Bölüm 4

Yüksek basamaktan çok adım Sonlu Fark Yöntemleri

Bu bölümde, birinci basamaktan başlangıç değer problemleri için

- Çok adım (Adams-Bashforth, Adams-Moulton, Deneme-Düzeltme ve GeriFark) yöntemlerinin
  - nasıl elde edildiklerini,
  - pratik problemlere nasıl uygulandıklarını,
  - hata analizlerini ve
  - diğer yöntemlere göre avantaj ve dezavantajlarını kapsamlı olarak inceliyoruz.
- Mevcut kaynaklardan farklı olarak, sayısal yöntemlerin performanslarını yön alanları kapsamında değerlendirerek kapsamlı bir analiz gerçekleştiriyoruz.

4.1 Çok Adım yöntemleri

Şu ana kadar incelediğimiz yöntemlerde Y_{i+1} yaklaşımının belirlenmesi için sadece bir önceki yaklaşım yani Y_i nin kullanılması gerekmekteydi. Bu tür yöntemlere tek adım yöntemi adı verilmektedir. Ancak Y_{i+1} yaklaşımı için önceki m adet $Y_i, Y_{i-1}, \ldots, Y_{i+m-1}$ yaklaşımlarını kullanan yöntemler de mevcuttur.

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y), t > a \\ y(a) &= y_1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

(4.1) problemi için en genel m-adım yöntemi

$$\begin{aligned} &(Y_{i+1} + \alpha_1 Y_i + \alpha_2 Y_{i-1} \cdots + \alpha_m Y_{i+1-m})/h \\ = \; &\beta_0 f(t_{i+1}, Y_{i+1}) + \beta_1 f(t_i, Y_i) + \cdots + \beta_m f(t_{i+1-m}, Y_{i+1-m}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

ile verilir.

(4.2) ile verilen $m-$adım yönteminde

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$$

seçeneğine karşılık gelen yöntemlere *Adams*[1] yöntemleri adı verilir.

Adams yöntemlerinde $\beta_0 \neq 0$ olması durumunda Y_{i+1} yaklaşımı açıkça önceki yaklaşımlar cinsinden ifade edilemez, bu durumda bu yöntemler *kapalı Adams yöntemleri* veya *Adams-Moulton*[2] *yöntemleri* olarak adlandırılırlar. Öteyandan $\beta_0 = 0$ olması durumunda ise Y_{i+1} yaklaşımı önceki yaklaşımlar cinsinden açıkça elde edilebilir. Dolayısıyla bu yöntemler *açık Adams yöntemleri* veya *Adams-Bashforth*[3] yöntemleri olarak adlandırılırlar.

4.1.1 Adams-Bashforth yöntemleri

(4.1) problemi için $m-$adım Adams-Bashforth yöntemi

$$(Y_{i+1} - Y_i)/h = \beta_1 f(t_i, Y_i) + \cdots + \beta_m f(t_{i+1-m}, Y_{i+1-m}), \tag{4.3}$$
$$Y_1 = y(a), i = m, m+1, \cdots \tag{4.4}$$

ile verilir.

(4.3) yöntemin β katsayıları yöntemin kesme hatasının mertebesini maksimize edecek biçimde seçilir.

[1] John Couch Adams(1819-1892), İngiliz matematikçi ve uzaybilimci.
[2] Forest Ray Moulton(1872-1952) Amerikalı uzaybilimci.
[3] Francis Bashforth(1819-1912) İngiliz uygulamalı matematikçi.

Örneğin $m = 1$ için elde edilen

$$(Y_{i+1} - Y_i)/h = \beta_1 f(t_i, Y_i) \tag{4.5}$$

yönteminin yerel kesme hatası

$$E_k(t_i, h) = (y(t_{i+1}) - y(t_i))/h - \beta_1 f(t_i, y(t_i))$$

olup, $y(t_{i+1})$ in t_i noktasındaki Taylor açılımı ve $y\prime(t_i) = f(t_i, y(t_i))$ olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} E_k(t_i, h) &= [y(t_i) + hy\prime(t_i) + h^2/2y''(c) - y(t_i)]/h - \beta_1 y\prime(t_i) \\ &= (1 - \beta_1)y\prime(t_i) + h/2y''(c) \end{aligned}$$

elde edilir, burada $c \in (t_i, t_{i+1})$.

