Başlangıç Değer Problemleri için Euler yöntemleri ve sayısal bir yöntemin hata analizi

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Ekim, 2018

Özet

Bu bölümde

- İleri ve geri Euler yöntemlerini inceleyerek,

Özet

Bu bölümde

- İleri ve geri Euler yöntemlerini inceleyerek,
- Hata analizi için gerekli olan kesme hatası, yerel hata, kümülatif hata ve kararlılık gibi kavramları tanıtıyor ve ileri Euler yöntemlerindeki karşılıklarını belirliyoruz ve ayrıca

Özet

Bu bölümde

- İleri ve geri Euler yöntemlerini inceleyerek,
- Hata analizi için gerekli olan kesme hatası, yerel hata, kümülatif hata ve kararlılık gibi kavramları tanıtıyor ve ileri Euler yöntemlerindeki karşılıklarını belirliyoruz ve ayrıca
- Komşu çözüm eğrilerinin davranışının bir sayısal yöntemin performansını nasıl etkilediğini inceliyoruz .

İleri Euler yöntemi

- $$\begin{aligned} y' &= f(t, y), t \in (a, b) \\ y(a) &= y_0 \end{aligned} \tag{1}$$

  başlangıç değer problemini göz önüne alalım. $[a, b]$ aralığını h uzunluklu n adet alt aralığa bölelim ve elde edilen aralıkların uç noktalarını

  $$t_1 = a, t_2 = a + h, \ldots, t_{n+1} = a + nh = a + n(b - a)/n = b$$

  ile gösterelim.

İleri Euler yöntemi

- $$\begin{aligned} y' &= f(t, y), t \in (a, b) \\ y(a) &= y_0 \end{aligned} \tag{1}$$

  başlangıç değer problemini göz önüne alalım. $[a, b]$ aralığını h uzunluklu n adet alt aralığa bölelim ve elde edilen aralıkların uç noktalarını

  $$t_1 = a, t_2 = a + h, \ldots, t_{n+1} = a + nh = a + n(b-a)/n = b$$

  ile gösterelim.

- $t_i, i = 2, \ldots, (n+1)$ noktalarındaki gerçek çözümünü $y(t_i)$ ile gösterelim.

İleri Euler yöntemi

- $$y\prime(t_i) = (y(t_{i+1}) - y(t_i))/h + O(h) = f(t_i, y(t_i)), h \rightarrow 0 \qquad (2)$$

İleri Euler yöntemi

- $$y\prime(t_i) = (y(t_{i+1}) - y(t_i))/h + O(h) = f(t_i, y(t_i)), h \longrightarrow 0 \qquad (2)$$
- bağıntısından yeterince küçük h adım uzunluğu için $O(h)$ terimini ihmal ederek $Y_i \cong y(t_i)$ olmak üzere

İleri Euler yöntemi

- $$\begin{aligned}(Y_{i+1} - Y_i)/h &= f(t_i, Y_i), i = 1, \ldots, n \\ Y_1 &= y(a)\end{aligned} \quad (3)$$

  ile tanımlanan ileri Euler iterasyonunu elde ederiz.

İleri Euler yöntemi

- $$\begin{aligned} (Y_{i+1} - Y_i)/h &= f(t_i, Y_i), i = 1, \dots, n \\ Y_1 &= y(a) \end{aligned} \tag{3}$$

  ile tanımlanan ileri Euler iterasyonunu elde ederiz.
- $(Y_{i+1} - Y_i)/h$ terimi diferensiyel denklemin solundaki $y'(t_i)$ için bir yaklaşım iken, $f(t_i, Y_i)$ ise $f(t_i, y(t_i))$ için bir yaklaşımdır.

İleri Euler yöntemi

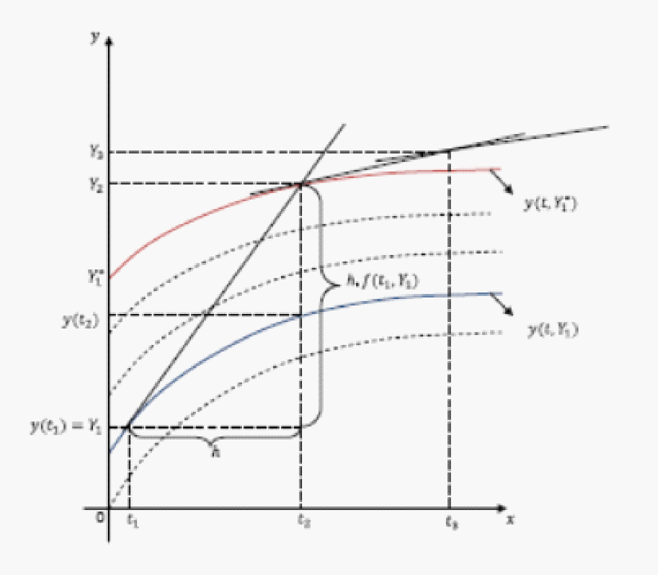
-
$$
\begin{aligned}
(Y_{i+1} - Y_i)/h &= f(t_i, Y_i), i = 1, \ldots, n \qquad (3)\\
Y_1 &= y(a)
\end{aligned}
$$

