Bölüm 2

# Euler Yöntemleri ve Hata Analizi

Bu bölümde başlangıç değer problemleri için

- İleri ve geri Euler yöntemlerini inceleyerek,
- Hata analizi için gerekli olan yerel kesme hatası, yerel hata, kümülatif hata ve kararlılık gibi kavramları tanıtıyor ve Euler yöntemlerindeki karşılıklarını belirliyoruz. Ayrıca
- Geri Euler yönteminin nonlineer problemlere nasıl uygulanabileceğini inceliyor ve
- Komşu çözüm eğrilerinin davranışının bir sayısal yöntemin performansını nasıl etkilediğini inceliyoruz.

## 2.1 İleri Euler yöntemi

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y), t \in (a,b) \\ y(a) &= y_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım.$[a,b]$ aralığını $h$ uzunluklu $n$ adet alt aralığa bölelim ve elde edilen aralıkların uç noktalarını

$$t_1 = a, t_2 = a+h, \ldots, t_{n+1} = a+nh = a+n(b-a)/n = b$$

ile gösterelim. (2.1) başlangıç değer probleminin $t_i, i = 2, \ldots, (n+1)$ noktalarındaki gerçek çözümünü $y(t_i)$ ile gösterelim. İleri Euler yöntemi üç farklı yöntemle türetilebilir:

1. (2.1) denklemindeki $y'(t_i)$ türevi için $O(h)$ hatası ile ileri fark yaklaşımını kullanarak

$$y\prime(t_i) = (y(t_{i+1}) - y(t_i))/h + O(h) = f(t_i, y(t_i)), h \to 0 \tag{2.2}$$

elde ederiz. Bu bağıntıdan yeterince küçük $h$ adım uzunluğu için $O(h)$ terimini ihmal ederek $Y_i \cong y(t_i)$ yaklaşımları için

$$\begin{aligned} (Y_{i+1} - Y_i)/h &= f(t_i, Y_i), i = 1, \ldots, n \\ Y_1 &= y(a) \end{aligned} \tag{2.3}$$

ile tanımlanan ileri Euler **fark denklemini** elde ederiz.

(2.3) biçiminde ifade edilen sayısal yönteme **standart biçimde yazılmış yöntem** adı verilmektedir. Standart biçimde yazılan bir sayısal yaklaşımda, yaklaşımın sol ve sağ tarafındaki terimler, sırasıyla ilgili diferensiyel denklemin sol ve sağ tarafında yer alan terimleri temsil ederler. (2.3) yaklaşımında $(Y_{i+1} - Y_i)/h$ terimi diferensiyel denklemin solundaki $y'(t_i)$ için bir yaklaşım iken, $f(t_i, Y_i)$ ise $f(t_i, y(t_i))$ için bir yaklaşımdır.

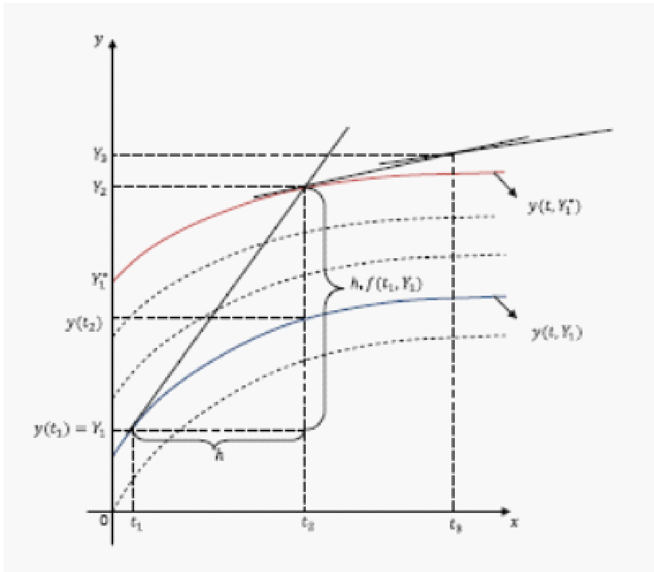
(2.3) ile tanımlanan Euler yaklaşımları, hesaplamalar için daha uygun olan

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + hf(t_i, Y_i), i = 1, 2, \ldots \\ Y_1 &= y(a) \end{aligned} \tag{2.4}$$

formatında yazılabilir.

(2.4) ile tanımlanan ileri Euler yaklaşımlarını geometrik olarak inceleyelim: Şekil 2.1 de $t_1$ noktasındaki eğimle ulaşılan $Y_2$ yaklaşımının, bu noktadan itibaren eğri boyunca değişen $f(t, y)$ eğimiyle ulaşılan $y(t_2)$ noktasından doğal olarak farklı olduğu görülmektedir.

Öte yandan $t_1$ ilk nokta olduğu için bu nokta hesaplanan eğim olan $f(t_1, Y_1)$ gerçek eğimdir. Diğer $t_i, i = 1, 2, 3, \cdots, n$ noktalarında hata oluşumuna neden olan iki faktör ise sırasıyla, çözüm eğrisinin



Şekil 2.1: $Y_2 = Y_1 + hf(t_1, Y_1)$ yaklaşımının $Y_1$değerinden elde edilişi

- $(t_i, y(t_i))$ noktasında hesaplanması gereken $y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)$ gerçek eğimi yerine, $(t_i, Y_i)$ noktasından geçen komşu çözüm eğrisine ait $f(t_i, Y_i)$ eğimine sahip olduğunun kabul edilmesi ve ayrıca
- çözüm eğrisinin $[t_i, t_{i+1}]$ aralığı boyunca $f(t_i, Y_i)$ yaklaşık eğimi ile doğrusal olarak hareket ettiğini kabul edilmesidir.

2. Yukarıda türev terimi için uygun bir yaklaşımla elde edilen ileri Euler yöntemi, integral için uygun yaklaşım yardımıyla da türetilebilir: Bunun için (2.1) in her iki yanının $[t_i, t_{i+1}]$ aralığında integralini alarak

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)dt = y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt \qquad (2.5)$$

elde ederiz. (2.5) in sağ tarafındaki integrale *sol dikdörtgen* kuralı ile yaklaşarak,

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) \cong hf(t_i, y(t_i))$$

veya $Y_i \cong y(t_i)$ için

$$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_i, Y_i), i = 1, 2, ...$$

ileri Euler yaklaşımlarını elde ederiz.

3. Son olarak ileri Euler yöntemi Taylor teoremi yardımıyla da elde edilebilir:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + O(h^2), h \to 0$$

açılımında, (2.1) den $y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$ yazarak

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) &= y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + O(h^2), h \to 0 \\ &\cong y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) \end{aligned}$$

veya $Y_i \cong y(t_i), f(t_i, y(t_i)) \cong f(t_i, Y_i)$ için yukarıdaki ilk iki yöntemle de elde edilen ve (2.4) ile verilen ileri Euler yaklaşımlarını elde ederiz.

**Gözlem 2.1.** Adım uzunluğunun yeterince küçük seçilmemesi *ve* komşu çözüm eğrilerinin benzer davranışlar göstermemeleri *durumunda ileri Euler yöntemi ile* kabul edilemeyecek büyüklükte hatalar *beklenmelidir. Çünkü adım uzunluğunun yeterince küçük seçilmemesi durumunda (2.2) de türev için ileri fark ve benzer biçimde (2.5) deki integral için sol dikdörtgen yaklaşımı iyi sonuç vermez. Komşu çözüm eğrilerinin benzer davranış göstermemesi durumunda ise*

$$f(t_i, y(t_i)) \cong f(t_i, Y_i)$$

*yaklaşımı iyi bir yaklaşım olarak değerlendirilemez(Bakınız Gözlem 2.3). Bu konu özellikle bir sonraki bölümde inceleyeceğimiz ve hassas(stiff) problem olarak adlandırılan ve komşu çözüm eğrilerinin birbirinden farklı davranış gösterdiği problemlerde daha çok göze çarpar.*

**ÖRNEK 2.1.**

$$\begin{aligned} y' &= 2t - 3y \\ y(0) &= 0.5 \end{aligned}$$

*başlangıç değer problemi verilsin.*

- *Problemin gerçek çözümünü belirleyiniz.*
- $h = 1/5$ *adım uzunluğu ile* $[0, 1]$ *aralığındaki yaklaşık çözümleri ileri Euler yöntemi ile belirleyiniz.*

- *Her noktada yaklaşık çözüm, gerçek çözüm ve hata değerlerinden oluşan yaklaşım tablosunu belirleyiniz.*
- *Gerçek çözüm ile ileri Euler yaklaşımlarını yön alanları içerisinde grafiksel olarak göstererek, yaklaşımların komşu çözüm eğrilerini nasıl takip ettiğini gözlemleyiniz.*
- *İleri Euler yöntemi yaklaşım tablosu uygun MATLAB/Octave programı yardımıyla da elde ediniz.*

**Çözüm.**

- Verilen lineer denklemin keyfi $y(0) = y_0$ başlangıç değeri için gerçek çözümünü diferensiyel denklem derslerinden

$$y = 2/3t - 2/9 + e^{-3t}(y_0 - 2/9) \tag{2.6}$$

olarak elde ederiz. $y(0) = 1/2$ için ise verilen problemin çözümünü

$$y = 2/3t - 2/9 + 13/18e^{-3t}$$

olarak elde ederiz.

