000		
2	—	1.108985503541832	
3	—	—	1.123917778305376

3. *Verilen f fonksiyonu ve $[a,b]$ aralığı için yukarıda tanımlanan Yamuk yöntemi tabanlı $R(i,j)$ yaklaşımlarını hesaplayan bir MATLAB/Octave programı hazırlayınız.*

4. *Soru 3 de hazırladığınız program yardımıyla soru 2 de verilen integral için aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri Yamuk yöntemi tabanlı uygun iteratif yaklaşımlar yardımıyla doldurunuz.*

Yamuk yöntemi tabanlı Romberg yaklaşımlar tablosu			
	Yamuk	*Simpson*	*Boole*
i	$R(i,1)$	$R(i,2)$	$R(i,3)$
1	1.153466414261967		
2	1.131225958901899		
3	—	1.123865126043627	1.123868636194410

5. $\int_0^1 \sin(x^3)dx$ *integraline ait aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri Sol Dikdörtgen tabanlı uygun iteratif yaklaşımlar yardımıyla doldurunuz.*

Sol Dikdörtgen tabanlı iteratif yaklaşımlar				
	Sol Dikdörtgen	*Orta Nokta*		
i	S(i, 1)	S(i, 2)	S(i, 3)	S(i, 4)
1	0			
2	0.0623	—		
3	0.1374	—	—	
4	0.1834	—	—	—

6.

$$\int_0^1 \sin(x^3)dx$$

integraline ait aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri Yamuk yöntemi esaslı uygun Romberg iteratif yaklaşımları yardımıyla doldurunuz.

Yamuk tabanlı iteratif Romberg yaklaşımları				
	Yamuk	*Simpson*	*Boole*	
i	R(i, 1)	R(i, 2)	R(i, 3)	R(i, 4)
1	0.4207			
2	0.2727	—		
3	0.2426	—	—	
4	0.2360	—	—	0.2338

7. *Yukarıdaki örneklerden hareketle* $S(i,j)$ *ve* $R(i,j)$ *yaklaşımlarını* $quadl$ *fonksiyonu yardımıyla elde edeceğiniz sayısal yaklaşımlarla karşılaştırınız. Ne gözlemliyorsunuz?*

8.

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx = 3/4$$

integrali için

$$E_{S(i,j)} = |3/4 - S(i,j)|$$

hata tablosu aşağıda verilmektedir. Hata tablosunun sütunlarını inceleyerek, h adım uzunluğu ile elde edilen bir yaklaşımın bir üst satırdaki $h/2$ adım uzunluğu ile elde edilen yaklaşımla karşılaştırınız. Elde ettiğiniz sonucu ilgili yaklaşımlar dizisinin kümülatif hatası ile karşılaştırınız.

Sol Dikdörtgen tabanlı iteratif yaklaşımlar				
	Sol Dikdörtgen	*Orta Nokta*		
i	$\lvert 3/4 - \mathrm{S}(i,1)\rvert$	$\lvert 3/4 - \mathrm{S}(i,2)\rvert$	$\lvert 3/4 - \mathrm{S}(i,3)\rvert$	$\lvert 3/4 - \mathrm{S}(i,4)\rvert$
1	0.7500			
2	0.3531	0.0437		
3	0.1669	0.0193	0.0111	
4	0.0794	0.0081	0.0044	0.0040

9. Soru 8 i aşağıda verilen $E_{R(i,j)} = |3/4 - R(i,j)|$ hata tablosu için tekrarlayınız.

Romberg yöntemi esaslı iteratif yaklaşımlar hata tablosu				
	Sol Dikdörtgen	*Orta Nokta*		
i	$\lvert 3/4 - \mathrm{R}(i,1)\rvert$	$\lvert 3/4 - \mathrm{R}(i,2)\rvert$	$\lvert 3/4 - \mathrm{R}(i,3)\rvert$	$\lvert 3/4 - \mathrm{R}(i,4)\rvert$
1	0.2500			
2	0.1031	0.0542		
3	0.0419	0.0215	0.0194	
4	0.0169	0.0086	0.0077	0.0075

10. Ortanokta yönteminin sırasıyla (8.16) ve (8.17) ile verilen yerel ve kümülatif hata ifadelerini elde ediniz.

11.

$$E_{S(4,4)}(f,h) = O(h^7)$$

ve bileşik yöntemler için ise

$$E_{S(i,4)}(f,h) = O(h^6), i = 5, 6, ...; n = 4, 6, ...$$

olduğunu gösteriniz.

