

Bölüm 3

Yüksek basamaktan tek adım Sonlu Fark Yöntemleri

Bu bölümde, birinci basamaktan başlangıç değer problemleri için

- Tek adım (Yamuk, Düzeltilmiş Euler(Heun), Runge-Kutta yöntemlerinin
 - nasıl elde edildikleri,
 - pratik problemlere nasıl uygulandıkları,
 - hata analizleri ve diğer yöntemlere göre avantaj ve dezavantajlarını kapsamlı olarak inceliyoruz.
- Mevcut kaynaklardan farklı olarak, verilen probleme ait yön alanları içerisinde sayısal çözümleri değerlendirerek, yöntemlerin performansını komşu çözüm eğrilerinin davranışlarını dikkate almak suretiyle inceliyoruz.

3.1 Yamuk yöntemi

$$\begin{aligned}y' &= f(t, y), t \in (a, b) \\ y(a) &= y_1\end{aligned}\tag{3.1}$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. $[a, b]$ aralığını $h = (b - a)/n$ uzunluklu n adet alt aralığa bölelim ve elde edilen aralıkların uç noktalarını

$$t_1 = a, t_2 = a + h, \dots, t_{n+1} = a + nh = a + n(b - a)/n = b$$

ile gösterelim. (3.1) ile verilen denklemin $[t_i, t_{i+1}]$ aralığında integralini alarak

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(s) ds = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, y(s)) ds$$

veya

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, y(s)) ds \quad (3.2)$$

integral denklemini elde ederiz. (3.2) deki integral için farklı sayısal integrasyon yaklaşımları farklı yöntemleri üretir:

Kural	$\int_a^b f(x) dx$	(3.2) için yaklaşım
Sol dikdörtgen	$f(a)(b - a)$	$y(t_{i+1}) \cong y(t_i) + hf(t_i, y(t_i))$
Sağ dikdörtgen	$f(b)(b - a)$	$y(t_{i+1}) \cong y(t_i) + hf(t_{i+1}, y(t_{i+1}))$
Yamuk	$\frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))$	$y(t_{i+1}) \cong y(t_i) + \frac{h}{2}(f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1})))$

Tablodaki eşitliği sağlayan yaklaşımları $Y_{i+1} \cong y(t_{i+1})$ ve $Y_i \cong y(t_i)$ ile gösterelim. Böylece integral için sol dikdörtgen yaklaşımının ileri Euler, sağ dikdörtgen yaklaşımının geri Euler yöntemlerini ürettiğini görürüz. Yamuk yaklaşımı ile ise

$$Y_{i+1} = Y_i + h/2[f(t_i, Y_i) + f(t_{i+1}, Y_{i+1})], Y_1 = y(a), i = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

ile tanımlanan Yamuk iterasyonunu elde ederiz.

Geometrik olarak yönteme baktığımızda ise ileri Euler yöntemindeki $f(t_i, Y_i)$ eğimi ve geri Euler yöntemindeki $f(t_{i+1}, Y_{i+1})$ eğimi ile hareket etmek yerine, bu iki eğimin ortalaması olan

$$m = [f(t_i, Y_i) + f(t_{i+1}, Y_{i+1})]/2 \quad (3.4)$$

eğimi esas alınmakta ve bu eğimle h adım uzunluğu kadar ilerleyerek Y_{i+1} yaklaşımının elde edildiğini gözlemleriz.

ÖRNEK 3.1.

$$\begin{aligned}y' &= y + t \\y(0) &= 0\end{aligned}$$

başlangıç değer problemi için $[0, 1]$ aralığında $h = 1/4$ adım uzunluğu ile ilgili yaklaşımları Yamuk yöntemi ile hesaplayınız.

Çözüm.

(3.3) fark denklemini $f(t, y) = y + t$ için uygulayarak

$$Y_{i+1} = Y_i + h/2(t_i + Y_i + t_{i+1} + Y_{i+1})$$

veya

$$Y_{i+1} = [(1 + h/2)Y_i + (t_i + t_{i+1})h/2]/(1 - h/2)$$

elde ederiz. $h = 1/4$ için

$$t_1 = 0, t_2 = 1/4, t_3 = 1/2, t_4 = 3/4, t_5 = 1$$

ve $Y_1 = y(0) = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}Y_2 &= [(1 + (1/4)/2) \times 0 + (0 + 1/4) \times 1/8]/(1 - (1/4)/2) \\&= \frac{1}{28}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y_3 &= [(1 + (1/4)/2) \times \frac{1}{28} + (1/4 + 1/2) \times 1/8]/(1 - (1/4)/2) \\&= \frac{15}{98}\end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer biçimde diğer yaklaşımları $Y_4 = 0.37536$, $Y_5 = 0.73261$ olarak elde ederiz. Ayrıca gerçek çözümün de

$$y(t) = -t - 1 + e^t$$

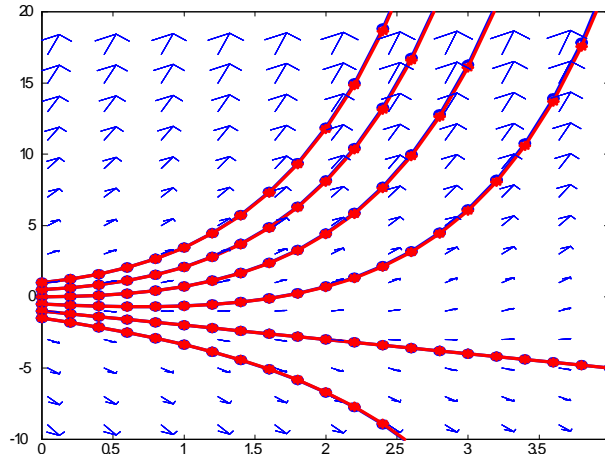
olduğuna dikkat ederek

$$|E(t_i)| = |Y_i - y(t_i)|$$

kümülatif hatalarını hesaplayabiliriz. Yamuk yaklaşımları ve kümülatif hatalar Tablo 3.1 de sunulmaktadır.