Yöntemin diferensiyel denklemle uyumlu olması için $\beta_1 = 1$ değerini almalıdır. Bu durumda elde edilen (4.5) yöntemi ise önceki bölümde incelediğimiz İleri Euler yöntemidir. O halde *İleri Euler yöntemi bir adım Adams-Bashforth yöntemidir.*

$m = 2$ için elde edilen

$$(Y_{i+1} - Y_i)/h = \beta_1 f(t_i, Y_i) + \beta_2 f(t_{i-1}, Y_{i-1})$$

yöntemi için de

$$f(t_{i-1}, Y_{i-1}) = y\prime(t_{i-1}) = y\prime(t_i) - hy''(t_i) + h^2/2y'''(c_2)$$

açılımını kullanarak benzer işlemler uygulamak suretiyle

$$\begin{aligned} E_k(t_i, h) &= [y(t_i) + hy\prime(t_i) + h^2/2y''(t_i) + h^3/6y'''(c_1) - y(t_i)]/h \\ &\quad -\beta_1 y'(t_i) - \beta_2(y\prime(t_i) - hy''(t_i) + h^2/2y'''(c_2)) \\ &= (1 - \beta_1 - \beta_2)y\prime(t_i) + h(1/2 + \beta_2)y''(t_i) \\ &\quad +h^2((y'''(c_1))/6 - \beta_2/2y'''(c_2)) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\beta_2 = -1/2, \beta_1 = 3/2$$

için kesme hatası

$$\begin{aligned} E_k(t_i, h) &= h^2[1/6y'''(c_1) + 1/4y'''(c_2)] \\ &\cong 5/12h^2y'''(c), \end{aligned}$$

$c \in (t_i, t_{i+1})$ elde edilir. O halde

$$(Y_{i+1} - Y_i)/h = 3/2f(t_i, Y_i) - 1/2f(t_{i-1}, Y_{i-1}) \tag{4.6}$$

Adams-Bashforth yöntemi ikinci basamaktan bir yöntemdir. Ayrıca t_{i+1} noktasındaki yaklaşım için t_i ve t_{i-1}−inci adımlar gerektiği için yöntem *iki*-adımlı yöntem olarak tanımlanmaktadır ve kısaca *Adams-Bashforth(II)* notasyonu ile gösterilir.

Benzer biçimde *üç* ve *dört* adımlı ve sırasıyla üçüncü ve dördüncü basamaktan olan Adams-Bashforth yöntemlerine ait β lar ve kesme hatalar Tablo 4.1 de verilmektedir[**?**].

m	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	$E_k(t,h)$
1	0	1				$1/2hy''(c)$
2	0	$3/2$	$-1/2$			$5/12h^2y'''(c)$
3	0	$23/12$	$-16/12$	$5/12$		$3/8h^3y^{(iv)}(c)$
4	0	$55/24$	$-59/24$	$37/24$	$-9/24$	$251/720h^4y^{(v)}(c)$

Tablo 4.1: Adams-Bashforth Yöntemi β katsayıları ve kesme hataları

ÖRNEK 4.1.

$$y' = f(t,y) = 2y - 4e^{-2t}, y(0) = 1$$

Başlangıç Değer Problemi verilmiş olsun.

- *Problemin gerçek çözümünü belirleyiniz.*
- $Y_1 = y(t_1) = y(0) = 1$ *olmak üzere* $t_2 = h > 0$ *noktasındaki* Y_2 *yaklaşımını Runge-Kutta-II yönteminden elde ediniz.*
- $t_3 = 2h > 0$ *noktasındaki* Y_3 *yaklaşımını (4.6) ile tanımlanan Adams-Bashforth(II) yöntemi yardımıyla elde ediniz.*

Çözüm.

Verilen problemin genel çözümünü

$$y(t) = ce^{2t} + e^{-2t}$$

olarak elde ederiz.

- $y(0) = 1$ başlangıç şartı mutlak değerce hızla artan ce^{2t} terimini yok ederek $y(t) = e^{-2t}$ özel çözümünü vermektedir.

- $$m_1 = f(t_1, Y_1) = f(0,1) = -2,$$
$$m_2 = f(t_2, Y_1 + hm_1) = f(h, 1-2h) = 2(1-2h) - 4e^{-2h}$$
için
$$m = (m_1 + m_2)/2 = -2e^{-2h} - 2h$$
ve
$$Y_2 = Y_1 + hm = -2he^{-2h} - 2h^2 + 1$$
elde ederiz.