**Hatırlatma 2.1.** *Örnek 2.1 de verilen lineer diferensiyel denklem gibi birçok denklemin analitik çözümü sembolik cebir programları yardımıyla elde edilebilir. Maxima ücretsiz bir sembolik cebir programıdır. Matematiksel özelliklerinin tanıtımı [**?**] de yer almaktadır. Yukarıda verilen problemin Maxima ortamında analitik çözümü aşağıda yer almaktadır:*

- $h = 1/5$ için elde edilen alt aralıkların uç noktaları aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, t_2 = t_1 + h = 1/5 = 0.2, t_3 = t_2 + h = 2/5 = 0.4, \\ t_4 &= 3/5 = 0.6, t_5 = 4/5 = 0.8, t_6 = 1. \end{aligned}$$

Bu noktalarındaki yaklaşık çözümler ise sırasıyla,

$$Y_1 = y(t_1) = y(0) = 0.5$$

olmak üzere

$$Y_2 = Y_1 + hf(t_1, Y_1) = 0.5 + 0.2 \times (2 \times 0 - 3 \times 0.5) = 0.2$$

```
(%i1) denklem:'diff(y,t)=2*t-3*y;
```

$$\text{(\%o1)}\quad \frac{d}{d\,t}\,y = 2\,t - 3\,y$$

```
(%i2) ode2(denklem,y,t);
```

$$\text{(\%o2)}\quad y = \%e^{-3\,t}\left(\frac{2\,(3\,t-1)\,\%e^{3\,t}}{9} + \%c\right)$$

```
(%i3) ic1(%o2,t=0,y=1/2);
```

$$\text{(\%o3)}\quad y = \frac{\%e^{-3\,t}\left(13 + (12\,t-4)\,\%e^{3\,t}\right)}{18}$$

```
(%i4) expand(%);
```

$$\text{(\%o4)}\quad y = \frac{13\,\%e^{-3\,t}}{18} + \frac{2\,t}{3} - \frac{2}{9}$$

$$Y_3 = Y_2 + hf(t_2, Y_2) = 0.2 + 0.2 \times (2 \times 0.2 - 3 \times 0.2) = 0.16$$

ve benzer biçimde

$$Y_4 = 0.2240, Y_5 = 0.3296 \text{ ve } Y_6 = 0.4518$$

olarak elde edilir.

- Yukarıda elde edilen yaklaşımlar ile belirtilen $t_i$ noktalarındaki gerçek çözüm ve aşağıda kümülatif hata olarak tanımlayacağımız $E_i = y(t_i) - Y_i$ hata değerleri Tablo 2.1 de verilmektedir.

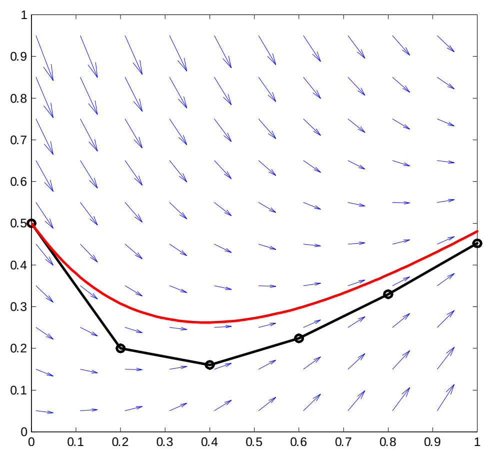
- $h = 0.2$ adım uzunluğu için Euler yaklaşımları ve gerçek çözümün grafiği ile $[0, 1] \times [0, 1]$ bölgesindeki eğim alanları Şekil 2.2 de verilmektedir.

- Örnek 2.1 verileri ile İleri Euler Yöntemi uygulaması Program 2.1(indisli versiyon) ve Program 2.2(indis kullanmayan versiyon)

  ile verilmektedir. Daha sonraki uygulamalarımızda indis kullanmayacağız.

| $t_i$ | $Y_i$ | $y(t_i)$ | $\lvert E_i\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| 0.2 | 0.2 | 0.3075 | 0.1075 |
| 0.4 | 0.16 | 0.2620 | 0.1020 |
| 0.6 | 0.2240 | 0.2970 | 0.0732 |
| 0.8 | 0.3296 | 0.3766 | 0.0470 |
| 1.0 | 0.4518 | 0.4804 | 0.0286 |

Tablo 2.1: Örnek 2.1 için Euler yaklaşımları, gerçek değerler ve kümülatif hata




Şekil 2.2: $h = 0.2$ adım uzunluğu ile Euler yaklaşımları($o$), gerçek çözüm(çizgi) ve yön alanları

Örnek 2.1 için OCTAVE *quiver* komutu yardımıyla elde edillen yön alanları ile bazı çözüm eğrileri ve ileri Euler yaklaşımları Şekil 2.3 de sunulmaktadır.

**Gözlem 2.2.** *Örnek 2.1 için farklı $y(0) = y_0$ değerleri ile elde edilen*

$$y = 2/3t - 2/9 + e^{-3t}(y_0 - 2/9)$$

*çözüm ailesini incelediğimizde, herbirinin $t \to \infty$ için $y_0 = 2/9$ özel başlangıç değeri için elde edilen $y = 2/3t - 2/9$ doğrusuna asimtot oldukları, yani $t \to \infty$ için $y' \to 2/3$ ortak eğimiyle birlikte hareket ettikleri görülmektedir. Bu durumda komşu çözüm eğrileri üzerinden hesaplanan $f(t_i, Y_i)$ eğimiyle hareket eden ileri Euler yöntemi iyi sonuç vermektedir.*

```
%--------------------------------------------------
 function euler(a,b,n,y1)
 % Örnek 2.1 verileri ile ileri Euler Yöntemi(indisli versiyon)
   h=(b-a)/n; %h: adı m uzunlugu
  T=a:h:b;Y(1)=y1;
  for i=1:n
    Y(i+1)=Y(i)+h*f(T(i),Y(i));
     end
      plot(T,Y,'*-k','linewidth',2); hold on;
   Yg=gc(T,y1);
   plot(T,Yg,'linewidth',2);
  function yp=f(t,y)
    yp=2*t-3*y;
  function yg=gc(t,y1)
    yg=exp(-3*t)*(y1+2/9)+(2*t)/3-2/9;
%---------------------------------------------------
```

Program 2.1: ileri Euler Yöntemi Uygulaması(indis kullanan versiyon)

**ÖRNEK 2.2.**

$$\begin{aligned} y' &= -2t + 3y \\ y(0) &= 0.5 \end{aligned}$$

*başlangıç değer problemi verilsin.*

- *Problemin gerçek çözümünü belirleyiniz.*
- $h = 1/5$ *adım uzunluğu ile* $[0, 1]$ *aralığındaki yaklaşık çözümleri ileri Euler yöntemi ile belirleyiniz. Her noktada yaklaşık çözüm, gerçek çözüm ve hata değerlerinden oluşan yaklaşım tablosunu belirleyiniz.*
- $h = 3/40$ *adım uzunlukları için Euler yaklaşımları ve*

  $$\mathsf{y}(0) = -0.2, 0, 1/9, 1.7/9, 2/9, 2.1/9$$

  *için gerçek çözüm grafiklerini aynı eksende grafiksel olarak göstererek, ileri Euler yaklaşımlarının komşu çözüm eğrilerini nasıl takip ettiklerini gözlemleyiniz.*

**Çözüm.**

```
%---------------------------------------------------
 function euler(a,b,n,y1)
 % Örnek 2.1 verileri ile ileri Euler Yöntemi(indis kullanmayan versiyon)
   h=(b-a)/n; %h: adı m uzunlugu
  t=a;y=y1;
  T=t1;Y=y1;
  for i=1:n
    y=y+h*f(t,y); % ileri Euler adı mı
    t=t+h;          % Güncel zaman degeri
    T=[T;t];Y=[Y;y]; %T ve Y zincirleri için yeni halka ilavesi
   end
   plot(T,Y,'*-k','linewidth',2); hold on;
   Yg=gc(T,y1);
   plot(T,Yg,'linewidth',2);
  function yp=f(t,y)
    yp=2*t-3*y;
  function yg=gc(t,y1)
    yg=exp(-3*t)*(y1+2/9)+(2*t)/3-2/9;
%----------------------------------------------------
```

Program 2.2: ileri Euler Yöntemi Uygulaması(indis kullanmayan versiyon)

- Problemin analitik çözümü

$$y = e^{3t}(y(0) - 2/9) + (2t)/3 + 2/9$$

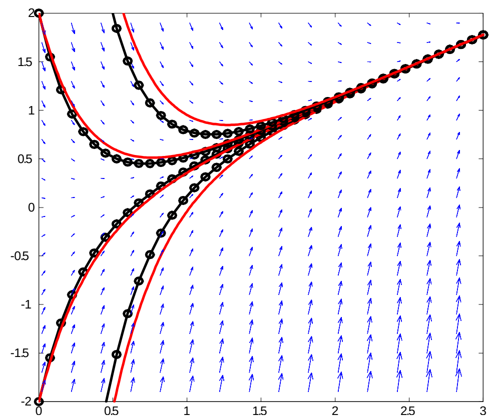
olarak elde edilir.