  ile tanımlanan ileri Euler iterasyonunu elde ederiz.
- $(Y_{i+1} - Y_i)/h$ terimi diferensiyel denklemin solundaki $y'(t_i)$ için bir yaklaşım iken, $f(t_i, Y_i)$ ise $f(t_i, y(t_i))$ için bir yaklaşımdır.
- (3) ile tanımlanan Euler iterasyonu hesaplamalar için daha uygun olan

$$
\begin{aligned}
Y_{i+1} &= Y_i + hf(t_i, Y_i), i = 1, 2, \ldots \qquad (4)\\
Y_1 &= y(a)
\end{aligned}
$$

  formatında yazılabilir.

İleri Euler yöntemi(Geometrik gösterim)



Örneklerle Euler Yöntemi

Örnek 1

$$
\begin{aligned}
y' &= 2t - 3y \\
y(0) &= 0.5
\end{aligned}
$$

ile verilen başlangıç değer probleminin $h = 1/5$ *adım uzunluğu ile* $[0, 1]$ *aralığındaki yaklaşık çözümlerini ileri Euler yöntemi ile belirleyiniz.*

Örnek 1 (ileri Euler)

- $h = 1/5$ için elde edilen alt aralıkların uç noktaları aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, t_2 = t_1 + h = 1/5 = 0.2, t_3 = t_2 + h = 2/5 = 0.4, \\ t_4 &= t_3 + h = 3/5 = 0.6, t_5 = t_4 + h = 4/5 = 0.8, t_6 = t_5 + h = 1 \end{aligned}$$

Örnek 1(ileri Euler)

- Bu noktalarındaki yaklaşık çözümler ise

$$Y_1 = y(t_1) = y(0) = 0.5$$

olmak üzere

Örnek 1(ileri Euler)

- Bu noktalarındaki yaklaşık çözümler ise

$$Y_1 = y(t_1) = y(0) = 0.5$$

  olmak üzere

- $$Y_2 = Y_1 + hf(t_1, Y_1) = 0.5 + 0.2 \times (2 \times 0 - 3 \times 0.5) = 0.2$$

Örnek 1(ileri Euler)

- Bu noktalarındaki yaklaşık çözümler ise

$$Y_1 = y(t_1) = y(0) = 0.5$$

  olmak üzere

- $$Y_2 = Y_1 + hf(t_1, Y_1) = 0.5 + 0.2 \times (2 \times 0 - 3 \times 0.5) = 0.2$$

- $$Y_3 = Y_2 + hf(t_2, Y_2) = 0.2 + 0.2 \times (2 \times 0.2 - 3 \times 0.2) = 0.16$$

Örnek 1(ileri Euler)

- Bu noktalarındaki yaklaşık çözümler ise

$$Y_1 = y(t_1) = y(0) = 0.5$$

olmak üzere

- $$Y_2 = Y_1 + hf(t_1, Y_1) = 0.5 + 0.2 \times (2 \times 0 - 3 \times 0.5) = 0.2$$

- $$Y_3 = Y_2 + hf(t_2, Y_2) = 0.2 + 0.2 \times (2 \times 0.2 - 3 \times 0.2) = 0.16$$

- $$Y_4 = 0.2240, \ Y_5 = 0.3296 \text{ ve } Y_6 = 0.4518$$

Örnek 1 ($E_i = y(t_i) - Y_i$ kümülatif hata):