- Adams-Bashforth(II) yönteminden
$$\begin{aligned} Y_3 &= Y_2 + h/2[3 \times f(t_2, Y_2) - f(t_1, Y_1)] \\ &= Y_2 + h/2[3 \times (2Y_2 - 4e^{-2h}) - (2Y_1 - 4)] \\ &= (3h+1)Y_2 - hY_1 - 6he^{-2h} + 2h \\ &= -6h^3 - (1+3e^{-2h})2h^2 + (1-2e^{-2h})4h + 1 \end{aligned}$$
yaklaşımını elde ederiz.

4.1.2 Adams-Moulton yöntemleri

(4.1) problemi için $m-$adım Adams-Moulton yöntemi

$$\begin{aligned} (Y_{i+1} - Y_i)/h &= \beta_0 f(t_{i+1}, Y_{i+1}) + \beta_1 f(t_i, Y_i) + \cdots + \beta_m f(t_{i+1-m}, Y_{i+1-m}), \\ Y_1 &= y(a), i = m, m+1, \cdots \end{aligned} \tag{4.7}$$

ile verilir.

$m = 1$ için elde edilen

$$(Y_{i+1} - Y_i)/h = \beta_0 f(t_{i+1}, Y_{i+1}) + \beta_1 f(t_i, Y_i)$$

yönteminde β_0 ve β_1 katsayıları da Adams-Bashforth yönteminde de olduğu gibi yöntemin mertebesini maksimize edecek biçimde seçilir. Ancak Adams-Bashforth yönteminde izlediğimiz yoldan farklı olarak, β katsayılarını aşağıdaki argüman yardımıyla da elde edebiliriz:

- Yöntem $y \equiv t$ çözümüne sahip olan

  $$y\prime = 1, y(0) = 1$$

  başlangıç değer problemini hatasız çözebilmelidir:

  Gerçek çözüm $y = t$ dir. Bu çözüm için kesme hatası

  $$(y(t_{i+1}) - y(t_i))/h - \beta_0 f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) - \beta_1 f(t_i, y(t_i)) = 0 \qquad (4.8)$$

  olmalıdır. Burada $f(t, y) \equiv 1$ olduğu da kullanılarak

  $$\beta_0 + \beta_1 = 1$$

  elde edilir.

  $\beta_0 \neq 0$ olması şartıyla değişik seçenekler mevcuttur. Örneğin $\beta_0 = 1, \beta_1 = 0$ seçimi ile bilinen Geri-Euler yöntemini elde ederiz. Ancak daha yüksek basamaktan yöntem arayabiliriz:

- Yöntem $y \equiv t^2$ çözümüne sahip

  $$y\prime = 2t, y(0) = 0$$

  başlangıç değer problemini hatasız çözebilmelidir:

  $y = t^2$ çözümü ve $f(t, y) \equiv 2t$ fonksiyonları (4.8) i her t_i için sağlamalıdır. Örneğin $t_i = 0$ için

  $$t_{i+1} = t_i + h = h$$

  olup (4.8) dan

  $$h^2/h - \beta_0 2h = 0$$

  veya $\beta_0 = 1/2$ ve dolayısıyla da $\beta_1 = 1/2$ elde edilir.

Bu durumda elde edilen yöntem daha önce incelediğimiz Yamuk yöntemidir. Benzer biçimde diğer yüksek basamaktan Adams-Moulton yöntemlerine ait β parametreleri ve kesme hataları elde edilebilir.

m	β_0	β_1	β_2	β_3	$E_k(t,h)$
1	1/2	1/2			$-1/12h^2y'''(c)$
2	5/12	8/12	$-1/12$		$-1/24h^3y^{(iv)}(c)$
3	9/24	19/24	$-5/24$	1/24	$-19/720h^4y^{(v)}(c)$

Tablo 4.2: Adams-Moulton yöntemine ait β lar ve kesme hatası

Adams-Moulton yöntemine ait β lar ve kesme hatası Tablo 4.2 de belirtildiği gibidir[**?**].

Tablo 4.2 den m-adım *Adams-Moulton(kapalı)* yönteminin$(m+1)-inci$ basamaktan olduğu görülmektedir. Oysa Tablo 4.1 den m adım *Adams-Bashforth(açık)* yönteminin *m-inci* basamaktan olduğu görülmektedir. Bu özellik kapalı yöntemlerin tercih edilmesinin nedenlerinden birisidir.