- $h = 1/5$ için elde edilen yaklaşım tablosu Tablo 2.2 de verilmektedir.

| $t_i$ | $Y_i$ | $y(t_i)$ | $\|E_i\|$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| 0.2 | 0.8000 | 0.8617 | 0.0617 |
| 0.4 | 1.2000 | 1.4111 | 0.2111 |
| 0.6 | 1.7600 | 2.3027 | 0.5427 |
| 0.8 | 2.5760 | 3.8175 | 1.2415 |
| 1.0 | 3.8016 | 6.4682 | 2.6666 |

Tablo 2.2: Örnek 2.2 için yaklaşım tablosu

Artan $t_i$ değerleri için Örnek 2.1 in tersine bu defa $|E_i| = |Y_i - y(t_i)|$ hatalarının arttığına dikkat ediniz.




Şekil 2.3: Örnek 2.1 için yön alanları ile bazı çözüm eğrileri(çizgi) ve ileri Euler yaklaşımları(o).

- $h = 3/40$ adım uzunlukları için Euler yaklaşımları ve

$$y = e^{3t}(y(0) - 2/9) + (2t)/3 + 2/9$$

olarak elde edilen gerçek çözümün grafiği

$$y(0) = -0.2, 0, 1/9, 1.7/9, 2/9, 2.1/9$$

başlangıç değerleri için Şekil 2.4 de verilmektedir.

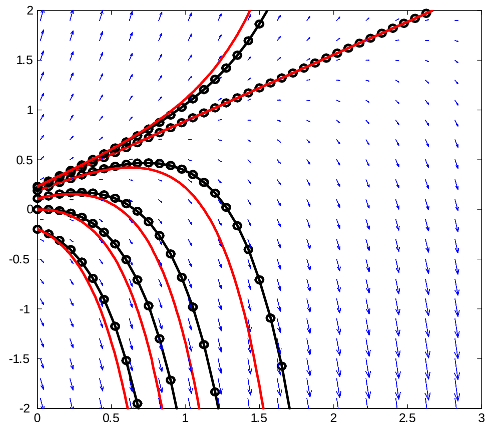
**Gözlem 2.3.** *Örnek 2.2 için farklı $y(0) = y_0$ değerleri ile elde edilen*

$$y = 2/3t - 2/9 + e^{3t}(y_0 - 2/9)$$

*çözüm ailesini incelediğimizde, herbirinin $t \to \infty$ için $y_0 = 2/9$ özel başlangıç değeri için elde edilen $y = 2/3t - 2/9$ doğrusundan uzaklaştıkları, yani $t \to \infty$ için farklı $y'$ eğimiyle birlikte hareket ettikleri görülmektedir. Bu durumda komşu çözüm eğrileri üzerinden hesaplanan $f(t_i, Y_i)$ eğimiyle hareket eden ileri Euler yöntemi iyi sonuç vermemektedir.*

## 2.2 Bir yöntemin hata analizi

Bir sayısal yöntemin verilen bir diferensiyel denklem için uygun bir yöntem olup olmadığını belirlerken *yerel kesme hatası* adı verilen bir hata ölçütü kullanılmaktadır. Benzer biçimde uygun olarak seçilen bir sayısal yöntem ile elde




Şekil 2.4: Örnek 2.2 için yön alanları, çözüm eğrileri(-) ve ileri Euler yaklaşımları

edilen yaklaşımların problemin gerçek çözüme yaklaşım düzeyini ölçerken de *yerel hata* ve *kümülatif hata* gibi birbiri ile ilgili hata ölçütleri kullanılmaktadır. Şimdi bu kavramları inceleyerek Örnek 9.1 de verilen başlangıç değer problemi için hesaplamaya çalışalım. Öncelikle yerel kesme hatasını inceleyim:

**TANIM 2.1.** *(Yerel kesme hatası) (2.1) ile verilen başlangıç değer probleminin* h $> 0$ *adım uzunluğu ile , $t_i \in (a,b)$ noktasında oluşan yerel kesme hatası, problemin $y = y(t)$ gerçek çözümünün standart biçimde ifade edilen sonlu fark yaklaşımını sağlamadığı miktar olarak tanımlanır ve $E_k(t_i;h)$ ile gösterilir.*

**ÖRNEK 2.3.** *(2.1) ile tanımlanan başlangıç değer probleminin çözümünün $[a,b]$ aralığında ikinci basamaktan türevi mevcut ve sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda ileri Euler yönteminin yerel kesme hatasının $E_k(t_i;h) = O(h), h \to 0$ olduğunu gösteriniz.*

İleri Euler yönteminin (2.3) ile verilen standardart biçiminde, $y(t)$ çözümünü yerine yazarak

$$E_k(t_i;h) = ((y(t_i+h) - y(t_i)))/h - f(t_i, y(t_i)) \tag{2.7}$$

yerel kesme hatasını elde ederiz. $t_i \in (a,b), h > 0$ için Taylor teoreminden

$$y(t_i+h) = y(t_i) + hy'(t_i) + h^2/2y''(c), c \in (t_i, t_{i+1}) \tag{2.8}$$

elde ederiz. (2.8) i (2.7) de yerine yazarak

$$\begin{aligned} E_k(t_i;h) &= ((y(t_i+h)-y(t_i)))/h - f(t_i,y(t_i)) = \quad (2.9)\\ &= h/2y''(c)\\ &= O(h), h\to 0 \quad (2.10)\end{aligned}$$

elde ederiz.

**Gözlem 2.4.** *(2.1) başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı için $f(t,y)$ fonksiyonunun başlangıç noktasını içeren bir dikdörtgende sürekli olması yeterli iken, (2.9) ile verilen hata tahmininde $y(t)$ nin ikinci basamaktan sürekli türeve sahip olması gerektiğine dikkat ediniz.*

**TANIM 2.2.** *(Diferensiyel denklemle uyumlu yöntem) Adım uzunluğu sıfıra yaklaşırken, yerel kesme hatası da sıfıra yaklaşan sayısal yönteme diferensiyel denklemle uyumlu yöntem adı verilmektedir.*

(2.9) ile verilen yerel kesme hatası gereğince, İleri Euler yöntemi uyumlu bir yöntemdir.

Yerel kesme hatası ile yakından ilişkili olan bir diğer hata kavramı ise *yerel hata*dır.

**TANIM 2.3.** *(Yerel Hata) $t_i$ noktasında gerçek $y(t_i)$ değerinin kullanıldığı kabul edilerek, $t_{i+1} = t_i + h$ noktasındaki değer hesaplanırken oluşan hataya(gerçek çözüm ve ilgili yaklaşım arasındaki farka) sayısal yöntemin $t_i$ noktasındaki yerel hatası adı verilir ve $E_{yerel}(t_i,h)$ ile gösterilir.*

Bu tanımda yerel sözcüğü, sadece tek bir adımda oluşan hata kavramını vurgulamaktadır.

**ÖRNEK 2.4.** *İleri Euler yöntemi için $E_{yerel}(t_i,h) = O(h^2), h \to 0$ olduğunu gösteriniz.*

Yukarıda verilen yerel hata tanım ve İleri Euler yönteminden

$$E_{yerel}(t_i,h) = y(t_{i+1}) - [y(t_i) + hf(t_i,y(t_i))] \quad (2.11)$$

elde ederiz.

$y(t_{i+1})$ in $t_i$ noktasındaki Taylor açılımını, yani,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy\prime(t_i) + h^2/2y''(c_i), c_i \in (t_i, t_{i+1})$$

ifadesini (2.11) de yerine yazarak

$$\begin{aligned} E_{yerel}(t_i, h) &= y(t_{i+1}) - [y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)] \\ &= h^2/2y''(c_i) \\ &= O(h^2), h \to 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

elde ederiz.

**Uyarı.** *(2.12) ifadesinde köşeli parantez içerisinde Euler yönteminde kullanılan $Y_i$ yaklaşımı yerine $y(t_i)$ gerçek değerinin kullanıldığına dikkat edelim. Dolayısıyla yerel hata hesaplanırken, $t_i$ noktasına kadar hata yapılmadığı kabul edilerek sadece $t_i$ noktasından $t_{i+1}$ noktasına geçişte tek adımda oluşan hata dikkate alınmaktadır.*

Örnek 2.1 deki başlangıç değer problemi için $h = 1/10$ ile $[0, 1]$ aralığındaki sonlu sayıda noktada oluşan ve (2.12) ile tanımlanan yerel hata Tablo 2.1 in dördüncü sütununda gösterilmektedir.

**Uyarı.** $E_{yerel}(t_i, h) = hE_k(t_i; h)$ *olduğuna dikkat edelim.*

Bir diğer hata ölçüm kavramı ise *kümülatif hata*dır:

**TANIM 2.4.** *(Kümülatif hata) $t_i$ noktasındaki kümülatif hata, $t_2$ noktasından başlayarak $t_i$ noktasına kadar yapılan yerel hataların toplamı olarak tanımlanır ve $E(t_i; h) = Y_i - y(t_i)$ ile gösterilir.*

**ÖRNEK 2.5.** *(2.1) başlangıç değer probleminin $y = y(t)$ çözümünün $[a, b]$ aralığında ikinci basamaktan türevi mevcut ve sürekli olduğunu kabul edelim, $t_i \in (a, b), h > 0$ olmak üzere İleri Euler yöntemi için $E(t_i; h) = O(h), h \to 0$ olduğunu gösteriniz.*

İleri Euler yöntemi için $t_i$ noktasında oluşan kümülatif hatayı hesaplayalım. $[t_1, t_i]$ aralığını $h = (t_i - t_1)/(i - 1)$ uzunluklu $(i - 1)$ adet alt aralığa bölelim. Kümülatif hata tanımı gereğince

$$\begin{aligned} E(t_i;h) &= Y_i - y(t_i) \\ &= \sum_{j=2}^{i} E_{yerel}(y,t_j,h) \\ &= h^2/2y''(c_2) + h^2/2y''(c_3) + \ldots + h^2/2y''(c_i) \\ &= h/2(t_i - t_1)(1/(i-1)) \sum_{j=2}^{i} y''(c_i), c_i \in (t_{i-1}, t_i) \\ &= h/2(t_i - t_1)y''(c) = O(h), h \to 0, c \in (a,b) \end{aligned}$$

elde ederiz. Yukarıdaki son eşitlikte *sürekli fonksiyonlar için ara değer teoreminden*

$$y''(c) = (1/(i-1)) \sum_{j=2}^{i} y''(c_i), c \in (a,b)$$

sağlanacak biçimde en az bir $c \in (a,b)$ noktasının var olduğu gerçeğini kullandık.