i	t_i	Y_i	$ E(t_i) $
1	0	0	0
2	0.2500	1/28	0.00169
3	0.5000	0.15306	0.00434
4	0.7500	0.37536	0.00836
5	1.0000	0.73261	0.01433

Tablo 3.1: Örnek 3.1 e ait yaklaşımlar ve kümülatif hata



Şekil 3.1: Örnek 3.1 e ait çözüm eğrileri ve gerçek çözüm(o)

Uyarı. Komşu çözüm eğrilerinin davranışı ve sayısal yaklaşımların hassasiyeti arasında bir ilişki söz konusudur. Örnek 3.1 e ait $y_0 = -1.5 : 0.5 : 1$ başlangıç değerleri için çözüm eğrileri ($-*$) ve $h = 0.2$ adım uzunluğu ile $[0, 4]$ aralığındaki yaklaşık çözümler ($-o$) Şekil 3.1 de verilmiştir. Artan t değerleri için çözüm eğrileri birbirinden uzaklaşmaktadır. Bu durumda artan t değerleri için kümülatif hatanın artmış olması beklenen bir sonuçtur. Çünkü yöntem komşu çözüm eğrilerinin eğimi ile hareket etmektedir.

TEOREM 3.1. (Yamuk yönteminin yerel kesme hatası)

$y \in C^3[a, b]$, $t_i, t_{i+1} = (t_i + h) \in (a, b)$ olmak üzere (3.3) ile verilen Yamuk yöntemin t_i noktasındaki kesme hatası, yani gerçek çözümün standart halde yazılan fark denklemini sağlamadığı miktar,

$$\begin{aligned} E_k(t_i, h) &= [y(t_{i+1}) - y(t_i)]/h - 1/2[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))] \\ &= -h^3/12y'''(c), c \in (a, b) \end{aligned}$$

dir.

İspat.

Taylor açılımı yardımıyla

$$f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) = y'(t_{i+1}) = y'(t_i) + hy''(t_i) + h^2/2y'''(c_1), c_1 \in (t_i, t_{i+1})$$

ve

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + h^2/2y''(t_i) + h^3/6y'''(c_2)$$

açılımları yerine yazılarak

$$\begin{aligned} E_k(t_i, h) &= (y(t_{i+1}) - y(t_i))/h - 1/2(f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))) \\ &= (y(t_i) + hy'(t_i) + h^2/2y''(t_i) + h^3/6y'''(c_1) - y(t_i))/h \\ &\quad - y'(t_i) - h/2y''(t_i) - h^2/4y'''(c_2) \\ &= h^2/6y'''(c_1) - h^2/4y'''(c_2) \\ &= h^2(1/6y'''(c_1) - 1/4y'''(c_2)) \\ &\doteq -\frac{1}{12}h^2y'''(c), c \in (t_i, t_{i+1}) \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde yamuk yönteminin kesme hatası $O(h^2)$, $h \rightarrow 0$ dir. Buradan yerel hatanın $O(h^3)$ ve kümülatif hatanın ise $O(h^2)$, $h \rightarrow 0$ olduğu hemen görülür. O halde yöntem *ikinci basamaktadır*.

3.1.1 Yöntemin nonlinear problemlere uygulanışı

(3.3) ile verilen kapalı fark denklemleri ile ilgili Y_i yaklaşımlarını elde edebilmek için her adımda genelde ilgili nonlinear denklemin çözümü belirlenmelidir. Bunun için değişik pratik yöntemler söz konusudur. Örneğin

$$Y_{i+1}^{(k+1)} = Y_i + h/2[f(t_i, Y_i) + f(t_{i+1}, Y_{i+1}^{(k)})], k = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

ile tanımlanan iterasyonun birkaç kez uygulanarak her adımda Y_{i+1} yaklaşımının belirlenmesi mümkündür. $Y_{i+1}(0)$ başlangıç değeri için uygun bir

seçim bir önceki noktada elde edilen yaklaşım, yani Y_i dir. Sonuçlandırma kriteri olarak uygun bir $\epsilon > 0$ sabiti için $|Y_{i+1}^{(k+1)} - Y_{i+1}^{(k)}| < \epsilon$ eşitsizliği kontrol edilebilir. (3.5) iterasyonunun yakınsaması için h adım uzunluğunun uygun biçimde seçilmesi gerekir.

ÖRNEK 3.2.

$$y' = y^2 \cos(t), y(0) = -7/8, 7/8$$

başlangıç değer probleminin belirtilen başlangıç değerleri ile çözüm eğrilerini Yamuk yöntemi ile elde ediniz. Denklemin $[0, 10]$ aralığında yön alanlarını ve aynı başlangıç değerleri için gerçek çözüm eğrilerini elde ediniz.

Çözüm.