ÖRNEK 4.2. *Örnek 4.1 i Adams_Moulton(I) yöntemi için tekrarlayınız.* $[0, 2.5]$ *aralığında* $h = 0.1$ *adım uzunluğu ile Adams_ Bashforth ve Adams_ Moulton yaklaşımları ile gerçek çözüm değerlerini* $t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ *değerlerinde oluşan hatalar ile birlikte tablo yardımıyla listeleyiniz.*

Çözüm.

- $Y_2 = e^{-2h}$ gerçek çözüm değeri için Adams-Bashforth(II) yönteminden

$$\begin{aligned} Y_3 &= Y_2 + h/2[f(t_2, Y_2) + f(t_3, Y_3)] \\ &= e^{-2h} + h/2[f(h, e^{-2h}) + f(2h, Y_3)] \\ &= e^{-2h} + h/2[2e^{-2h} - 4e^{-2h} + 2Y_3 - 4e^{-4h}] \\ &= e^{-2h} + h(Y_3 - e^{-2h} - 2e^{-4h}) \end{aligned}$$

  olup, buradan $Y_3 = e^{-2h} - \frac{2h}{1-h}e^{-4h}$ elde ederiz.

- $t = 0.5, 1, 1.5, 2.2.5$ değerlerine karşılık gelen Adams-Bashforth (Y_{Bash}), Adams-Moulton(Y_{Moult}) ile gerçek çözüm değerleri$(Y_{Gerçek})$ ve oluşan hatalar, Hata$_{Bash}$ ve Hata$_{Moult}$ Tablo 4.3 de sunulmaktadır. Tablo 4.3 değerlerinden de anlaşılacağı üzere her iki yöntem de kümülatif hatalar artan t değerleri için artış göstermektedir, ancak Adams-Bashforth yönteminde oluşan hataların nispeten daha fazla olduğu görülmektedir.

- Adams-Moulton yöntemlerinin kapalı olması ilgili yaklaşımların elde edilmesi konusundaki güçlüğü, diğer bir deyimle dezavantajı da beraberinde getirir.

t	Y_{Bash}	Y_{Moult}	$Y_{Gerçek}$	Hata_{Bash}	Hata_{Moult}
0	1	1	1	1	0
0.5	0.3809	0.3682	0.3679	0.0130	0.0003
1	0.1783	0.1363	0.1353	0.0430	0.0010
1.5	0.1678	0.0525	0.0498	0.1180	0.0027
2	0.3355	0.0257	0.0183	0.3172	0.0074
2.5	0.8570	0.0269	0.0067	0.8503	0.0202

Tablo 4.3: Adams-Bashforth ve Adams-Moulton yaklaşımları

- Bu durumda aşağıdaki bölümde incelenen ve her adımda açık ve kapalı yöntem çiftini kullanan Deneme-Düzeltme yöntemleri kullanılmaktadır.

4.1.3 Deneme-Düzeltme yöntemleri

Adams-Moulton gibi kapalı yöntemlerin tek başına kullanılması her adımda iteratif bir yöntemin kullanılmasını gerektirir. $m = 1$ için bir Adams-Moulton yöntemi olan Yamuk yönteminde her adımda iteratif yaklaşımlar hesaplayan program örneğini Örnek 4.2 de inceledik. Alternatif bir yaklaşım ise bir açık yöntemi kullanarak elde edilen yaklaşımı tahmini bir değer(deneme) olarak kabul etmek suretiyle, kapalı yöntem ile ilgili yaklaşımı belirlemektir(düzeltme). Böylece kapalı yöntemin dezavantağı olan yaklaşımın belirlenmesi problemi çözülerek, yöntemin avantajlarından faydalanma şansı olur.

Örnek 4.2 de incelenen iteratif yöntem ile birlikte Yamuk yöntemini uygulamak yerine, Yamuk yöntemi bir açık yöntemle birlikte uygulanabilir.

Örneğin $m = 1$ için Adams-Moulton yöntemi (Yamuk Yöntemi), $m = 1$ için Adams-Bashforth yöntemi ile birlikte kullanılarak kısaca *DD1* olarak adlandıracağımız

$$\begin{aligned} P &= Y_i + hf(t_i, Y_i)(deneme) \\ Y_{i+1} &= Y_i + h/2[f(t_i, Y_i) + f(t_{i+1}, P)](düzeltme) \end{aligned} \tag{4.9}$$

deneme-düzeltme yöntemi elde edilir. Elde edilen bu yöntemin daha önceden incelediğimiz Düzeltilmiş Euler veya II. basamaktan Runge-Kutta yöntemi olduğuna dikkat ediniz.