**TANIM 2.5.** *(Bir yöntemin basamağı) Kümülatif hatası $O(h^m)$ ile verilen yönteme $m-inci$ basamaktan yöntem adı verilir.*

**Gözlem 2.5.** *İleri Euler yöntemi birinci basamaktan bir yöntemdir.*

**ÖRNEK 2.6.** *Örnek 2.1 için $[0,1]$ aralığında $h = 1/10$ adım uzunluğu ve $y(0) = 0.5$ başlangıç değeri ile İleri Euler Yaklaşım Tablosunu(Sayısal yaklaşımlar, Yerel hata ve Kümülatif hata değerleri) hesaplayınız.*

**Çözüm.**

Program 2.3 ile elde edilen yaklaşımlar Tablo 2.3 de verilmiştir.

**Gözlem 2.6.** *İleri Euler yöntemi için yerel hata ve kümülatif hata terimlerinin her birinin gerçek çözümün ikinci türevi ile, yani $y''$ ile orantılı olduğu görülmektedir. Örnek 2.1 için*

$$y''(t) = 9y(0)e^{-3t}$$

```
%-----------------------------------------------
% Örnek 2.1 verileri ile  ileri Euler
% yöntemi hata analizi
%-----------------------------------------------
 function sonuc=eulerh(h,T)
  y=0.5; t=0;
  yg=gc(t);
  yerelH=abs(yg-y);
  kumH=yerelH;
  sonuc=[t y yg yerelH kumH ];
  while t<T
    y=y+h*f(t,y);
    yerelH=gc(t+h)-(gc(t)+h*f(t,gc(t)));
    kumH=gc(t+h)-y;
    t=t+h;
    sonuc=[sonuc;t y gc(t) yerelH kumH ];
  end
  function yp=f(t,y)
     yp=2*t-3*y;
  function yp=gc(t)
     yp=2/3*t-2/9+13/18*exp(-3*t);

%-------------------------------------------------
```

Program 2.3: ileri Euler ile hata Analizi

*olup bu fonksiyon $t$ nin artan değerleri için üstel olarak sıfıra yaklaşmaktadır. Bu nedenle Tablo 2.3 de belirtilen hata değerleri de benzer kalitatif davranışı göstermektedir. Ancak Örnek 2.2 için*

$$y''(t) = 9y(0)e^{3t}$$

*olup, bu fonksiyon $t$ nin artan değerleri için mutlak değerce artmaktadır. Bu durumda oluşan yaklaşım hata değerlerinin de mutlak değerce artması beklenmektedir.*

**ÖRNEK 2.7.** *Örnek 2.1 için $[0, 2]$ aralığında $h = 0.1$ adım uzunluğu ile başlayarak her defasında bir önceki adım uzunluğunun yarısını almak suretiyle ileri Euler yöntemi ile elde edilen yaklaşımların $T = 2$ noktasındaki kümülatif hata tablosunu yedi farklı $h$ değeri için elde ediniz. Elde ettiğiniz sonuçlar kümülatif hatanın $O(h), h \to 0$ olduğunu doğruluyor mu?*

**Çözüm.**

| T | Y(Euler) | Y(Gerçek) | Yerel H. | KümH |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.5000 | 0.5000 | 0 | 0 |
| 0.1 | 0.3500 | 0.3795 | 0.0295 | 0.0295 |
| 0.2000 | 0.2650 | 0.3075 | 0.0218 | 0.0425 |
| 0.3000 | 0.2255 | 0.2714 | 0.0162 | 0.0459 |
| 0.4000 | 0.2179 | 0.2620 | 0.0120 | 0.0441 |
| 0.5000 | 0.2325 | 0.2723 | 0.0089 | 0.0398 |
| 0.6000 | 0.2627 | 0.2972 | 0.0066 | 0.0344 |
| 0.7000 | 0.3039 | 0.3329 | 0.0049 | 0.0290 |
| 0.8000 | 0.3527 | 0.3766 | 0.0036 | 0.0239 |
| 0.9000 | 0.4069 | 0.4263 | 0.0027 | 0.0194 |
| 1.000 | 0.4648 | 0.4804 | 0.0020 | 0.0156 |

Tablo 2.3: Örnek 2.1 e ait yaklaşımlar ve oluşan hatalar

Kümülatif hata değerleri Tablo 2.4 de verilmektedir.

| Adım Uzunluğu | Kümülatif Hata O(h) |
|---|---|
| 0.1000000 | 0.00121393242655 |
| 0.0500000 | 0.00070521455823 |
| 0.0250000 | 0.00037764157130 |
| 0.0125000 | 0.00018903275714 |
| 0.0062500 | 0.00009912595315 |
| 0.0031250 | 0.00004995630144 |
| 0.0015625 | 0.00002497857900 |

Tablo 2.4: Adım uzunluğuna göre Kümülatif Hata

Kümülatif hatalar adım uzunluğuna bağlı olarak, bir önceki adım uzunluğuna karşılık gelen hatanın yaklaşık olarak yarısına eşit olduğu görülmektedir. Bu sonuç, sayısal verilerin de teorik olarak elde edilen $O(h)$ kümülatif hatası ile uyumlu olduğunu göstermektedir.

**ÖRNEK 2.8.**

$$y' = f(t, y) = -100y, y(0) = 1$$

*başlangıç değer problemi verilsin. Problemin gerçek çözümünün*

$$y(t) = e^{-100t}$$

*ile verildiğine ve $t \to \infty$ için $y(t) \to 0$ olduğuna dikkat ediniz. Herhangi $h > 0$ adım uzunluğu ve ileri Euler yöntemi ile elde edilen $\{Y_i\}$ dizisinin de gerçek çözümle uyumlu bir benzer davranış göstermesi, $Y_i \to 0$ ,$i \to \infty$ özelliğinin sağlanabilmesi için $h$ adım uzunluğu üzerindeki kısıtlamayı belirleyiniz.*

**Çözüm.**

Verilen problem için İleri Euler yaklaşımlarını

$$Y_{i+1} = Y_i + h(-100Y_i) = (1-100h)Y_i, i = 1, 2, ...$$

olarak tanımlayalım. Bu yaklaşımlardan

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= (1-100h)Y_i \\ &= (1-100h)^2 Y_{i-1} \\ &= ... \\ &= (1-100h)^i Y_1 \end{aligned}$$

elde ederiz. $i \to \infty$ için $Y_i \to 0$(ve dolayısıyla $Y_{i+1} \to 0$) için

$$|1-100h| < 1$$

olmalıdır. Bu son eşitsizlikten ise

$$-1 < 1 - 100h < 1$$

veya

$$-2 < -100h < 0$$

ve $h > 0$ olduğundan, $h < 1/50$ kısıtlamasının sağlanması gerektiğini görürüz.

Genelde $y' = ay, a < 0$ problemi için yukarıdaki işlemleri tekrar ederek $ah \in (-2, 0)$ elde ederiz. $(-2, 0)$ aralığına ileri Euler yönteminin **mutlak kararlılık bölgesi** adı verilir. Mutlak kararlılık bölgesi $i \to \infty$ iken sayısal yöntemle sınırlı çözümler elde edilebilmesi için adım uzunluğunun sağlaması gereken kriteri belirler. Farklı yöntemlerin mutlak kararlılık bölgeleri Bölüm 10 da incelenecektir.

Yukarıdaki örnekte ileri Euler yöntemi için elde edilen kısıtlama, uzun zaman aralıklarında pratik bazı problemlerin çözümünde aşırı hesaplama yüküne neden olmaktadır. Bu durumda daha büyük adım uzunlukları ile gerçek çözümle benzer davranış gösteren sayısal yaklaşım yöntemlerinin kulanılması zorunlu olmaktadır. Bu bağlamda akla gelen ilk yöntem aşağıda incelenen Geri Euler yöntemidir.

## 2.3 Geri Euler yöntemi

İleri Euler yöntemine benzer olarak (2.1) denklemindeki $y'$ türevi için $t_{i+1}$ noktasında $O(h)$ hatası ile bu defa geri fark yaklaşımı kullanılmak suretiyle

$$y\prime(t_{i+1}) = (y(t_{i+1}) - y(t_i))/h + O(h) \cong (Y_{i+1} - Y_i)/h = f(t_{i+1}, Y_{i+1})$$

veya

$$\begin{aligned} (Y_{i+1} - Y_i)/h &= f(t_{i+1}, Y_{i+1}), i = 1, \dots, n \\ Y_1 &= y(a) \end{aligned} \tag{2.13}$$

ile tanımlanan geri Euler fark denklemi veya iterasyonu elde edilir. 2.13 iterasyonu

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}), i = 1, \dots, n \\ Y_1 &= y(a) \end{aligned} \tag{2.14}$$

olarak da ifade edilebilir.