Verilen problemin analitik çözümü

$$y = -\frac{1}{\sin t - 1/y(0)}$$

olarak ifade edilebilir. $[0, 10] \times [-8, 8]$ bölgesindeki yön alanları içerisinde belirtilen başlangıç değerleri ve Yamuk yöntemi ile elde edilen çözüm eğrileri(-) ve analitik çözüm eğrileri(-) Şekil 3.2 de sunulmaktadır.

Sayısal çözümler Program 3.1 ile elde edilmiştir. Analitik ve sayısal çözümlerin uyumlu olduğu görülmektedir.

ÖRNEK 3.3. (Yamuk yöntemi pratik olarak II. basamaktadır)

$$y' = y + \cos(t) - \sin(t), y(0) = 0$$

başlangıç değer problemi verilsin. $[0, 2]$ aralığında $h = 0.2$ ve $h = 0.1$ adım uzunlukları için yaklaşık çözümleri Yamuk yöntemi yardımıyla elde ediniz. Kümülatif hatanın $O(h^2)$ olduğunu gözlemleyiniz. Artan t değerleri için kümülatif hatanın değişimini grafiksel olarak gözlemleyiniz.

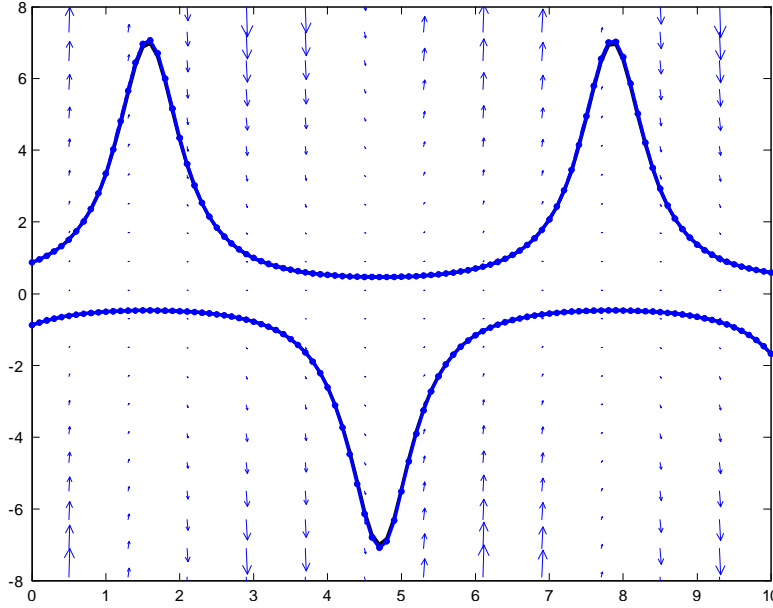
Çözüm.

(3.3) yöntemine göre

$$Y_{i+1} = Y_i + h/2(Y_i + Y_{i+1} + \cos(t_i) - \sin(t_i) + \cos(t_{i+1}) - \sin(t_{i+1}))$$

iterasyonu elde ederiz. Bu denklem Y_{i+1} e göre çözerek

$$Y_{i+1} = (Y_i + h/2(Y_i + \cos(t_i) - \sin(t_i) + \cos(t_{i+1}) - \sin(t_{i+1}))) / (1 - h/2) \quad (3.6)$$



Şekil 3.2: Örnek 3.2 için yön alanları ile sayısal(-.) ve gerçek çözüm(-) eğrileri.

elde ederiz. (3.6) ile $h = 0.2$ ve $h = 0.1$ adım uzunlukları ile elde edilen yaklaşımlar Tablo 3.2 de verilmektedir.

$h = 0.1$ adım uzunluğu ile elde edilen kümülatif hataların $h = 0.2$ adım uzunluğu ile elde edilen hataların yaklaşık dörtte biri kadar olduğuna dikkat edelim:

$$\begin{aligned} 0.0146/4 &= 0.0037 \cong 0.0036, \\ 0.01/4 &= 0.0025, \\ 0.0065/4 &\cong 0.016. \end{aligned}$$

Bu sonuç yukarıda ifade edildiği üzere kümülatif hatanın $O(h^2)$ olduğunu doğrulamaktadır. Yani adım uzunluğu ikiye bölünmek suretiyle kümülatif hata yaklaşık olarak dört kat azalmaktadır.

Öte yandan $h = 0.1$ için elde edilen gerçek çözüm(o) ve yaklaşık çözüm(*) ise Şekil 3.3 de verilmektedir.

Şekil 3.3 den artan t değerleri için istenilen gerçek çözümden($y = \sin(t)$) uzaklaşan komşu çözüm eğrilerinin, yöntem ile elde edilen yaklaşımları da olumsuz olarak etkilediği görülmektedir.

```

%-----
% Örnek 3.2 verileri ile Sabit nokta
% iterasyonlu Yamuk Yontemi
% sonuc=yamuksabit(h,Tmax)
%-----

function yamuksabit(h,Tmax)
y=7/8;
n=ceil(Tmax/h);
eps=0.0001;
t=0;Y=y;T=t; y11=y;
for j=1:n
    fark=2*eps;
    while fark>eps
        y12=y+h/2*(f(t,y)+f(t+h,y11));
        fark=abs(y12-y11);
        y11=y12;
    end
    y=y12;
    t=t+h;
    T=[T;t];Y=[Y;y];
end
plot(T,Y);
function yp=f(t,y)
    yp=y*y*cos(t);
%
%-----