Uyarı. *Birinci basamaktan olan deneme yönteminin(bu durumda ileri Euler yöntemi), II. basamaktan yamuk yönteminin sağ tarafından yer alan* Y_{i+1}

değerinin tahmininde(düzeltilmesinde) kullanılmasının, yöntemin basamağını değiştirmediğine dikkat ediniz.

Bir diğer deneme-düzeltme çifti $m = 2$ için *DD2* olarak adlandıracağımız Adams-Bashforth ve Adams-Moulton ikilisidir:

$$\begin{aligned} P &= Y_i + h/2[3f(t_i, Y_i) - f(t_{i-1}, Y_{i-1})](deneme) \\ Y_{i+1} &= Y_i + h/12[5f(t_{i+1}, P) + 8f(t_i, Y_i) - f(t_{i-1}, Y_{i-1})](düzeltme) \end{aligned} \tag{4.10}$$

DD2 yöntemine ait Program 4.1 aşağıda verilmektedir.

```
%-----------------------------------------------------
% II. Basamaktan bir Deneme-Düzeltme yöntem uygulaması
%  [T,Y]=dd2(f,tanim,y,h); tanim=[t1,tson]
%-----------------------------------------------------

function [T,Y]=dd2(f,tanim,Y1,h)
 t1=tanim(1);tson=tanim(2);T=t1;Y=Y1;
 t2=t1+h;
 tanim=[t1,t2];
 [T,Y]=rk2(f,tanim,Y1,h) ;
 Y2=Y(2);


 while t2 <tson
     t3=t2+h;
     P=Y2+h*(3/2*f(t2,Y2)-1/2*f(t1,Y1));
     Y3=Y2+h/12*(5* f(t3,P)+8*f(t2,Y2)-f(t1,Y1));
     Y1=Y2; Y2=Y3;t1=t2;t2=t3;
     T=[T;t3];Y=[Y;Y3];
 end
%
%-----------------------------------------------------
```

Program 4.1: II. Basamaktan Deneme-Düzeltme Uygulaması

$m = 3$ için *DD3* olarak adlandıracağımız

$$\begin{aligned} P &= Y_i + h/12[23f(t_i, Y_i) - 16f(t_{i-1}, Y_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, Y_{i-2})] \\ Y_{i+1} &= Y_i + h/24[9f(t_{i+1}, P) + 19f(t_i, Y_i) - 5f(t_{i-1}, Y_{i-1}) + f(t_{i-2}, Y_{i-2})] \end{aligned} \tag{4.11}$$

deneme-düzeltme yöntemi elde edilir. (4.11) yöntemi için uygun program problemler kısmında verilmektedir.

ÖRNEK 4.3.

$$y' = y - \sin(t), y(0) = 1/2$$

başlangıç değer problemini gözönüne alalım. $h = 0.1$ *adım uzunluğu ile Runge-Kutta yöntemi, DD2 (4.10) ve DD3(4.11) yöntemi yaklaşımlarını elde ederek, gerçek çözüm ile birlikte aynı eksende grafiklerini çiziniz.*

Çözüm.

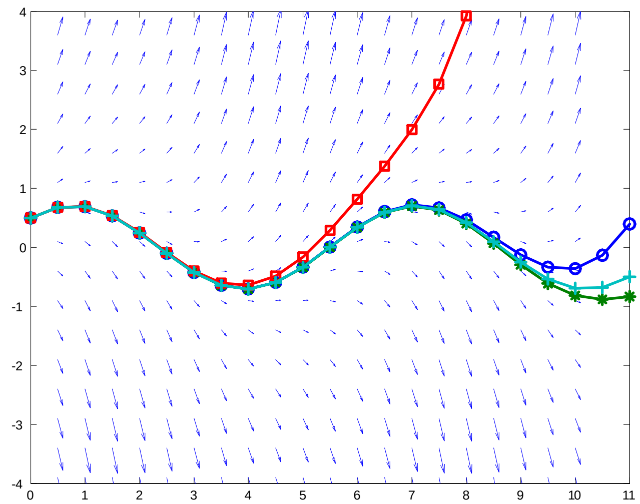
Problemin $y(0)$ değeri cinsinden analitik çözümü

$$y = \left(e^t(2y(0) - 1) + \sin(t) + \cos(t)\right)/2$$

olarak elde edilir. $y(0) = 1/2$ noktası komşuluğunda çözüm eğrileri farklı davranış sergilemektedirler.