Ancak ileri Euler yönteminden farklı olarak, (2.14) ile tanımlanan iterasyon ile genelde $Y_{i+1}$ değerini $i - inci$ adımdaki $(t_i, Y_i)$ verileri ile elde etmek mümkün değildir. Bu tür yöntemlere kapalı yöntemler adı verilmektedir.

**ÖRNEK 2.9.** *Örnek 2.1 e ait başlangıç değer problemi için $Y_0 = 0.5$ başlangıç değeri ve $h = 1/5$ adım uzunluğu ile $[0, 1]$ aralığındaki geri Euler yaklaşımlarını belirleyiniz.*

**Çözüm.**

$$\begin{aligned} y' &= 2t - 3y \\ y(0) &= 0.5 \end{aligned}$$

Başlangıç değer problemine geri Euler yöntemi uygulanırsa,

$$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}) = Y_i + h(2t_{i+1} - 3Y_{i+1})$$

veya

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= (Y_i + 2ht_{i+1})/(1 + 3h), i = 1, 2, \dots \\ Y_1 &= 0.5 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$t_1 = 0, t_2 = 1/5, t_3 = 0.4, t_4 = 0.6, t_5 = 0.8, t_6 = 1$$

olup,

$$Y_2 = (Y_1 + 2ht_2)/(1 + 3h) = (0.5 + 2 \times 1/5 \times 1/5)/(1 + 3/5) = 0.3625$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$Y_3 = 0.3266, Y_4 = 0.3541, Y_5 = 0.4213, Y_6 = 0.5133$$

yaklaşımları elde edilir.

**ÖRNEK 2.10.** *Örnek (2.8) de verilen problemin geri Euler yöntemi ile elde edilen $\{Y_i\}$ yaklaşımlar dizisinin analitik çözümle uyumlu, yani $Y_i \to 0, i \to \infty$, olması için $h > 0$ adım uzunluğu üzerinde bir kısıtlama olmadığını gösteriniz.*

Verilen problem için geri Euler yaklaşımlarını

$$Y_{i+1} = Y_i + h(-100Y_{i+1}), i = 1, 2, ...$$

olarak tanımlayalım. Bu yaklaşımlardan

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= \frac{Y_i}{1 + 100h} \\ &= \frac{Y_{i-1}}{(1 + 100h)^2} \\ &= ... \\ &= \frac{Y_1}{(1 + 100h)^i} \end{aligned}$$

elde ederiz. $h > 0$ adım uzunluğu üzerinde hiç bir kısıtlama olmaksızın $i \to \infty$ için $Y_{i+1} \to 0$(ve dolayısıyla $Y_i \to 0$) elde ederiz.

### 2.3.1 Nonlineer Problemler için sabit nokta iterasyonuyla Geri Euler yöntemi

Verilen problemin nonlineer olması durumunda (2.14) denklemi $Y_{i+1}$ e göre çözülemez. Bu durumda $Y_{i+1}$ in belirlenme problemi $g(y) = Y_i + hf(t_{i+1}, y)$

fonksiyonunun *sabit noktasını belirleme problemi* olarak düşünülebilir ve her $i$ için

$$y_{n+1} = g(y_n) = Y_i + hf(t_{i+1}, y_n), n = 0, 1, 2 \tag{2.15}$$

iterasyonunun uygun $y_0$ (örneğin $y_0 = Y_i$) ile yakınsadığı nokta $Y_{i+1}$ olarak elde edilebilir.

Geri Euler yöntemi de ileri Euler ile aynı basamaktandır, yani kümülatif hatası $O(h)$ dır. Ancak avantajı, gerçek çözüm ile benzer davranışları gösteren çözümler için adım uzunluğunun ileri Euler yöntemine göre çok küçük seçilme zorunluluğunun olmamasıdır. Bu konu bölüm 9.4 te incelenmektedir. Her adımda sabit nokta iterasyonu ile $Y_{i+1}$ noktasını Program 2.4 ile elde edilmiştir.

```
%-------------------------------------------
% Sabit Nokta iterasyonu ile Geri Euler
% yöntemi uygulaması
% Örnek: y'=1+y^2,y(0)=1,[0,1/2]
%-------------------------------------------
function  geuler(n)
  a=0;b=1/2;y(1)=1;epsilon=0.001;
  h=(b-a)/n;
  t=a:h:b;
  for i=1:n
    fark=1;y1=y(i);
    while fark>epsilon
      y2=y(i)+h*f(t(i)+h,y1);
      fark=abs(y2-y1);
      y1=y2;
    end
   y(i+1)=y2;
  end
  yg=tan(t+pi/4);
  sonuc=[t' y' yg' abs(y-yg)'];
  plot(t,y,'-o','linewidth',2);hold on;
  plot(t,yg,'.-r','linewidth',2);hold on;
  function yp=f(t,y)
  yp=1+y^2;

%-----------------------------------------------
```

Program 2.4: Geri Euler Yöntemi Uygulaması(Sabit Nokta)

**ÖRNEK 2.11.** $y' = 1 + y^2, y(0) = 1$ *başlangıç değer probleminin çözümü*

$$y(t) = \tan(t + \pi/4)$$

*olarak elde edilir. Problemin*

$$h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625$$

*adım uzunlukları ile $t = 0.5$ noktasındaki yaklaşımlarını sabit nokta iterasyonlu Geri Euler yöntemi yardımıyla belirleyiniz. $t = 0.5$ noktasında farklı h adım uzunlukları ile kümülatif hataları hesaplayarak, yöntemin kümülatif hatasının basamağını tahmin etmeye çalışınız.*

**Çözüm.**

Verilen başlangıç değer probleminin $t = 0$ başlangıç noktasıyla çözümü $[0, \pi/4)$ aralığında tanımlıdır. $h = 0.1$ için elde edilen yaklaşımlar aşağıdaki tabloda verilmektedir. Tablodan görüleceği üzere $t = 0.5$ noktasında analitik

| t | y | yg | hata |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | 0 |
| 0.1000 | 1.2581 | 1.2230 | 0.0351 |
| 0.2000 | 1.6205 | 1.5085 | 0.1120 |
| 0.3000 | 2.2073 | 1.8958 | 0.3115 |
| 0.4000 | 3.6096 | 2.4650 | 1.1447 |
| 0.5000 | $inf$ | 3.4082 | $inf$ |

Tablo 2.5: Örnek 2.11 e ait yaklaşım tablosu

çözüm mevcut olmasına rağmen sayısal çözüm hesaplanamamıştır. Bunun nedeni $t = 0.4$ noktasında $Y_4 = 3.6096$ başlangıç değeri ile oluşturulan (2.15) iterasyonunun $t = pi/4$ noktası komşuluğundaki çok büyük eğimli komşu çözüm eğrileri dolayısıyla ıraksamış olmasıdır. Öte yandan diğer $h$ değerleri için ise $t = 0.5$ noktasında sırasıyla Tablo 2.6 de verilen yaklaşık çözüm ve hata değerlerini elde ederiz.

Bu tablodan da $h$ adım uzunluğunun ikiye bölünmesiyle kümülatif hatanın da yaklaşık olarak iki kat küçüldüğünü görüyoruz. Bu sonuç ise geri Euler yönteminin kümülatif hatasının da pratik olarak $O(h)$ olduğunu ifade eder.

Öteyandan

$$y' = 1 + y^2, y(0) = y_0$$

| h | y | yg | hata | hata oranları |
|---|---|---|---|---|
| 0.05 | 4.4179 | 3.4082 | 1.0097 | |
| 0.025 | 3.7685 | 3.4082 | 0.3603 | 1.0097/0.3603 = 2.8024 |
| 0.0125 | 3.5671 | 3.4082 | 0.1588 | 0.3603/0.1588 = 2.2689 |
| 0.00625 | 3.4827 | 3.4082 | 0.0745 | 0.1588/0.0745 = 2.1315 |

Tablo 2.6: Farklı adım uzunlukları ile $t = 0.5$ noktasındaki yaklaşımlar

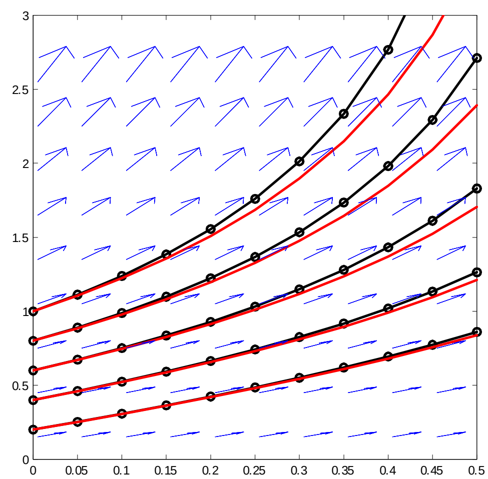
başlangıç değer probleminin çözümü

$$y = \tan(t + a\tan(y_0))$$

dır. $h = 0.05$ adım uzunluğu ve

$$y_0 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$$

başlangıç değerleri için $[0, 0.5]$ aralığında elde edilen geri Euler çözümleri ve gerçek çözüm eğrileriyle yön alanları Şekil 2.5 te verilmektedir.