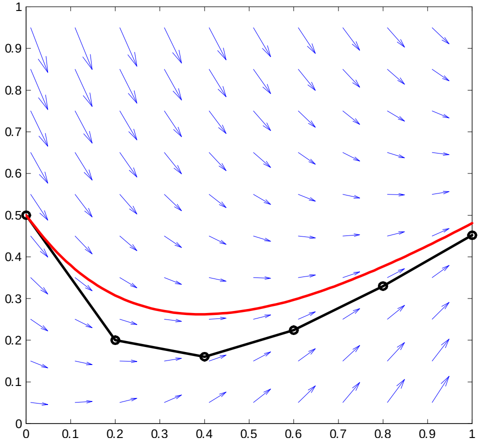
- Kümülatif hata

t_i	Y_i	$y(t_i)$	$\lvert E_i \rvert$
0	0.5	0.5	0
0.2	0.2	0.3075	0.1075
0.4	0.16	0.2620	0.1020
0.6	0.2240	0.2970	0.0732
0.8	0.3296	0.3766	0.0470
1.0	0.4518	0.4804	0.0286

Tablo 1: Örnek 1 için Euler yaklaşımları, gerçek değerler ve kümülatif hata

Örnek 1(ileri Euler)(Şekil)

- $h = 0.2$ adım uzunluğu için Euler yaklaşımları ve gerçek çözümün grafiği ile $[0,1] \times [0,1]$ bölgesindeki eğim alanlarıŞekilde verilmektedir.



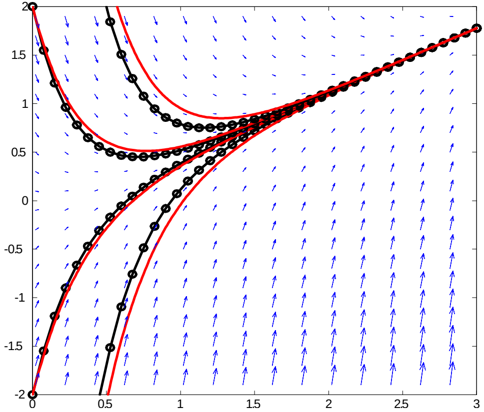
Şekil 2: $h = 0.2$ dım uzunluğu ile Euler yaklaşımları(o), gerçek çözüm(çizgi) ve yön alanları

Örnek 1(ileri Euler)(Şekil)

- Örnek 1 için OCTAVE *quiver* komutu yardımıyla elde edilen yön alanları ile bazı çözüm eğrileri ve ileri Euler yaklaşımları(o) Şekilde sunulmaktadır.

Örnek 1(ileri Euler)(Şekil)

- Örnek 1 için OCTAVE *quiver* komutu yardımıyla elde edilen yön alanları ile bazı çözüm eğrileri ve ileri Euler yaklaşımları(o) Şekilde sunulmaktadır.
- ->



Örnek 2

$$\begin{aligned} y' &= -2t + 3y \\ y(0) &= 0.5 \end{aligned}$$

ile verilen başlangıç değer probleminin $h = 1/5$ *adım uzunluğu ile* $[0, 1]$ *aralığındaki yaklaşık çözümlerini ileri Euler yöntemi ile belirleyiniz.*

Örnek 2 (ileri Euler)

- Yaklaşım tablosu aşağıda verilmektedir

Örnek 2 (ileri Euler)

- Yaklaşım tablosu aşağıda verilmektedir
- ->

t_i	Y_i	$y(t_i)$	$\|E_i\|$
0	0.5	0.5	0
0.2	0.8000	0.8617	0.0617
0.4	1.2000	1.4111	0.2111
0.6	1.7600	2.3027	0.5427
0.8	2.5760	3.8175	1.2415
1.0	3.8016	6.4682	2.6666

Tablo 2: Örnek 2 için yaklaşım tablosu

Örnek 2 (ileri Euler)

- Artan t_i değerleri için Örnek 1 in tersine bu defa $|E_i|$ hatalarının arttığına dikkat ediniz.

Örnek 2 (ileri Euler)

- Artan t_i değerleri için Örnek 1 in tersine bu defa $|E_i|$ hatalarının arttığına dikkat ediniz.
- $h = 3/40$ adım uzunlukları için Euler yalaşımları ve

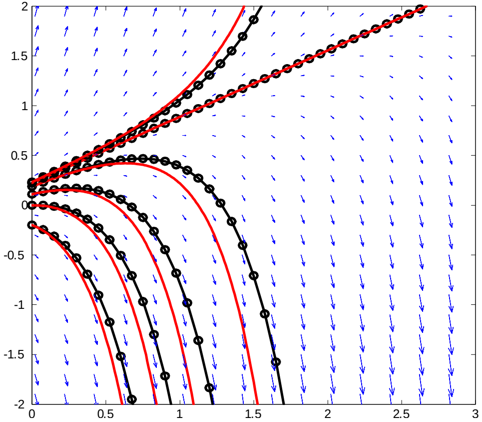
$$y = e^{3t}(y(0) - 2/9) + (2t)/3 + 2/9$$

olarak elde edilen gerçek çözümün grafiği

$$y(0) = -0.2, 0, 1/9, 1.7/9, 2/9, 2.1/9$$

başlangıç değerleri için Şekilde sunulmaktadır.