12. *Romberg yaklaşımları için geliştirdiğiniz programı önceden belirlenen sayıdaki satır veya sütun adedi kadar işlem yapmak yerine,*

$$\frac{|R(i+1, j+1) - R(i,j)|}{R(i,j)} < \epsilon$$

eşitsizliği sağlanıncaya kadar tekrar edecek biçimde düzenleyiniz.

8.7 Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon

Kümülatif hatası $O(h)$ olan Sol Dikdörtgen veya Sağ Dikdörtgen yöntemini gözönüne alalım. Örneğin Sol Dikdörtgen yöntemi için

$$E_{sol}(f,h) = \frac{(b-a)^2}{2n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f'(c_i)$$

ile verilen kümülatif hatasını gözönüne alalım. Bu ifadeden kümülatif hata oluşumunda n ile belirtilen alt aralık sayısının yanısıra herbir alt aralıktaki $f'(c_i)$ değerlerinin de etkisinin olduğunu gözlemliyoruz. Özellikle birinci türevin işaret değiştirmediği ve mutlak değerce büyük olduğu bölgeler üzerinden hesaplanan integral işlemi için birinci türevin kümülatif hata üzerindeki etkisi fazla olur.

Bu nedenle birinci türevin mutlak değerce büyük değerler aldığı bölgede daha fazla düğüm noktası kabul eden ve **adaptif ağ** olarak adlandıracağımız değişken adım uzunluklu bir ağ üzerinden integrasyon işleminin gerçekleştirilmesi, kümülatif hatayı küçültecektir. Bu amaçla birinci türevin mutlak değerce büyük olduğu noktada $f(x+h) - f(x)$ sonlu farkının da mutlak değerce büyük olacağını ve bu oran yardımıyla ağ genişliğini daraltmayı hedefleyen Algoritma 8.3 aşağıda önerilmektedir:

ÖRNEK 8.10. $f(x) = 10e^{-5x}$ *fonksiyonunun yukarıdaki algoritmaya göre oluşturulan adaptif ağ üzerindeki grafiği Şekil 8.3 de sunulmaktadır.*

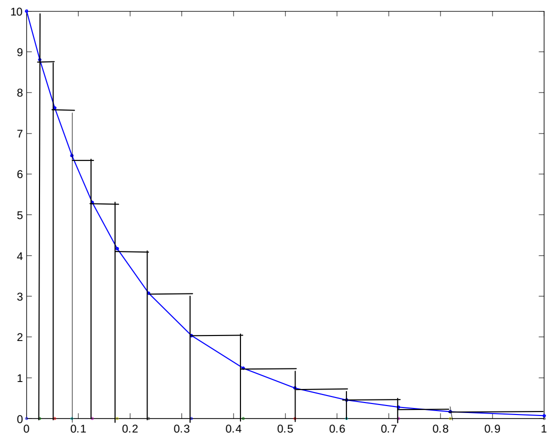
Algoritma 8.3 Adaptif ağ algoritması

1. input f, a, b, eps(ağ genişlik parametresi)
2. $X = a; x = X;$ % başlangıç değerleri
3. $eps = 0.001;$ % varsayılan ağ genişlik parametresi
4. $maxag = 0.2; minag = 0.001;$ %maksimum ve minimum ağ genişlikleri
5. $h = 0.1; h1 = h;$ % İkinci türev yaklaşım parametresi
6. $x <= (b - h1)$ olduğu sürece
   (a) $h1 = eps/|f(x + h) - f(x)|;$ %ağ genişliği
   (b) $h1 = min(h1, maxag);$ %ağ genişliği en fazla maxağ
   (c) $h1 = max(h1, minag);$ % ağ genişliği en az minağ
   (d) $x = x + h1;$ % sonraki düğüm noktası
   (e) $X = [X; x];$ % Düğüm noktasının ağa ilavesi
7. eğer $X(end) < b$ ise $X(end) = b;$ % Ağ son noktası

Fonksiyonun birinci türevinin mutlak değerce kısmen büyük olduğu $x = 0$ noktasının hemen sağında daha sık serpiştirilmiş düğüm noktalarının yer aldığına dikkat edelim.