```

Program 3.1: Sabit Nokta iterasyonlu Yamuk Yontemi

3.2 Düzeltilmiş Euler(Heun veya Runge-Kutta-II) yöntemi

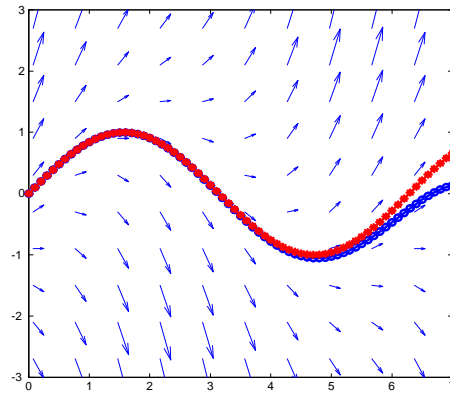
Geri Euler yönteminde olduğu gibi Yamuk yönteminin de nonlinear problemlere uygulanışı her adımda bir sabit nokta iterasyonu gerektirir.

(3.3) te yer alan Y_{i+1} bilinmeyeni için İleri Euler yöntemine göre elde edilen yaklaşım kullanılarak

$$m^* = [f(t_i, Y_i) + f(t_{i+1}, Y_i + hf(t_i, Y_i))]/2$$

t	$Y(h = 0.2)$	$Y(h = 0.1)$	$y(\text{gerçek})$	$Hata(h = 0.2)$	$Hata(h = 0.1)$
0.4	0.3878	0.3890	0.3894	0.0016	0.0004
0.8	0.7136	0.7164	0.7174	0.0038	0.0009
1.2	0.9255	0.9304	0.9320	0.0065	0.0016
1.6	0.9895	0.9971	0.9996	0.0100	0.0025
2	0.8947	0.9057	0.9093	0.0146	0.0036

Tablo 3.2: Yamuk Yöntemi ile Örnek 3.3 e ait yaklaşımlar ve Kümülatif Hata

Şekil 3.3: Örnek 3.3 için yamuk yaklaşımları(o) ve gerçek çözüm(-), $h = 0.1$

eğimi ile Düzeltilmiş Euler veya Heun yöntemi olarak ta adlandırılan

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + hm^* \\ &= Y_i + h/2[f(t_i, Y_i) + f(t_{i+1}, Y_i + hf(t_i, Y_i))], i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

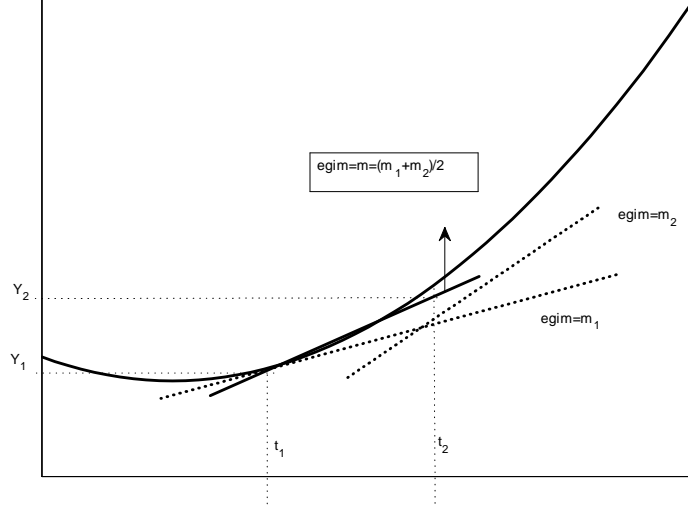
yöntemi elde edilir. İşlem kolaylığı açısından (3.7) yöntemini

$$\begin{aligned} p &= Y_i + hf(t_i, Y_i) \\ Y_{i+1} &= Y_i + h/2[f(t_i, Y_i) + f(t_{i+1}, p)], i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

olarak ifade etmek daha uygundur. Alternatif olarak (3.8) yöntemi

$$\begin{aligned} m_1 &= f(t_i, Y_i) \\ m_2 &= f(t_{i+1}, Y_i + hm_1) \\ Y_{i+1} &= Y_i + hm, i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $m = (m_1 + m_2)/2$ ile tanımlanan eğimler ortalamasıdır.(3.9) biçiminde yazılan şekliyle yöntem Runge-Kutta-II(RKII)



Şekil 3.4: Düzeltilmiş Euler(Heun veya Runge-Kutta) yöntemi ile Y_2 yaklaşımı

olarak bilinir ve gerçekte ikinci basamaktadır(bknz Alıştırma 10). $Y_1 = y(t_1)$ başlangıç değerinden hareketle Y_2 yaklaşımının nasıl elde edildiği geometrik olarak Şekil 3.4 te sunulmaktadır.

II. basamaktan Runge Kutta yöntemi ile (t_i, Y_i) noktasında hesaplanan m_1 eğimi ve ileri Euler yöntemi ile h adım uzunluğu kadar ilerlemek suretiyle ulaşılan noktada m_2 eğimi hesaplanır ve elde edilen eğimlerin ortalaması ile h adım uzunluğu kadar ilerleyerek Y_{i+1} noktası elde edilir.

ÖRNEK 3.4.

$$\begin{aligned} y' &= -y + \sin(t) + \cos(t) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

problemi verilsin.