Örnek 2(ileri Euler)



Şekil 3: Örnek 2 için yön alanları, çözüm eğrileri(-) ve ileri Euler yaklaşımları

Sonuç

- Euler yöntemi gerçek çözüm yerine, her adımda (t_i, Y_i) noktasından geçen ve $y(0)$ komşuluğundan başlayan bir komşu çözüm eğrisinin eğimini rehber edinerek ilerlemektedir.

Sonuç

- Euler yöntemi gerçek çözüm yerine, her adımda (t_i, Y_i) noktasından geçen ve $y(0)$ komşuluğundan başlayan bir komşu çözüm eğrisinin eğimini rehber edinerek ilerlemektedir.
- Böylece, komşu çözüm eğrilerinin ilerleyen zaman değerleri için verilen $y(0)$ başlangıç değeri ile elde edilen çözüm eğrisinden uzaklaşması Euler yaklaşımlarında oluşan kümülatif hatanın da artmasına(Örnek 2), tersi durumda ise azalmasına(Örnek 1) neden olmaktadır.

```
function sonuc=ieuler()
%y'=f(t,y)=2t-3y
%y(a)=1/2, [a,b], h=(b-a)/n
%-------------------------------
a=0;b=1;n=10;h=(b-a)/n;
t=a;y=1/2;
Tv=t;Yv=y;
for i=1:n
 y=y+h*f(t,y);
 t=t+h;
 Yv=[Yv;y];
 Tv=[Tv;t];
end
sonuc=[Tv,Yv];
plot(Tv,Yv,'o-');
Yg=2/3*Tv-2/9+13/18*exp(-3*Tv);
hold on;
plot(Tv,Yg,'r-');
function yp=f(t,y)
yp=2*t-3*y;
```

Bir yönemin hata analizi

- ->

Bir yönemin hata analizi

- ->

Tanım 1

(Kesme hatası)(1) ile verilen başlangıç değer probleminin sayısal çözümünde, $t_i \in (a, b)$ noktasında oluşan kesme hatası, göz önüne alınan başlangıç değer probleminin $y = y(t)$ gerçek çözümünün standart biçimde ifade edilen sonlu fark yaklaşımını sağlamadığı miktar olarak tanımlanmaktadır.

- ->

Tanım 1

(Kesme hatası)(1) ile verilen başlangıç değer probleminin sayısal çözümünde, $t_i \in (a, b)$ noktasında oluşan kesme hatası, göz önüne alınan başlangıç değer probleminin $y = y(t)$ gerçek çözümünün standart biçimde ifade edilen sonlu fark yaklaşımını sağlamadığı miktar olarak tanımlanmaktadır.

- $$E_k(t_i; h) = ((y(t_i + h) - y(t_i)))/h - f(t_i, y(t_i)) = O(h), h \to 0 \tag{5}$$

Bir yönemin hata analizi(kesme hatası)

- ->

Bir yönemin hata analizi(kesme hatası)

- ->

Tanım 2

(Diferensiyel denklemle uyumlu yöntem) Adım uzunluğu sıfıra yaklaşırken, kesme hatası da sıfıra yaklaşan sayısal yönteme diferensiyel denklemle uyumlu yöntem adı verilmektedir.

Bir yönemin hata analizi(kesme hatası)

- ->

Tanım 2

(Diferensiyel denklemle uyumlu yöntem) Adım uzunluğu sıfıra yaklaşırken, kesme hatası da sıfıra yaklaşan sayısal yönteme diferensiyel denklemle uyumlu yöntem adı verilmektedir.

- (5) ile verilen kesme hatası gereğince, Euler yönteminin uyumlu bir yöntemdir.