Belirtilen yaklaşımlar verilen probleme ait yön alanları içerisinde Şekil 4.1 de verilmektedir.

DD2 ve *DD3* için gerekli başlangıç değerleri *RK4* yönteminden elde edilmiştir. Şekil 4.1 den çözüm eğrilerinin $y(0) = 1/2$ komşuluğunda artan t değerleri için birbirlerinden uzaklaşan yörüngeler takip ettikleri görülmektedir. Komşu çözüm eğrilerinin davranışlarının sayısal yöntemleri belirli bir t anından itibaren nasıl olumsuz biçimde etkiledikleri Şekil 4.1 den görülmektedir. Her üç yöntemin de belirli bir noktadan sonra farklı başlangıç değerlerine ait çözüm eğrilerini takip ettikleri görülmektedir.



Şekil 4.1: Örnek 4.3 için RK2(kare),DD2(o),DD3(*),gerçek çözüm(+)

Alıştırmalar 4.1. *1-10 numaralı sorularda*

$$y\prime = y sin(t), y(0) = 0.5 \tag{4.12}$$

başlangıç değer problemini gözönüne alalım. Probleme ait yön alanları Şekilde görüldüğü gibidir.

1.
$$Y_{i+1} = Y_i + h/2[3f(t_i, Y_i) - f(t_{i-1}, Y_{i-1})], i = 2, 3, \ldots$$
Adams-Bashforth(II) yöntemini gözönüne alalım. $Y_1 = y(t_1) = 0.5$ *olmak üzere,*

(a) *Verilen başlangıç değer probleminin gerçek çözümünün*

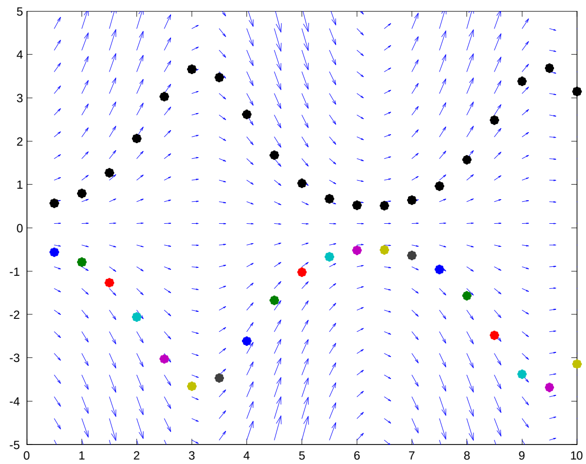
$$y = y(0)e^{1-\cos(t)}$$

olarak verildiğini kontrol ediniz.

(b) $h = 1/4$ *alarak hesap makinesi yardımıyla* Y_2 *yaklaşımının Runge-Kutta(II) yöntemi yardımıyla elde ediniz.*

(c) $t = 1/2$ *noktasındaki yaklaşımı Adams-Bashforth(II) yöntemini yardımıyla hesaplayınız.*

(d) $t = 1/2$ *noktasında oluşan hatayı belirleyiniz.*



2.

$$[T, Y] = AdamBashII(f, tanim, y0, h)$$

yazılımı ile çalışan program geliştiriniz. Bunun için aşağıdaki program parçasını kullanınız.

```
..............................
T=t1;Y=y1
t2=t1+h;
yiki=exp(-2*h);
T=[T;t2];Y=[Y;yiki];n1=n-1;
for i=1:n1
  fark=1;yucbir=yiki;
   while fark>tol
     yuciki=yiki+h/12*(5*f(t2+h,yucbir)+...
          8*f(t2,yiki)-f(t1,ybir));
 fark=abs(yuciki-yucbir);
     yucbir=yuciki;
    end
    ybir=yiki;yiki=yuciki; t1=t2;t2=t2+h;
    T=[T;t2];Y=[Y;yiki];
end
..............................
%                                    AdamBashII
%------------------------------------------------
```