- $h = 1/4$ adım uzunluğu ile $[0, 1]$ aralığındaki yaklaşım tablosunu RKII yöntemi yardımıyla hesaplayınız.
- $h = 0.1$ adım uzunluğu ile $y_0 = -3 : 1 : 2$ başlangıç değerlerine karşılık gelen çözüm eğrilerini RKII yöntemi ile $[0, 7]$ aralığında elde ediniz.

Çözüm.

- $h = 1/4$ için $t_1 = 0, t_2 = 1/4, t_3 = 1/2, t_4 = 3/4, t_5 = 1; Y_1 = y(0) = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 m_1 &= f(t_1, Y_1) = f(0, 0) = 1 \\
 m_2 &= f(t_2, Y_1 + hm_1) = f(1/4, 1/4) \\
 &= -1/4 + \sin(1/4) + \cos(1/4) \\
 &= 0.9663 \\
 m &= (m_1 + m_2)/2 \\
 &= 1.9663/2 \\
 &= 0.9831 \\
 Y_2 &= Y_1 + hm = 0.2458
 \end{aligned}$$

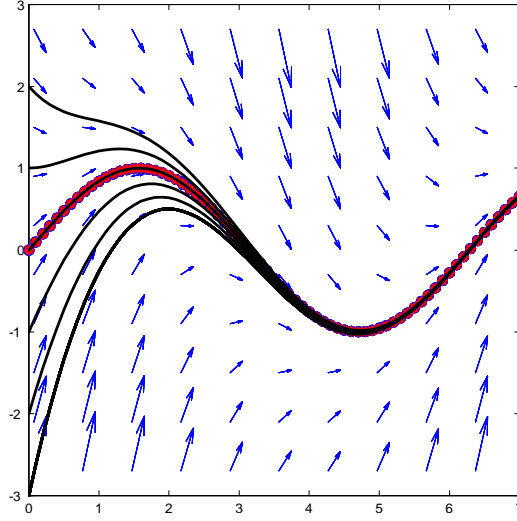
elde ederiz. Diğer değerler Tablo 3.3 de verilmektedir

i	t_i	Y_i	$y(t_i) = \sin(t_i)$	$E(t_i) = Y_i - y(t_i) $
1	0	0	0	0
2	1/4	0.2458	0.2474	0.0016
3	1/2	0.4757	0.4794	0.0037
4	3/4	0.6755	0.6816	0.0061
5	1	0.8330	0.8415	0.0085

Tablo 3.3: Örnek 3.4 için Runge-Kutta yaklaşımları ve kümülatif hata.

- Örnek 3.4 ün çözüm eğrilerinin birlikte hareket eden veya daha teknik bir ifadeyle “eş şürekli” bir aile oluşturduğu görülmektedir. Bu durumda komşu çözüm eğrilerinin eğimlerini referans alan yöntemlerin iyi sonuç vermesi beklenmektedir.
- Şekil 3.5 de $y_0 = -3 : 1 : 2$ başlangıç değerleri için gerçek çözümleri; RKII yöntemi ile elde edilen çözüm eğrileri(o) $h = 0.1$ adım uzunluğu için $[0, 7]$ aralığında verilmektedir. Elde edilen sayısal sonuçların gerçek çözüm eğrileri ile uyumlu olduğu görülmektedir.

ÖRNEK 3.5. Örnek 3.3 e ait yaklaşımları RK-II yöntemiyle ve $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$ adım uzunluğu ile hesaplayınız.



Şekil 3.5: Örnek 3.4 için yön alanları ve $y_0 = -3 : 1 : 2$ başlangıç değerleri ile çözüm eğrileri, (-); $y_0 = 0$ a karşılık gelen $y = \sin(t)$ çözüm eğrisi ve RK2 yaklaşımı(o).

Çözüm.

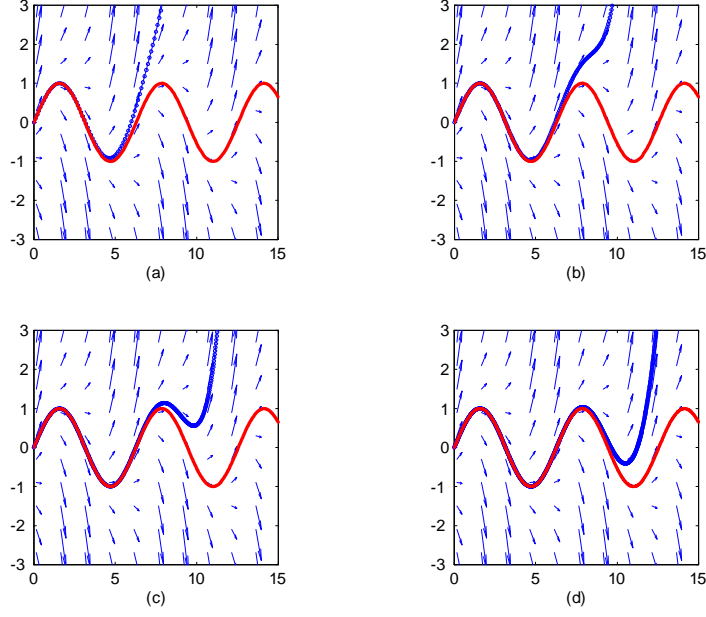
Örnek 3.3 için sırasıyla $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.025$ ve $h = 0.0125$ adım uzunlukları ile elde edilen Runge-Kutta yaklaşımları Şekil 3.6 (a),(b),(c) ve (d) de sırasıyla sunulmaktadır.