Bir yönemin hata analizi(yerel hata)

- ->

Bir yönemin hata analizi(yerel hata)

- ->

Tanım 3

(Yerel Hata) t_i *noktasında gerçek değerin kullanıldığı kabul edilerek,* t_{i+1} *noktasındaki değer hesaplanırken oluşan hataya sayısal yöntemin yerel hatası adı verilir.*

Bir yönemin hata analizi(yerel hata)

- ->

Tanım 3

(Yerel Hata) t_i *noktasında gerçek değerin kullanıldığı kabul edilerek,* t_{i+1} *noktasındaki değer hesaplanırken oluşan hataya sayısal yöntemin yerel hatası adı verilir.*

- $$E_{yerel}(t_{i+1}, h) = y(t_{i+1}) - [y(t_i) + hf(t_i, y(t_i))] = O(h^2)h \rightarrow 0 \quad (6)$$

  olduğu t_i noktasında

  $$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy\prime(t_i) + h^2/2y''(c_i), c_i \in (t_i, t_{i+1})$$

  ile ifade edilen Taylor açılımı yardımıyla görülür.

Bir yönemin hata analizi(yerel hata)

- ->

Tanım 3

(Yerel Hata) t_i noktasında gerçek değerin kullanıldığı kabul edilerek, t_{i+1} noktasındaki değer hesaplanırken oluşan hataya sayısal yöntemin yerel hatası adı verilir.

-

$$E_{yerel}(t_{i+1}, h) = y(t_{i+1}) - [y(t_i) + hf(t_i, y(t_i))] = O(h^2)h \longrightarrow 0 \quad (6)$$

olduğu t_i noktasında

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy\prime(t_i) + h^2/2y''(c_i), c_i \in (t_i, t_{i+1})$$

ile ifade edilen Taylor açılımı yardımıyla görülür.

- $E_k(t_i; h) = E_{yerel}(t_i, h)/h$ olduğuna dikkat edelim.

Bir yönemin hata analizi(kümülatif hata)

- ->

Bir yönemin hata analizi(kümülatif hata)

- ->

Tanım 4

(Kümülatif hata) t_{i+1} *noktasındaki kümülatif hata,* t_2 *noktasından başlayarak* t_{i+1} *noktasına kadar yapılan yerel hataların toplamı olarak tanımlanır.*

Bir yönemin hata analizi(kümülatif hata)

- ->

Tanım 4

(Kümülatif hata) t_{i+1} *noktasındaki kümülatif hata,* t_2 *noktasından başlayarak* t_{i+1} *noktasına kadar yapılan yerel hataların toplamı olarak tanımlanır.*

- $$\begin{aligned} E_{küm}(t_{i+1}; h) &= Y_{i+1} - y(t_{i+1}) \\ &= \sum_{j=2}^{i+1} E_{yerel}(y, t_j, h) \\ &= h^2/2y''(c_1) + h^2/2y''(c_2) + \ldots + h^2/2y''(c_i) \\ &= h/2(t_{i+1} - t_1)(1/i) \sum_{j=1}^{i} y''(c_i) \\ &= h/2(t_{i+1} - t_1)y''(c) = O(h),\ h \to 0, c \in (a, b) \end{aligned}$$

Bir yönemin hata analizi(basamak)

- ->

Bir yönemin hata analizi(basamak)

- ->

Tanım 5

(Bir yöntemin basamağı) Kümülatif hatası $O(h^m)$ *ile verilen yönteme* $m-inci$ *basamaktan yöntem adı verilir.*

Bir yönemin hata analizi(basamak)

- ->

Tanım 5

(Bir yöntemin basamağı) Kümülatif hatası $O(h^m)$ *ile verilen yönteme* $m-inci$ *basamaktan yöntem adı verilir.*

- O halde Euler yöntemi *birinci basamaktan* bir yöntemdir.

Bir yönemin hata analizi(basamak)

- ->

Tanım 5

(Bir yöntemin basamağı) Kümülatif hatası $O(h^m)$ *ile verilen yönteme* $m-$ *inci basamaktan yöntem adı verilir.*

- O halde Euler yöntemi *birinci basamaktan* bir yöntemdir.
- Örnek 1 için $[0,1]$ aralığında $h = 1/10$ adım uzunluğu ve $y(0) = 0.5$ başlangıç değeri için oluşan kümülatif hata değerleri Tablo 3 nin beşinci sütununda yer almaktadır.