Aşağıdaki tabloda, farklı ağ parametrelerine karşılık gelen ağlara ait ve Nd ile gösterilen sayıda düğüm noktası içeren ağ üzerinde sol dikdörtgen kuralı ile elde edilen ve $Hata(I_{sol}(adaptif\ ağ))$ ile gösterilen yaklaşım hatası sunulmaktadır. tablonun son sütununda ise aynı sayıda düğüm noktası içeren ve fakat eşit uzunluklu nokta içeren ağ üzerinde elde edilen ve $Hata(I_{sol}(düzgün\ ağ))$ ile gösterilen soldikdörtgen yaklaşım hatası farklı ağ parametreleri için sunulmaktadır.

Ağ Parametresi	*Nd*	$Hata(I_{sol}(adaptif\ ağ))$	$Hata(I_{sol}(düzgün\ ağ))$
0.1	14	0.2972	0.4065
0.05	21	0.1905	0.2587
0.02	43	0.1011	0.1206
0.01	82	0.0553	0.0619



Şekil 8.3: Adaptif ağ üzerinde f fonksiyonunun grafiği.

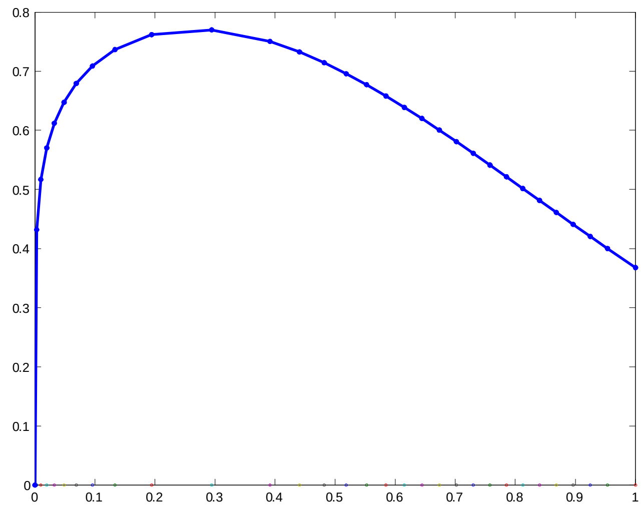
Tablodan görüleceği üzere bu örnek için farklı sayıda düğüm noktası içeren ve adaptif ağ olarak adlandırdığımız değişken uzunluluk ağ üzerinde oluşan hata, düzgün ağ üzerinde oluşan hataya kıyasla daha küçüktür.

ÖRNEK 8.11. $f(x) = \sqrt[7]{x}e^{-x^2}$ *fonksiyonunun yukarıdaki algoritmaya göre oluşturulan adaptif ağ üzerindeki grafiği Şekil 8.4 te sunulmaktadır.*

Şekilden $x = 0$ *noktası komşuluğunda fonksiyonun hızlı bir değişim gösterdiği görülmekte ve bu nokta nokşuluğundaki düğüm noktaları arasındaki uzaklığın, fonksiyon değişiminin yavaş olduğu bölgelere oranla daha küçük olduğu görülmektedir. Oluşturan ağ üzerinde farklı ağ parametrelerine karşılık gelen ağ üzerinde elde edilen yaklaşımlar aşağıdaki tabloda verilmektedir. Tablonun son sütununda ise aynı sayıda düğüm noktası ile eşit aralıklı düğüm noktaları ile oluşturulan ağ üzerindeki yaklaşımlar verilmektedir.*

$A\breve{g}$	Nd	$Hata(I_{sol}(adaptif\ a\breve{g}))$	$Hata(I_{sol}(d\ddot{u}zg\ddot{u}n\ a\breve{g}))$
0.05	11	0.0265	0.0468
0.002	31	0.0017	0.0141
0.001	60	0.0003	0.0068

Tablo sonuçlarına göre adaptif ağ üzerindeki yaklaşımlar bu örnek için de her zaman daha iyi sonuçlar vermektedir.