Örnek 3.3 e ait komşu çözüm eğrileri Şekil 3.7 de sunulmaktadır.

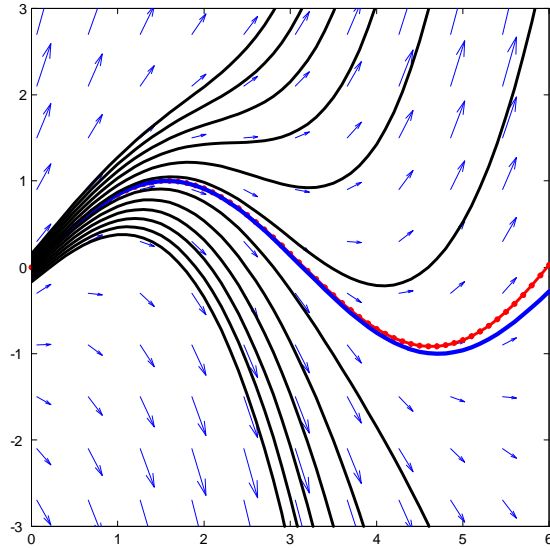
h adım uzunluğunun küçültülmesi ile daha iyi yaklaşımlar elde edildiği görülmektedir, ancak komşu çözüm eğrilerinin farklı kalitatif davranışları artan zaman değerleri için kabul edilebilir yaklaşımlar elde edilmesini engellemektedir.

Uyarı. Şekil 3.7 den $y(0) = 0$ noktası komşuluğundaki başlangıç değerlerle başlayan çözümlerin bu başlangıç şartını sağlayan $y = \sin(t)$ çözüm eğrisinden artan t değerleri için hızla uzaklaştıkları görülmektedir. $y(0) \neq 0$ için problemin gerçek çözümü

$$y = \sin(t) + y(0)e^t$$



Şekil 3.6: Örnek 3.5 için farklı adım uzunlukları ile RKII yaklaşımları(o) ve gerçek çözüm(-)



Şekil 3.7: Örnek 3.5 için komşu çözüm eğrileri, $y(0) = 0$ için RKII yaklaşımı(kırmızı -o) ve gerçek çözüm(mavi çizgi)

olarak elde edilir. Sıfır noktasının çok küçük komşuluğunda bile olsa $y(0) > 0$ şartını sağlayan çözümlerin $t \rightarrow \infty$ için ∞ 'a ve $y(0) < 0$ şartını sağlayan çözümlerin ise $t \rightarrow \infty$ için $-\infty$ 'a yaklaşacağı gerçek çözümden görülmektedir.

Daha yüksek basamaktan yöntemlerin performansları da 3.3 türündeki 'hassas' problemler için merak edilebilir. Pratik olarak güncelliğini koruyan bir diğer yöntem IV. basamaktan Runge-Kutta yöntemidir

3.3 RKIV:IV. Basamaktan Runge-Kutta yöntemi

Bu yöntem, t_i noktasında ve ileri Euler yöntemi ile ulaşılan $t_i + h/2, t_{i+1} = t_i + h$ noktalarında hesaplanan dört eğimin *ağırlıklı ortalaması* ile h adım uzunluğu kadar ileri Euler yöntemiyle ilerlemek suretiyle Y_{i+1} noktasını belirler:

$$\begin{aligned} m_1 &= f(t_i, Y_i) \\ m_2 &= f(t_i + h/2, Y_i + \frac{h}{2}m_1) \\ m_3 &= f(t_i + h/2, Y_i + \frac{h}{2}m_2) \\ m_4 &= f(t_i + h, Y_i + hm_3) \end{aligned}$$

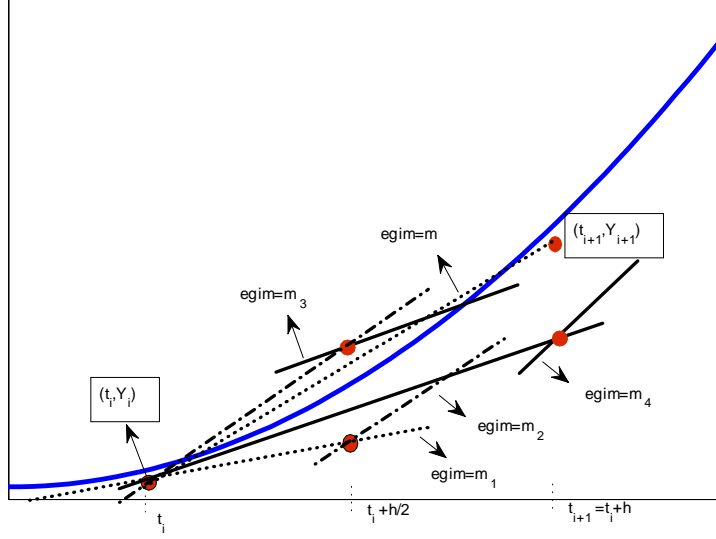
$$\begin{aligned} m &= (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)/6 \\ Y_{i+1} &= Y_i + hm \end{aligned}$$

Yukarıda tanımlanan m_1, m_2, m_3 ve m_4 eğimlerinin

$$\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$$

ağırlıklarıyla oluşturulan ve

$$m = \frac{\sum_{i=1}^k w_i m_i}{\sum_{i=1}^k w_i}$$



Şekil 3.8: Runge-Kutta IV yöntemi ile Y_{i+1} yaklaşımı

ile tanımlanan ağırlıklı ortalaması (eğimi) ile elde edilen Y_{i+1} ileri Euler yöntemi yaklaşımı şematik olarak Şekil 3.8 de gösterilmektedir:

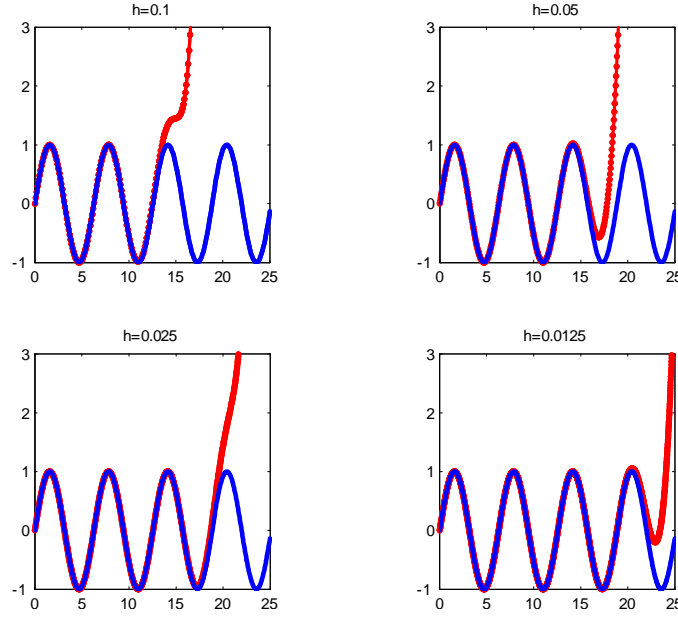
IV. basamaktan Runge-Kutta yöntemi ile

- (t_i, Y_i) noktasında hesaplanan m_1 eğimi,
- m_1 eğimi ile (t_i, Y_i) noktasından $h/2$ kadar ilerleyerek elde edilen noktada m_2 eğimi,
- m_2 eğimi ile (t_i, Y_i) noktasından $h/2$ kadar ilerlemek suretiyle elde edilen noktada hesaplanan m_3 eğimi,
- m_3 eğimi ile (t_i, Y_i) noktasından h kadar ilerlemek suretiyle ulaşılan noktada hesaplanan m_4 eğimlerinin

$$m = (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)/6$$

ağırlıklı ortalamasını hesaplar. Elde edilen bu ağırlıklı ortalama ile (t_i, Y_i) noktasından ileri Euler yöntemiyle h kadar ilerlemek suretiyle

$$Y_{i+1} = Y_i + hm$$



Şekil 3.9: Farklı adım uzunlukları ile RKIV yaklaşımları

yaklaşımı hesaplanır. İleri Euler yöntemiyle ulaşılan eğim hesaplama noktaları, aranan çözüm eğrisi yerine yaklaşım hataları nedeniyle genelde komşu çözüm eğrilerine ait eğimler üzerinde yer alırlar. O halde yöntem, komşu çözüm eğrileri üzerinden elde edilen eğimlerinin aranan çözüm eğrisi için uygun olması durumunda iyi sonuçlar verir.

Şekil 3.9 de Örnek 3.3 e ait yaklaşımlar ve gerçek çözüm eğrileri farklı adım uzunlukları için verilmektedir. Şekil 3.6 ve Şekil 3.9 karşılaştırıldığında adım uzunluğunun küçük seçilmesi gereken problemlerde RK-IV ün RKII ye göre daha iyi sonuç verdiği, ancak elde edilen sonuçların başlangıç noktasının belirli bir komşuluğunun ötesinde tekrar yuvarlama hataları nedeniyle komşu çözüm eğrilerinin davranışından etkilendiği görülmektedir. Bu durumda komşu çözüm eğrilerinin eğimini referans alan ileri Euler, Düzeltilmiş Euler(Heun, RKII) veya RKIV yöntemlerinin Örnek 3.3 için iyi sonuçlar vermesi beklenmemelidir.

Runge-Kutta IV, dördüncü basamaktan bir yöntemdir (Alıştırma 14).

Alıştırmalar 3.1.

1.

$$y' = t + 2y, y(0) = 0$$

başlangıç değer problemi verilmiş olsun. $h = 1/4$ olarak $[0, 1]$ aralığındaki

- (a) $Y_1 = y(0) = 0$ için, Y_2 ve Y_3 Yamuk yaklaşımlarını $h > 0$ sabit adım uzunluğu cinsinden hesaplayınız.
- (b) $h = 1/4$ olarak $[0, 1]$ aralığındaki Yamuk yaklaşımlarını hesaplayarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan değerleri doldurunuz. Sonuçlarınızı virgülden sonra beş basamak olacak biçimde yuvarlayınız.

t_i	Y_i
0	0
0.25
0.50	0.19444
0.75
1	1.1790

- (c) Problemin gerçek çözümünü belirleyiniz.
- (d) $t = 1$ noktasındaki kümülatif hata nedir?

2. Soru 1 de verilen başlangıç değer problemi ve h adım uzunluğu için yine aynı aralıkta

- (a) Runge-Kutta(II) yaklaşımlarını hesaplayarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan değerleri doldurunuz.

t_i	Y_i
0	0
0.25
0.50	0.16016
0.75
1	0.99323

(b) $t = 1$ noktasındaki kümülatif hata nedir?