Bir yönemin hata analizi(basamak)

T	Y(Euler)	Y(Gerçek)	Yerel H.	KümH	Kes.H
0	0.5000	0.5000	0	0	0
0.1	0.3500	0.3795	0.0295	0.0295	0.2948
0.2000	0.2650	0.3075	0.0218	0.0425	0.2184
0.3000	0.2255	0.2714	0.0162	0.0459	0.1618
0.4000	0.2179	0.2620	0.0120	0.0441	0.1199
0.5000	0.2325	0.2723	0.0089	0.0398	0.0888
0.6000	0.2627	0.2972	0.0066	0.0344	0.0658
0.7000	0.3039	0.3329	0.0049	0.0290	0.0487
0.8000	0.3527	0.3766	0.0036	0.0239	0.0361
0.9000	0.4069	0.4263	0.0027	0.0194	0.0267
1.000	0.4648	0.4804	0.0020	0.0156	0.0198

Tablo 3: Örnek 1 e ait yaklaşımlar ve oluşan hatalar

```
% ileri Euler ile hata analizi
 function sonuc=eulerh(h,T)
  y=0.5;%y0
  t=0; yg=gc(t);
  yerelH=abs(yg-y); kumH=yerelH;
  kesmeH=yerelH/h;
  sonuc=[t y yg yerelH kumH kesmeH];
  while t<T
    y=y+h*f(t,y);
    yerelH=gc(t+h)-(gc(t)+h*f(t,gc(t)));
    kumH=gc(t+h)-y;
    kesmeH=yerelH/h;
    t=t+h;
    sonuc=[sonuc;t y gc(t) yerelH kumH kesmeH];
  end
  function yp=f(t,y)
     yp=2*t-3*y;
  function yp=gc(t)
     yp=2/3*t-2/9+13/18*exp(-3*t);
```

Bir yönemin hata analizi(basamak)

- Faklı h lar için $T = 2$ noktasındaki kümülatif hata Tabloda verilmektedir.

Adım Uzunluğu	Kümülatif Hata O(h)
0.1000000	0.00121393242655
0.0500000	0.00070521455823
0.0250000	0.00037764157130
0.0125000	0.00018903275714
0.0062500	0.00009912595315
0.0031250	0.00004995630144
0.0015625	0.00002497857900

Tablo 4: Adım uzunluğuna göre Kümülatif Hata

Geri Euler yöntemi

- $$\begin{aligned} y'(t_{i+1}) &= (y(t_{i+1}) - y(t_i))/h + O(h) \\ &= f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \end{aligned}$$

Geri Euler yöntemi

- $$\begin{aligned} y\prime(t_{i+1}) &= (y(t_{i+1}) - y(t_i))/h + O(h) \\ &= f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \end{aligned}$$

- veya

$$\begin{aligned} (Y_{i+1} - Y_i)/h &= f(t_{i+1}, Y_{i+1}), i = 1, \dots, n \\ Y_1 &= y(a) \end{aligned} \tag{7}$$

Geri Euler yöntemi

- $$\begin{aligned} y\prime(t_{i+1}) &= (y(t_{i+1}) - y(t_i))/h + O(h) \\ &= f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \end{aligned}$$

- veya

$$\begin{aligned} (Y_{i+1} - Y_i)/h &= f(t_{i+1}, Y_{i+1}), i = 1, \ldots, n \\ Y_1 &= y(a) \end{aligned} \tag{7}$$

- (7) iterasyonunu

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}), i = 1, \ldots, n \\ Y_1 &= y(a) \end{aligned} \tag{8}$$

olarak ta ifade edilebilir.

Örnek 3(Geri Euler yöntemi)

- ->

Örnek 3(Geri Euler yöntemi)

- ->

Örnek 3

$$\begin{aligned} y' &= 2t - 3y \\ y(0) &= 0.5 \end{aligned}$$

Başlangıç değer problemine $Y_0 = 0.5$, $h = 1/5$, $[0, 1]$ *ile geri Euler yöntemi uygulayınız.*

Örnek 3(Geri Euler yöntemi)

- $$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}) \\ &= Y_i + h(2t_{i+1} - 3Y_{i+1}) \end{aligned}$$

  veya

  $$\begin{aligned} Y_{i+1} &= (Y_i + 2ht_{i+1})/(1+3h), i = 1, 2, \ldots \\ Y_1 &= 0.5 \end{aligned}$$

  elde edilir.

Örnek 3(Geri Euler yöntemi)

- $$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}) \\ &= Y_i + h(2t_{i+1} - 3Y_{i+1}) \end{aligned}$$

  veya

  $$\begin{aligned} Y_{i+1} &= (Y_i + 2ht_{i+1})/(1+3h), i = 1, 2, \ldots \\ Y_1 &= 0.5 \end{aligned}$$

  elde edilir.