Şekil 2.5: Geri Euler çözümleri, gerçek çözüm eğrileri ve yön alanları

Tablo 2.7 da $y_0 = 0.2$ ve $y_0 = 0.8$ için $y''(t)$ nin belirtilen $t$ noktalarındaki değerleri verilmektedir.

Tablo 2.7 değerleri ve Şekil 2.5 incelendiğinde $y''(t_i)$ değerlerinin büyük olduğu noktalarda kümülatif hataların da büyük olduğu gözlemlenmektedir. Bu sonuç ise pratik olarak ta kümülatif hatanın $y''(t)$ ile orantılı olduğunu ifade eder.

| $t_i$ | $y''(t_i),(y0=0.2)$ | $y''(t_i),(y0=0.8)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.42 | 2.6 |
| 0.1 | 0.67 | 3.8 |
| 0.2 | 0.99 | 5.8 |
| 0.3 | 1.406 | 9.4 |
| 0.4 | 1.99 | 16.3 |
| 0.5 | 2.852 | 32.14 |

Tablo 2.7: Örnek 2.11 için farklıbaşlangıç değerleri ile yaklaşım tablosu

### 2.3.2 Nonlineer problemler için Newton iterasyonuyla Geri Euler yöntemi

Alternatif olarak (2.14) problemi

$$F(t_{i+1}, y; Y_i) = y - Y_i - hf(t_{i+1}, y) \tag{2.16}$$

fonksiyonunun sıfıryerini belirleme problemi olarak düşünülerek, her $i$ için

$$y_{n+1} = y_n - F(t_{i+1}, y_n; Y_i)/F_y(t_{i+1}, y_n; Y_i), n = 0, 1, 2, ... \tag{2.17}$$

ile tanımlanan Newton iterasyonu uygulanabilir. Bu şekilde tanımlanan iterasyon için $y_0 = Y_i$ uygun bir seçenek olarak düşünülebilir.

Örnek 2.11 için Newton yöntemi ile Geri Euler uygulaması Program 2.5 ile gerçekleştirilmektedir.

Program 2.5 ile Geri Euler yönteminin Newton yöntemi ile birlikte gerçekleştirilen uygulamasını Örnek 2.11 için gerçekleştiriniz(Alıştırma 14).

## 2.4 Uyumluluk, Kararlılık ve Yakınsaklık

Önceki bölümde incelediğimiz hata kavramları, sonlu fark yaklaşımının ilgili diferensiyel denklemi hangi düzeyde temsil edebileceğinin birer ölçüsü idiler. Basamağı yüksek olan bir sonlu fark yaklaşımı, ilgili diferensiyel denklem için bu anlamda tercih sebebidir. Ancak hesaplamaların bilgisayar sayı sistemi üzerinde gerçekleştirilmiş olması, her aritmetik işlem sonucunda oluşması beklenen ve kesme hatası kaynaklı hataya ilaveten yuvarlama hatası adı verilen hataya neden olmaktadır(Bknz Bölüm 2). Sonlu fark yöntemlerinin bir kısmı her adımda oluşması muhtemel yuvarlama hatalarını çözüm bölgesi üzerinde kontrollü olarak biriktirirken, diğer bir kısmında söz konusu birikim ancak adım uzunluğunun belirli bir değerden küçük seçilmesi durumunda sağlanabilmektedir. En kötü ihtimalle, adım uzunluğu ne olursa olsun, yuvarlama hatalarının kontrolsüz olarak artmasına engel olunamayan ve pratik olarak kullanılamayan fark yöntemleri de mevcuttur. Bu yöntemler sırasıyla şartsız olarak sayısal kararlı, şartlı sayısal kararlı ve sayısal kararsız olarak adlandırılmaktadırlar.

Bu amaçla teknik olarak aşağıda verilen tanımıyla yöntemin sayısal olarak kararlı olması yani yuvarlama hatalarını kontrollü olarak biriktirebilmesi gerekmektedir.

**TANIM 2.6.** *(Bir yöntemin sayısal kararlılığı) Tanım kümesinde keyfi olarak seçilen bir $t_n = nh = sabit$ noktasındaki yerel kesme hatası, $h \to 0$(dolayısıyla $n \to \infty$ ) için sıfıra yaklaşırken aynı noktadaki kümülatif hata da sıfıra yaklaşıyorsa, ilgili yönteme sayısal* **kararlı yöntem** *adı verilmektedir.*

Yukarıdaki tanıma göre, seçilen sabit noktada fark denklemi diferensiyel denklemi daha iyi temsil ederken sayısal çözümle elde edilen yaklaşımların da problemin gerçek çözümüne yakınsaması arzu edilmektedir. Diğer deyimle, diferensiyel denklemle uyumlu olan yöntem sayısal olarak ta kararlı olması durumunda iyi sonuçlar üretebilmektedir.

Aşağıdaki Teorem ile İleri Euler yönteminin sayısal olarak kararlı olduğu ifade edilmektedir.

**TEOREM 2.1.** *(İleri Euler yönteminin sayısal kararlılık kriteri)(2.1) ile tanımlanan başlangıç değer probleminde $f$ fonksiyonu ve $\partial f/\partial y$ kısmi türevinin $(t_1, y_1)$ başlangıç noktasını içeren bir $D = [a, b] \times [c, d]$ dikdörtgeninde sürekli olduğunu ve ayrıca*

$$M = max\left\{|\partial f/\partial y|, (t, y) \in D\right\}$$

*olduğunu kabul edelim. İleri Euler yöntemi (2.1) problemi için sayısal kararlıdır.*

**İspat.**

$h$ adım uzunluğu ve $D$ dikdörtgeni içerisinde kalan $t_i, i = 1, 2, \cdots, n$ noktaları ile (2.1) problemi için $D$ bölgesi içerisinde kalan ve

$$Y_{i+1} = Y_i + hf(t_i, Y_i), i = 1, 2, \cdots, n \tag{2.18}$$

ile tanımlanan Euler yaklaşımlarını göz önüne alalım. $y(t)$ gerçek çözümünün her $t_i$ noktasında $E_k(t_i,h)$ ile gösterilen kesme hatası ile

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + hE_k(t_i,h) \tag{2.19}$$

bağıntısını sağladığını biliyoruz. $t_i$ noktasındaki kümülatif hatayı ise kısaca

$$e_i = y(t_i) - Y_i$$

notasyonu ile gösterelim. (2.18) yı (2.19) den taraf tarafa çıkararak,

$$e_{i+1} = e_i + h(f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, Y_i)) + hE_k(t_i,h) \tag{2.20}$$

bağıntısını elde ederiz. $f$ fonksiyonu $y$ değişkenine göre türevlenebilir ve türevi sürekli olduğundan türevler için Ortalama Değer Teoremine göre

$$f(t_i, Y_i) - f(t_i, y(t_i)) = \partial f/\partial y(c_i)e_i \tag{2.21}$$

sağlanacak biçimde $Y_i$ ve $y(t_i)$ noktaları arasında bir $c_i$ noktası mevcuttur. (2.21) bağıntısını (2.20) da yazarak

$$e_{i+1} = (1 + h\partial f/\partial y(t_i, c_i))e_i + hE_k(t_i,h)$$

elde ederiz. İleri Euler yöntemi için yerel kesme hatası tanımı gereği

$$||E_k||_\infty = max_{i(i=1,2,\ldots,n)}|E_k(t_i,h)| = max_{i(i=1,2,\ldots,n)}|\frac{h}{2}y''(c_i)| \leq Bh$$

eşitsizliğini sağlayan $B > 0$ sabiti mevcuttur. Buradan

$$|e_{i+1}| \leq (1 + hM)e_i + Bh^2, i = 1,2,...,n$$

eşitsizliği sağlanır.

$$e_1 = 0$$

olduğundan(ilk adımda $Y_1 = y(t_1)$)

$$e_2 = hE_k(t_1,h) \leq h||E_k||_\infty \leq Bh^2$$

$$
\begin{aligned}
|e_3| &\leq (1+Mh)|e_2| + Bh^2 \\
&\leq (1+Mh)Bh^2 + Bh^2 = (1+(1+Mh))Bh^2 \\
&\vdots \\
|e_{n+1}| &\leq (1+(1+Mh)+(1+Mh)^2+\cdots+(1+Mh)^{(n-1)})Bh^2 \\
&= ((1+Mh)^n - 1)/((1+Mh)-1)Bh^2 \\
&= [((1+Mh)^n - 1)/M]Bh \\
&\leq \frac{B}{M}(e^{Mhn} - 1)h \\
&= \frac{1}{M}(e^{M(t_{n+1}-t_1)} - 1)Bh \\
&= \frac{1}{M}(e^{M(b-a)} - 1)Bh
\end{aligned}
$$

Son eşitsizlik $n+1-inci$ adımdaki kümülatif hatanın, kesme hatasının üst sınırı ile sınırlandığı göstermektedir. Yukarıda son satırda $1+Mh \leq e^{Mh}$ eşitsizliğini kullandık. Bu durumda sabit $t_n = nh$ noktasında $h \to 0$(ve dolayısıyla $n \to \infty$) için kesme hatası sıfıra yaklaşırken, kümülatif hata da sıfıra yaklaşır. O halde yöntem kararlıdır.