3. `>> f = inline('t + 2 * y', 't', 'y')` ile fonksiyonunuzu MATLAB/OCTAVE ortamında tanıtarak

`>> [T, Y] = ode23(f, [0, 1], 0)(MATLAB)` veya

`>> T = 0 : 0.1 : 1; için Y = lsode(f, 0, T)(OCTAVE)`

komutu ile yaklaşık çözümleri elde ediniz. Elde ettiğiniz yaklaşımları Yamuk, Runge-Kutta yaklaşımları ve gerçek değerlerle karşılaştırınız.

4. Soru 3 de elde ettiğiniz yaklaşımların grafiğini çizdiriniz. Ayrıca gerçek çözümün `ode23` (veya `lsode`) ile belirlenen T noktalarındaki değerini hesaplayınız. Gerçek çözümün grafiğini de aynı ekseninde çizin.

5. Soru 4 de `ode23` ile elde edilen yaklaşımları inceleyerek, T noktaları arasındaki uzaklığın nasıl değiştiğini gözlemleyiniz. Gerçek çözüm değerlerinin değişimi ile T noktaları arasındaki uzaklık değişimi arasında bir ilişki görüyor musunuz?

6. Bu bölümde verilen Yamuk yöntemine ait Program 3.1 i Soru 1 de verilen başlangıç değer problemi için $[0, 1]$ aralığında $h = 0.1$ ve $h = 0.05$ adım uzunlukları için çalıştırınız. Her iki h değeri için elde edilen kümülatif yaklaşım değerlerini hesaplayarak aralarındaki yaklaşık ilişkiyi gözlemleyiniz. $h = 0.0250$ adım uzunluğu için de aynı işlemi tekrarlayınız. Elde ettiğiniz sonuçlar Yamuk yönteminin ikinci basamaktan bir yöntem olduğunu doğruluyor mu?

7. Yamuk yöntemi için verilen Program 3.1 i düzenleyerek

`>> [T, Y] = rk2(f, tanim, y1, h)`

komutu ile Runge-Kutta(II) yaklaşımlarını hesaplayacak biçimde düzenleyiniz. Burada `tanim` verilen problemin `tanim` aralığıdır, örneğin $[0, 1]$ gibi.

8. Soru 7 de geliştirdiğiniz programı Soru 1 de verilen başlangıç değer problemi için çalıştırınız. Programla elde ettiğiniz değerler hesap makinesi yardımıyla bulduğunuz sonuçları doğruluyor mu?

9. Soru 6 yı Runge-Kutta(II) yöntemi için tekrarlayınız. Elde ettiğiniz sonuçlar yöntemin ikinci basamaktan bir yöntem olduğunu doğruluyor mu?

10. Yamuk yöntemi için ifade edilen şartlar ile Runge-Kutta(II) yönteminin kesme hatasının da $O(h^2)$, $h \rightarrow 0$ olduğunu gösteriniz.
11. Soru 7 de geliştirdiğiniz rk2 programını düzenleyerek
 $\gg [T, Y] = rk4(f, \text{tanim}, y0, h)$
 komutu ile Runge-Kutta(IV) yaklaşımlarını hesaplayacak biçimde düzenleyiniz.
12. Yöntemleri Karşılaştıralım: Yamuk yöntemi ile rk2 ve rk4 programlarını Soru 1 de verilen problem için $[0, 2]$ aralığında yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanalım:
- (a) Öncelikle $h = 0.1$ adım uzunluğu ile yamuk yöntemi için elde ettiğiniz yaklaşımların grafiğini çiziniz.
- (b) Aynı adım uzunluğu için Runge-Kutta(II) yaklaşımlarının farklı bir grafik çizim işaretçisi, örneğin $\gg \text{plot}(T, Y, 'o-')$ komutu ile grafiğini çizdiriniz.
- (c) b) deki işlemleri Runge-Kutta(IV) için tekrarlayarak farklı bir grafik çizim işaretçisi, örneğin $\gg \text{plot}(T, Y, '*-')$ komutu ile grafiğini çizdiriniz.
- (d) T vektörü ile belirtilen noktalarda gerçek çözüm değerlerini elde ederek, aynı eksen ve farklı renkte ($\gg \text{plot}(T, Y, '-k')$) grafiğini çizelim. Neler gözlemliyorsunuz? Runge-Kutta(IV) ile gerçekleştirilen ekstra işlemler diğer yöntemlere göre daha iyi bir yaklaşım elde etmenizi sağladı mı?

13.

$$y' = y + \cos(t) - \sin(t), y(0) = 0$$

başlangıç değer problemini tekrar gözönüne alalım.

- (a) $h = 0.2$ adım uzunluğu ile $[0, 11]$ aralığındaki rk4 yaklaşımlarını hesaplayalım. $t = 2$ için kümülatif hata nedir?
- (b) $h = 0.1$ adım uzunluğu ile $[0, 11]$ aralığındaki rk4 yaklaşımlarını hesaplayalım. $t = 2$ için kümülatif hata nedir?
- (c) a) da elde ettiğiniz kümülatif hatanın b) de elde ettiğiniz hataya oranı hesaplayınız. Dördüncü basamaktan yöntem için bulmanız gereken 16 oranını yaklaşık olarak bulabildiniz mi?

14. Proje: Yeterince düzgün çözüme sahip bir başlangıç değer problemi için Runge-Kutta(IV) yönteminin yerel kesme hatasının $O(h^4)$, $h \rightarrow 0$ olduğunu gösteriniz.