- $$\begin{aligned} t_1 &= 0, t_2 = 1/5, t_3 = 0.4, t_4 = 0.6, t_5 = 0.8, t_6 = 1 \\ Y_2 &= (Y_1 + 2ht_2)/(1+3h) \\ &= (0.5 + 2 \times 1/5 \times 1/5)/(1+3/5) = 0.3625 \end{aligned}$$

  elde edilir. Benzer biçimde

  $$Y_3 = 0.3266, Y_4 = 0.3541, Y_5 = 0.4213, Y_6 = 0.5133$$

  yaklaşımları elde edilir.

Geri Euler yöntemi(Sabit Nokta İterasyonlu)

- Nonlineer problemler için

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}), i = 1, \ldots, n \\ Y_1 &= y(a) \end{aligned} \tag{9}$$

doğrudan Y_{i+1} için çözülemez. Bu durumda her i için

Geri Euler yöntemi(Sabit Nokta İterasyonlu)

- Nonlineer problemler için

$$
\begin{aligned}
Y_{i+1} &= Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}), i = 1, \ldots, n \\
Y_1 &= y(a)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

doğrudan Y_{i+1} için çözülemez. Bu durumda her i için

- $$y^{(n+1)} = g(y^{(n)}) = Y_i + hf(t_{i+1}, y^{(n)}), n = 0, 1, 2 \tag{10}$$

iterasyonunun uygun $y^{(0)}$ (örneğin $y^{(0)} = Y_i$) ile yakınsadığı nokta Y_{i+1} olarak elde edilebilir

Geri Euler yöntemi(Sabit Nokta İterasyonlu)

- Nonlineer problemler için

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}), i = 1, \ldots, n \\ Y_1 &= y(a) \end{aligned} \tag{9}$$

  doğrudan Y_{i+1} için çözülemez. Bu durumda her i için

- $$y^{(n+1)} = g(y^{(n)}) = Y_i + hf(t_{i+1}, y^{(n)}), n = 0, 1, 2 \tag{10}$$

  iterasyonunun uygun $y^{(0)}$ (örneğin $y^{(0)} = Y_i$) ile yakınsadığı nokta Y_{i+1} olarak elde edilebilir

- Her adımda sabit nokta iterasyonu ile Y_{i+1} noktasını belirleyen program kodu aşağıda verilmektedir:

Örnek 4(Geri Euler yöntemi)

Örnek 4

$y' = 1 + y^2, y(0) = 1$ *başlangıç değer probleminin çözümü* $y(t) = \tan(t + \pi/4)$ *tür. Problemin*

$$h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625$$

adım uzunlukları ile $t = 0.5$ *noktasındaki yaklaşımlarını belirleyiniz.*

Örnek 4(Geri Euler yöntemi)

- Çözüm $[0, \pi/4)$ aralığında tanımlıdır. $h = 0.1$ için elde edilen yaklaşımlar aşağıdaki tabloda verilmektedir.

Örnek 4(Geri Euler yöntemi)

- Çözüm $[0, \pi/4)$ aralığında tanımlıdır. $h = 0.1$ için elde edilen yaklaşımlar aşağıdaki tabloda verilmektedir.

t	y	yg	hata
0	1.0000	1.0000	0
0.1000	1.2581	1.2230	0.0351
0.2000	1.6205	1.5085	0.1120
0.3000	2.2073	1.8958	0.3115
0.4000	3.6096	2.4650	1.1447
0.5000	*inf*	3.4082	*inf*

Tablo 5: Örnek 4 e ait yaklaşım tablosu

```
% Geri Euler yöntem uygulaması
%  %y'=1+y^2,y(0)=y0
%-----------------------------------
  function sonuc=geuler(n)
  a=0;b=1/2;tol=0.001;
  y0=1;
  t(1)=a;
  y(1)=y0;
  h=(b-a)/n;
  for i=1:n
    fark=1;y1=y(i);
    while fark>tol
      y2=y(i)+h*f(t(i)+h,y1);
      fark=abs(y2-y1);
      y1=y2;
    end
   y(i+1)=y2;t(i+1)=t(i)+h;
  end
```

```
yg=tan(t+pi/4);
sonuc=[t' y' yg' abs(y-yg)'];
plot(t,y,'-o','linewidth',2);hold on;
yg=tan(t+pi/4);
plot(t,yg,'.-r','linewidth',2);hold on;
function yp=f(t,y)
yp=1+y^2;

%-------------------------------------
```

Geri Euler yöntemi(Newton iterasyonuyla)

- Alternatif olarak (8) problemi

$$F(t_{i+1}, y; Y_i) = y - Y_i - hf(t_{i+1}, y) \tag{11}$$

fonksiyonunun sıfıryerini belirleme problemi olarak düşünülerek, her i için

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} - F(t_{i+1}, y^{(n)}; Y_i)/F_y(t_{i+1}, y^{(n)}; Y_i), n = 0, 1, 2, ... \tag{12}$$

ile tanımlanan Newton iterasyonu uygulanabilir.