**ÖRNEK 2.12.** *$y' = ay, a > 0, y(0) = 1$ probleminin $[0,1]$ aralığında $h > 0$ adım uzunluğu ile elde edilen ileri Euler yaklaşımları ile sağ uç noktada oluşan kümülatif hatanın $\epsilon > 0$ değerinden küçük olması için seçilebilecek en büyük $h$ adım uzunluğu ne olmalıdır?*

**Çözüm.** *$[0,1]$ aralığını $h = 1/n$ uzunluklu alt aralıklara bölelim.$t_1 = 0, t_2 = h, ..., t_{n+1} = 1$ olmak üzere yukarıdaki teoreme göre $t_{n+1} = 1$ noktasında oluşan hata,*

$$
|e_{n+1}| \leq \frac{1}{M}(e^{M(b-a)} - 1)Bh < \epsilon
$$

için

$$
h < \frac{M\epsilon}{(e^M - 1)B}
$$

elde ederiz. Örneğimiz için gerçek çözüm $y = e^{at}, y''(t) = a^2e^{at}$ ve

$$
M = a, B = \max_{0 \leq c \leq 1}(|y''(c)/2|) = a^2e^a
$$

olup,

$$h < \frac{a\epsilon}{a^2 e^a (e^a - 1)}$$

sağlanmalıdır. $a = 1$ için $h < 0.2141\epsilon, a = 2$ için $h < 0.0106\epsilon$ elde ederiz. Buradan $a$ nın artan değerleri için daha küçük adım uzunlukları kullanmamız gerektiği sonucunu elde ederiz.

**TANIM 2.7.** *(Bir yöntemin Yakınsaklığı) Sabit bir $t_i = ih \in [a, b]$ noktasında $i \to \infty$ (ve dolayısıyla $t_i$ noktasını sabit kılacak biçimde $h \to 0$) için $e_i = (y(t_i) - Y_i) \to 0$ ise sayısal yönteme $t_i$ noktasında yakınsak yöntem adı verilir. Eğer yöntem $\forall t_i \in [a, b]$ noktasında yakınsak ise bu taktirde yönteme belirtilen aralıkta yakınsak yöntem adı verilir.*

**TEOREM 2.2.** *(Lax Denklik Teoremi) Sabit katsayılı bir başlangıç değer problemi için uyumluluk ve kararlılık, yakınsaklığa denktir.*

Çünkü uyumlu bir yöntemde adım uzunluğu sıfıra yaklaşırken kesme hatasının da sıfıra yaklaştığını biliyoruz. Kararlı yöntemde ise kesme hatasının sıfıra yaklaşması hatanın sıfıra yaklaşmasını sağlamaktadır. O halde uyumlu ve kararlı bir yöntemde adım uzunluğu sıfıra yaklaşırken hata da sıfıra yaklaşmalıdır. Dolayısıyla yöntem yakınsak olmalıdır. Bu sonucun tersi de doğrudur.

**Sonuç 2.1.** *Euler yöntemi, Teorem 2.1 den kararlı bir yöntemdir. Ayrıca yöntemin uyumlu olduğunu biliyoruz. O halde yöntem yakınsaktır.*

**Sonuç 2.2.** *Geri Euler yönteminin kararlılığı Teorem 2.1 e benzer biçimde gösterilebilir(Alıştırma 15). Ayrıca yöntem uyumlu bir yöntemdir(Alıştırma 10). O halde, Lax denklik teoremi gereğince Geri Euler yöntemi de yakınsak bir yöntemdir.*

**Alıştırmalar 2.1.**

1. $y\prime = t + 3y, y(0) = 1$ *başlangıç değer problemi verilmiş olsun.*

   (a) *Problemin gerçek çözümünün*

   $$y(t) = \frac{10e^{3t}}{9} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}$$

   *ile verildiğini kontrol ediniz.*

(b) $Y_1 = y(0) = 1$ ve $h = 1/4$ adım uzunluğu ile $[0, 1]$ aralığındaki ileri Euler yaklaşımlarını hesaplayınız.

(c) $t_i = ih, i = 1, 2, \ldots, 5$ noktalarında $y(t_i)$ gerçek çözüm değerlerini hesaplayınız.

(d) $e_i = y(t_i) - Y_i, i = 1, 2, ..., 5$ kümülatif hatalarını belirleyiniz.

(e) Elde ettiğiniz sonuçları, sütunlarında sırasıyla ($t_i$,$Y_i$,$y(t_i)$ ,$e_i$) değerleri yer alan bir yaklaşım tablosuyla ifade ediniz.

2. Soru 1 (b-d) şıklarını geri Euler yöntemi için gerçekleştiriniz.

3. Soru 1 i $y\prime = t - 3y, y(0) = 1$ başlangıç değer problemi için ve ileri Euler yöntemi ile tekrarlayınız.(Gerçek çözümün

$$y(t) = \frac{10e^{-3t}}{9} + \frac{t}{3} - \frac{1}{9}$$

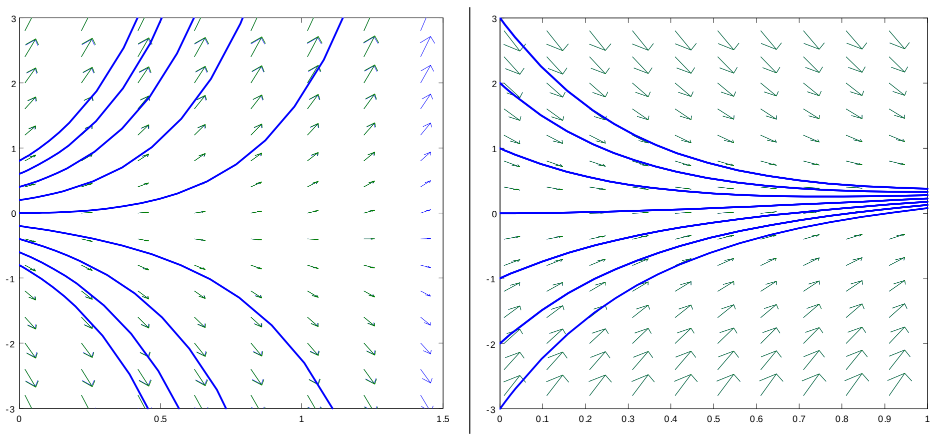
olarak verildiğini kontrol ediniz)

4. Soru 1 i $y\prime = t - 3y, y(0) = 1$ başlangıç değer problemi için ve Geri Euler yöntemi ile tekrarlayınız.

5. Soru 1 ve Soru 3 için ileri Euler yöntemi ile elde ettiğiniz kümülatif hataları karşılaştırınız. Artan $t$ değerleri için kümülatif hatalar nasıl değişiyor?

6. Soru 2 ve Soru 4 için geri Euler yöntemi ile elde ettiğiniz kümülatif hataları karşılaştırınız. Artan $t$ değerleri için kümülatif hatalar nasıl değişiyor?

7. Soru 1 ve Soru 3 te tanımlanan denklemlere ait komşu çözüm eğrileri ve yön alanları aşağıda verilmektedir. Öncelikle hangi şeklin hangi denkleme ait olduğunu belirleyerek, Soru 5 te elde ettiğiniz sonuçları, ilgili şekle ait komşu çözüm eğrileri cinsinden yorumlayınız.



8. İleri Euler yöntemi için verilen programı aşağıdaki başlangıç değer problemlerinin belirtilen aralıklarda, belirtilen adım uzunlukları ile çalıştırarak, her bir problem için yöntem yaklaşım tablosunu(Tablo 9.2) elde ediniz.

   (a) $y\prime = y(4-y), y(0) = 1, [0, 10], h = 0.1$
   (b) $y\prime = y(4-y), y(0) = 5, [0, 10], h = 0.1$
   (c) $y\prime = y(4-y), y(0) = -1, [0, 2/5], h = 0.01$
   (d) c) şıkkında verilen başlangıç değer probleminin $t^* = ln(5)/4$ noktasında sınırlı olmadığını gösteriniz.

9. (Adım uzunluğuna göre kümülatif hata) Soru 1 deki başlangıç değer problemini $h = 0.1, h = 0.05, h = 0.025$ adım uzunlukları ile ve ileri Euler yöntemiyle $[0, 2]$ aralığında çözerek, $t = 2$ noktasındaki kümülatif hatalarını karşılaştıralım. Kümülatif hatalar nasıl değişmektedir. Elde ettiğiniz sonuçlar teorik olarak elde edilen $O(h)$ hatasını doğruluyor mu?

10. Soru 9 u Geri Euler yöntemi için tekrar ediniz. Geri Euler yönteminin kümülatif hatası hakkında ne düşünüyorsunuz?

11. $y\prime = -ay, y(0) = y_1, a > 0,$ başlangıç değer problemi için $(h < 1/|a|)$ için ileri Euler iterasyonlarının $y = 0$ denge noktasına monoton yakınsak, $(1/|a| < h < 2/|a|)$ için ise salınımlı yakınsak, yani ardışık yaklaşımların denge noktasının sağında ve solunda yer aldığını gösteriniz.(Not:p, g(t) nin bir sabit noktası ve $t_1$ başlangıç noktası p ye yeterince yakın olmak üzere, $t_{i+1} = g(t_i), i = 1, 2, ...$ iterasyonu verilmiş olsun. Eğer $0 < g'(p) < 1$ ise iterasyon monoton yakınsak, $-1 < g\prime(p) < 0$ ise iterasyon salınımlı olarak yakınsaktır.)