Şekil 8.4: Adaptif ağ üzerinde f fonksiyonunun grafiği.

Alıştırmalar 8.6.

1. f fonksiyonu ile a ve b aralık uçnoktaları ve yukarıdaki algoritmada kullanılan ağ parametresini(eps) kullanıcadan alarak bu defa birinci türev yerine ikinci türevin mutlak değerce büyük olduğu bölgelerde daha sık düğüm noktası yerleştiren bir ağ oluşturunuz. Bunun için yukarıda verilen Algoritmanın sadece 6(a) adımını değiştirmeniz yeterlidir. Oluşturduğunuz ağ üzerinde

   (a) adapint isimli alt program yardımıyla yamuk ve orta nokta yaklaşımlarını hesaplayan ve

   (b) kullanılan alt aralık sayısı yardımıyla duzyam ve duzort alt programları yardımıyla da eşit uzunluklu alt aralıklar üzerinde yamuk ve ortanokta yaklaşımlarını hesapladıktan sonra,

   (c) MATLAB/Octave sayısal integrasyon fonksiyon programı olan quadl ile elde edilen sonucu gerçek sonuç olarak kabul ederek,

   (d) herbir yöntem de oluşan hatayı hesaplatarak geri dönderen ve aşağıda ile verilen ana programın belirtilen biçimde çalışmasını sağlayacak alt programları hazırlayınız.

```
function hata=gint(f,a,b,eps)
```

```
[n,adapyamuk,adaporta]=adapint(f,a,b,eps);
duzyamuk=duzyam(f,a,b,n);
duzorta=duzort(f,a,b,n);
sayisal=quadl(f,a,b)
sonuc=[adapyamuk,duzyamuk,adaporta,duzorta];
hata=abs(sayisal-sonuc);
```

2. *Soru 1 de geliştirdiğiniz program yardımıyla, yukarıda incelenen örnekleri oluşturduğunuz yeni ağ üzerinde çalıştırınız. Adaptif ağ üzerindeki sonuçlar, düzgün ağ üzerindeki sonuçlara göre herzaman daha iyi midir?*

3. *Yukarıda verilen anaprogramı, adaptif ağ üzerinde Simpson yöntemini de gerçekleştirecek biçimde geliştiriniz. Bunun için öncelikle herhangi $c \in (a,b)$ için*
$$(a, f(a)), (c, f(c)), (b, f(b))$$
noktalarından geçen $P_2(x)$ interpolasyon polinomunun $[a,b]$ aralığı üzerindeki integralini hesaplayarak, eşit aralıklı olması gerekmeyen noktalar için Simpson kuralını elde ediniz.

4. *Yukarıda sol dikdörtgen kuralı için elde edilen sonuçları, kullanılan ağ algoritmasına göre sağ dikdörtgen kuralı için de kontrol ediniz. Benzer performansı elde ediyor musunuz?*

5. *(Proje) Birinci türevin belirlenen bir toleranstan daha fazla olduğu nontada bir sonraki düğüm noktasını yukarıda verilen algoritmaya göre hesapladıktan sonra ilgili alt aralıktaki yaklaşımı sol dikdörtgen kuralına göre hesaplayan, değilse ikinci türevdeki değişimin önceden belirlenen toleranstan büyük olması durumunda bir sonraki düğüm noktasını Soru 1 de belirleyeceğiniz algoritmaya göre hesapladıktan sonra ilgili alt aralıktaki yaklaşımı Yamuk yöntemine göre hesaplayan değişken mertebeli bir sayısal integrasyon yöntemi geliştiriniz. Geliştirdiğiniz yöntemi birinci ve ikinci türevinde hızlı değişimler gösteren örnekler üzerinde test yapınız.*

6. *(Proje) Sol dikdörtgen tabanlı $S(i,j)$ veya yamuk tabanlı $R(i,j)$ Romberg yaklaşımlarının adaptif ağ üzerine genelleştirilebilme durumlarını tartışınız.*