Bir yöntemin kararlılığı

- (Bir yöntemin Kararlılığı) Tanım kümesinde keyfi olarak seçilen bir $t_n = nh = sabit$ noktasındaki kesme hatası, $h \to 0$(dolayısıyla $n \to \infty$) için sıfıra yaklaşırken, aynı noktadaki kümülatif hata da sıfıra yaklaşıyorsa, söz konusu sayısal yönteme kararlı yöntem adı verilmektedir

Bir yöntemin kararlılığı

- ->

Bir yöntemin kararlılığı

- ->

Teorem 1

(1) ile tanımlanan başlangıç değer probleminde f *ve* $\partial f/\partial y$ *kısmi türevinin* (t_1, y_1) *başlangıç noktasını içeren bir* $D = [a, b] \times [c, d]$ *dikdörtgeninde sürekli olduğunu ve ayrıca* $\partial f/\partial y$ *nin negatif olduğunu varsayalım.*

$$M = max\left\{|\partial f/\partial y|, (t, y) \in D\right\}$$

olmak üzere ileri Euler yönteminin (1) problemi için kararlı olması için yeter şart, belirtilen dikdörtgen içerisindeki yaklaşımlar için $h = (b-a)/n, n > 0$ *adım uzunluğunun* $h \leq 2/M$ *eşitsizliğini sağlanmasıdır.*

Yakınsaklık

- ->

Yakınsaklık

- ->

Tanım 6

(Bir yöntemin Yakınsaklığı) Sabit bir $t_i = ih \in [a, b]$ *noktasında* $i \to \infty$ *(ve dolayısıyla* t_i *noktasını sabit kılacak biçimde* $h \to 0$*) için* $e_i = (y(t_i) - Y_i) \to 0$ *ise sayısal yönteme* t_i *noktasında yakınsak yöntem adı verilir. Eğer yöntem* $\forall t_i \in [a, b]$ *noktasında yakınsak ise bu taktirde yönteme belirtilen aralıkta yakınsak yöntem adı verilir.*

Yakınsaklık

- ->

Tanım 6

(Bir yöntemin Yakınsaklığı) Sabit bir $t_i = ih \in [a, b]$ *noktasında* $i \to \infty$ *(ve dolayısıyla* t_i *noktasını sabit kılacak biçimde* $h \to 0$*) için* $e_i = (y(t_i) - Y_i) \to 0$ *ise sayısal yönteme* t_i *noktasında yakınsak yöntem adı verilir. Eğer yöntem* $\forall t_i \in [a, b]$ *noktasında yakınsak ise bu taktirde yönteme belirtilen aralıkta yakınsak yöntem adı verilir.*

- Not I: Uyumluluk ve Kararlılık, Yakınsaklığı gerektirir.

Yakınsaklık

- ->

Tanım 6

(Bir yöntemin Yakınsaklığı) Sabit bir $t_i = ih \in [a, b]$ *noktasında* $i \to \infty$ *(ve dolayısıyla* t_i *noktasını sabit kılacak biçimde* $h \to 0$*) için* $e_i = (y(t_i) - Y_i) \to 0$ *ise sayısal yönteme* t_i *noktasında yakınsak yöntem adı verilir. Eğer yöntem* $\forall t_i \in [a, b]$ *noktasında yakınsak ise bu taktirde yönteme belirtilen aralıkta yakınsak yöntem adı verilir.*

- Not I: Uyumluluk ve Kararlılık, Yakınsaklığı gerektirir.
- Not II: İleri Euler yöntemi, teoremde belirtilen adım uzunluğu üzerindeki kısıtlama ile yakınsak bir yöntemdir.

Önerilen kaynaklar

- Sewell, G. The numerical solution of ordinary and partial differential equations, Academic Press, 1988.

Önerilen kaynaklar

- Sewell, G. The numerical solution of ordinary and partial differential equations, Academic Press, 1988.
- Coşkun, Diferensiyel Denklemler için Sonlu Fark Yöntemleri(MATLAB/Octave Uygulamalı, Ders Notu).