12. $y\prime = t + y, y(0) = 1$ *başlangıç değer problemi verilmiş olsun ve ileri Euler yöntemiyle elde edilecek olan yaklaşımlar için adım uzunluğunun* $h > 0$ *olduğunu kabul edelim.*

    (a) *Problemin* y(t) *çözümünü belirleyiniz.*

    (b) $t_1 = 0, t_2 = h, t_3 = 2h,$ *olmak üzere* $t_2$ *noktasında oluşan*

    $$E_k(t_2, h) = \frac{y(t_3) - y(t_2)}{h} - f(t_2, y(t_2))$$

    *kesme hatasının* $h > 0$ *parametresine bağlı olarak*

    $$E_k(t_2, h) = he^{t_2} = O(h), h \to 0$$

    *biçiminde ifade edilebileceğini gösteriniz.*

    (c) $t_2$ *noktasında oluşan yerel hatanın*

    $$E_{yerel}(t_2, h) = hE_k(t_2, h) = O(h^2), h \to 0$$

    *olduğunu gösteriniz.*

    (d) $Y_2, Y_3$ *yaklaşımlarını* h *cinsinden belirleyiniz.*

13. *Soru 12 yi geri Euler yöntemi için tekrar ediniz.*

14. *Geri Euler Yönteminin yerel Kesme hatası, Yerel Hata ve Kümülatif hatalarını belirleyerek, ileri Euler yöntemine ait sonuçlarla karşılaştırınız.*

15. *İleri Euler yönteminin kararlılık analizini takip ederek, Geri Euler yönteminin de kararlı olduğunu ispatlayınız.*

16. *Sabit nokta iterasyonunu kullanan Geri Euler yöntemi yardımıyla Soru 8-a da verilen problemin yaklaşık çözümlerini elde ediniz.*

17. *Newton yöntemini kullanan Geri Euler yöntemi yardımıyla soru 8-a da verilen problemin yaklaşık çözümlerini elde ediniz.*

18. *Newton yöntemini kullanan Geri Euler yöntemi yardımıyla, Örnek2.11 için* $h = 0.1$,$h = h/2 = 0.05$,$h = h/4 = 0.025$ *alarak* $t = 1$ *anında oluşan kümülatif hataların nasıl değiştiğini gözlemleyiniz. Elde ettiğiniz sonuçların yöntemin tahmini kümülatif hatası ile uyumlu mudur?*

19. *Canlı nüfus modeli(Verhulst, 1838) olarak bilinen*

$$dN/dt = rN(1 - N/K), N(0) = N_0$$

*başlangıç değer problemini gözönüne alalım. Bu modelde $N(t), t$ anındaki canlı nüfusunu, $r$ nüfus artış oranını, $K$ ortamın barındırabileceği maksimum nüfusu ve $N_0$ ise başlangıç anı olarak kabul edilen $t = 0$ anındaki nüfusu temsil etmektedir. Bu model için aşağıdaki analitik ve sayısal irdelemeyi gerçekleştirelim:*

(a) *Problemin analitik çözümünün*

$$N(t) = (N_0 K e^{rt})/((K + N_0(e^{rt} - 1)))$$

*olduğunu gösteriniz.(Not: Denklemin değişkenlerine ayrılabilen bir denklem olduğuna dikkat ediniz.)*

(b) $lim_{t\to\infty} N(t) = K$ *olduğunu gösteriniz.*

(c) *İleri Euler yöntemi ile problemin (b) de belirtilen özelliği sağlayan çözümü için problem parametreleri cinsinden adım uzunluğu en fazla ne olabilir?(ipucu:* N = K *asimtotik kararlı denge noktası komşuluğunda verilen diferensiyel denkleme karşılık gelen lineer denklemi belirleyerek, Soru 11 deki analizinden faydalanınız).*

(d) $N_0 = 400, 800, 2000$ *başlangıç değerleri ve* $r = 0.5, K = 1500$ *için* $[0, 10]$ *aralığındaki çözüm eğrilerini uygun adım uzunluğu ve ileri Euler yöntemi ile elde ediniz.*

(e) $N = K$ *denge noktasının asimtotik kararlı bir denge noktası olduğunu gösteriniz.(Not: Komşu çözüm eğrileri artan zaman değerleri için* N = K *denge noktasına yakınsıyorlarsa, denge noktasına asimtotik kararlı denge noktası adı verilmektedir.* $N_0 > K$ *için* $dN/dt < 0, N_0 < K$ *için* $dN/dt > 0$ *olduğunu gösteriniz.)*

(f) *Elde ettiğiniz Euler yaklaşımları ile gerçek çözümün grafiklerini aynı eksende çizerek, çözümleri karşılaştırınız. Elde ettiğiniz çözüm eğrileri* $N = K$ *denge noktasının kararlı olmasıyla uyumlu mudur?*

20. *Proje (Sınırsız çözümleri ayıklayacak ve kümülatif hata kontrolü gerçekleştirecek biçimde Euler yöntemini geliştirelim).*

*Soru 7-c de karşılaşılan ve sonlu $t$ anında analitik çözümün sınırsız olması durumu başlangıç değer problemlerinde karşılaşılan tipik bir durumdur. Bu* *durumda önceden belirtilen ve sınırsız çözüme ulaşılan $t-$ noktasını içeren bir aralıkta sayısal çözüm belirlemeye çalışmak anlamlı değildir. O halde kullanılabilecek en küçük adım uzunluğu ile de mutlak değerce belirli bir değerden büyük bir yaklaşıma ulaşıldığında yönteme ait iterasyonlar durmalıdır. İkinci önemli bir nokta ise, genelde gerçek çözümü bilemeyeceğimiz için belirtilen aralıkta elde edilen sayısal yaklaşımın gerçek çözümü hangi düzeyde temsil edebildiğidir. Bu durumda elde edilen yaklaşımın iyi bir yaklaşım olup olmadığını kontrol eden bir mekanizma da geliştirilmelidir. Aşağıdaki adımlar yukarıda belirtilen hususları dikkate alarak ileri Euler yönteminin daha esnek bir versiyonunu geliştirmek için ipuçları olarak kabul edilebilir. Bu ipuçları doğrultusunda uygun bir algoritma ve algoritmaya ait program geliştiriniz. Geliştirdiğiniz program ile Soru* 8 − c *yi çözmeye çalışınız.*

(a) *Tahmini olarak seçilen bir başlangıç* h *adım uzunluğu ile elde ettiğiniz değerler mutlak değerce belirtilen $Y_{\max}$ (örneğin* 1x10$^4$) *değerinden küçük kaldığı sürece yöntemi aralık sağ uç noktasına ulaşana kadar uygulayınız.*

(b) *Eğer sağ uç noktaya ulaşmadan değerleriniz mutlak değerce $Y_{\max}$ a ulaşmış ise,* h *adım uzunluğunu küçülterek(örneğin* h *yerine* h/2 *alarak) iterasyon işlemini tekrar ediniz. Bu işlemi sağ uç noktaya kadar tekrar ediniz. Eğer önceden belirlediğiniz en küçük* h(*örneğin* 1x10$^{-4}$) *değeri ile de sağ uç noktaya kadar ulaşamadıysanız, sınırlı çözüm olarak elde ettiğiniz yaklaşımları grafiksel olarak kullanıcıya sununuz.*

(c) *Sağ uç noktaya ulaşmanız durumunda, önceki adımla sağ uç nokta için elde ettiğiniz yaklaşım değeri ile yeni adım uzunluğu ile elde ettiğiniz yaklaşım değeri arasındaki fark mutlak değerce uygun bir biçimde belirleyeceğiniz $fark$(örneğin* 1x10$^{-4}$) *sabiti'nden küçük kalıyorsa işlemi doğru adım uzunluğu ile gerçekleştirilmiştir. Tanım kümesinde farklı adım uzunlukları ile elde ettiğiniz sonuçları grafiksel olarak kullanıcıya sununuz.*

(d) *Değilse adım uzunluğunu tekrar küçülterek gerekirse kabul edilebilir en küçük* h *adım uzunluğu ile de işleme devam ediniz.*

```
%---------------------------------------------------
% Newton iterasyonu ile Geri Euler Uygulaması
% Örnek: y'=1+y^2,y(0)=y0
%---------------------------------------------------
function sonuc=geulernewt(n)
...(baslangic degerler ve sabitler)
for i=1:n
 test=1;y1=y(i);sayac=0;
 while test
   y2=y1-F(t+h,y1,y(i))/Fy(t+h,y1,y(i));
   fark=abs(y2-y1);
   y1=y2;
   sayac=sayac+1;
   test=(fark>tol)&(sayac<Max_sayac);
   if sayac==Max_sayac
       error('iraksak iterasyon');
   end
  end
 y(i+1)=y2;t(i+1)=t(i)+h;
end
...(gerçek çözüm, hata ve grafik çizimleri)
function yp=f(t,y)
  yp=1+y^2;
function yp=fy(t,y)
  yp=2*y;
function yp=F(t,y,yi)
  yp=y-yi-h*f(t+h,y);
function yp=Fy(t,y,yi)
  yp=1-h*fy(t+h,y);

%----------------------------------------------------
```

Program 2.5: Geri Euler Yöntemi Uygulaması(Newton)