(a) *Geliştirdiğiniz kod ile $h = 0.2$ alarak yukarıda verilen problemin $[0, 10]$ aralığındaki yaklaşımları hesaplayınız.*

(b) *$h = 0.1$ almak suretiyle belirtilen aralıktaki yaklaşımları hesaplayınız.*

(c) *(a) ve (b) şıkkında elde ettiğiniz sonuçlardan $t = 10$ noktasındaki kümülatif hataları hesaplayınız.*

(d) *(c) şıkkında elde ettiğiniz hata değerleri yöntemin ikinci basamaktan olduğunu doğruluyor mu?*

3.

$$Y_{i+1} = Y_i + h/12[5f(t_{i+1}, Y_{i+1}) + 8f(t_i, Y_i) - f(t_{i-1}, Y_{i-1})]$$

Adam_Moulton yöntemini gözönüne alalım.

(a) *Yöntemi 4.12 ile verilen probleme uygulayarak Y_{i+1} yaklaşımını Y_i ve Y_{i-1} yaklaşımları cinsinden elde ediniz.*

(b) *$h = 1/4$ almak suretiyle Soru 1 de elde edilen Y_2 yaklaşımını kullanarak $t = 1/2$ noktasındaki yaklaşımı hesaplayınız.*

4. *Soru 3 a) da elde ettiğiniz yaklaşımları hesaplayan bir kod hazırlayınız.*

(a) *hazırladığınız kodu $[0, 10]$ aralığında $h = 0.2$ ve $h = 0.1$ adım uzunlukları için test yapınız.*

(b) *Soru 1 a) da elde ettiğiniz gerçek çözüm değerlerini kullanarak yöntemin pratik olarak ta üçüncü basamaktan olduğunu gözlemleyiniz.*

5. *Soru 3 de verilen yöntemin kesme hatasını hesaplayınız. Yol gösterme: kesme hatasının*

$$E_k(t, h) = (y(t_{i+1}) - y(t_i))/h - 1/12(-y'(t_{i-1}) + 8y'(t_i) + 5y\prime(t_{i+1}))$$

olarak verildiğine dikkate ederek, Taylor teoremi yardımıyla $y(t_{i+1})$,$y\prime(t_{i-1})$ ve $y\prime(t_{i+1})$ fonksiyonlarının t_i noktasındaki açılımlarını hesaplayınız. y nin çözüm bölgesinde dördüncü basamaktan sürekli türeve sahip olduğunu kabul ediniz.

6. *Adams_ Bashforth yöntemini deneme ve Adams_ Moulton yöntemini düzeltme yöntemi olarak kullanan ve yukarıda verilen DD2(4.10) yöntemini kullanmak suretiyle (4.12) problemini* $[0, 10]$ *aralığında ve* $h = 0.1$ *adım uzunluğu ile çözünüz.*

7. $h = 0.2, 0.1.0.05$ *adım uzunlukları ve DD2(4.10) yöntemi ile* $t = 10$ *noktasındaki kümülatif hataları belirleyiniz. Yöntemin gözlemlenen basamağı hakkında ne söyleyebilirsiniz.*

8. $DD2$ *programını geliştirerek (4.11) ile verilen algoritmayı*

$$[T, Y] = dd3(f, tanim, y, h)$$

komutuyla çalıştıran Program 4.2 aşağıda verilmektedir.

```
%-------------------------------------------------
% III. Basamaktan bir deneme-düzeltme
% yöntem uygulaması
%  [T,Y]=dd3(f,tanim,y,h)
%-------------------------------------------------

function [T,Y]=dd3(f,tanim,Y1,h)
 t1=tanim(1);tson=tanim(2);T=t1;Y=Y1;
 t2=t1+h;t3=t2+h;
 tanim=[t1,t3];
%------------------------------------------------
 [T,Y]=rk2(f,tanim,Y1,h) ;%rk2
%----------------------------------------------
 Y2=Y(2);
 Y3=Y(3);
 while t3 <tson
   t4=t3+h;
   P=Y2+h/12*(23*f(t3,Y3)-16*f(t2,Y2)+5* f(t1,Y1));
   Y4=Y3+h/12*(5* f(t4,P)+8*f(t3,Y3)-f(t2,Y2));
   Y1=Y2; Y2=Y3;Y3=Y4;t1=t2;t2=t3; t3=t4;
   T=[T;t4];Y=[Y;Y4];
 end
%
%-------------------------------------------------
```

Program 4.2: III. Basamaktan Deneme-Düzeltme Uygulaması

DD3 programını çalıştırarak (4.12) ile verilen başlangıç değer problemini çözünüz. DD3 ile elde edilen sonuçları DD2, RK(II) ve RK(IV) ile karşılaştrınız.

9. *Soru 8 deki DD3 programında başlangıç değerlerinin elde edildiği iki çizgi arasındaki*

$$[\mathsf{T},\mathsf{Y}] = \mathsf{rk2}(\mathsf{f},\mathsf{tanim},\mathsf{Y1},\mathsf{h})$$

satırını daha önceden hazırlamış olduğunuz ve

$$[\mathsf{T},\mathsf{Y}] = \mathsf{ieuler}(\mathsf{f},\mathsf{tanim},\mathsf{Y1},\mathsf{h})$$

komutu ile çalışan ileri Euler yöntemiyle yer değiştiriniz. Sonuçlarınızda değişiklik oldu mu?

10. *(Proje) Çok adım yöntemlerinin başlatılmasında gerekli olan başlangıç değerlerinin düşük basamaklı yöntemlerden seçilmesi durumunda, nasıl sonuçlar elde edilebileceğini inceleyen bir proje hazırlayınız. Bunun için bu bölümde çalışılan örnekleri test yapmak amacıyla kullanabilirsiniz.*

4.1.4 Geri Fark yöntemleri

(4.2) ile verilen $m-$adım yönteminde

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0$$

seçmek suretiyle elde edilen

$$(Y_{i+1} + \alpha_1 Y_i + \alpha_2 Y_{i-1} \cdots + \alpha_m Y_{i+1-m})/h = \beta_0 f(t_{i+1}, Y_{i+1})$$

yöntemine $m-$adım Geri Fark yöntemi adı verilir. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sabitleri ise kesme hatasının basamağını maksimize edecek biçimde seçilir.

$m = 1$ için elde edilen yöntem daha önceden bildiğimiz Geri Euler yöntemidir.

$m = 2$ için

$$(Y_{i+1} + \alpha_1 Y_i + \alpha_2 Y_{i-1})/h = \beta_0 f(t_{i+1}, Y_{i+1})$$

iki adım Geri Fark Yöntemini(*GeriFarkM2*) elde ederiz. Yöntemdeki katsayılar kesme hatasının basamağını maksimize edecek biçimde seçilir:

t_i noktasındaki kesme hatası

$$E_k(t_i,h) = (y(t_{i+1}) + \alpha_1 y(t_i) + \alpha_2 y(t_{i-1}))/h - \beta_0 f(t_{i+1}, Y_{i+1})$$

olarak elde edilir. $f(t_{i+1}, Y_{i+1}) = y\prime(t_{i+1})$ olduğuna dikkat ederek, $y(t_{i+1})$ ve $y(t_{i-1})$ in t_i noktasında Taylor açılımları kullanılarak

$$\begin{aligned} E_k(t_i,h) &= [y(t_i) + hy\prime(t_i) + h^2/2y''(t_i) + h^3/6y'''(c_1) + \alpha_1 y(t_i) \\ &\quad +\alpha_2(y(t_i) - hy\prime(t_i) + h^2/2y''(t_i) - h^3/6y'''(c_2))]/h \\ &\quad -\beta_0[y\prime(t_i) + hy''\ (t_i) + h^2/2y'''(c_3)] \\ &= (1+\alpha_1+\alpha_2)y(t_i) \\ &\quad +(1-\alpha_2-\beta_0)y\prime(t_i) \\ &\quad +(1/2+1/2\alpha_2-\beta_0)y''(t_i) \\ &\quad +O(h^2) \end{aligned}$$

elde ederiz. Kesme hatasının basamağını maksimize edebilmek için

$$\begin{aligned} 1+\alpha_1+\alpha_2 &= 0 \\ 1-\alpha_2-\beta_0 &= 0 \\ 1/2+1/2\alpha_2-\beta_0 &= 0 \end{aligned}$$

sağlanmalıdır. Yukarıdaki sistem çözülerek $\beta_0 = 2/3, \alpha_1 = -4/3, \alpha_2 = 1/3$ elde edilir. Bu durumda hata

$$\begin{aligned} E_k(t_i,h) &= h^2(1/6y'''(c_1) - 1/18y'''(c_2) - 1/3y'''(c_2)) \\ &\cong -2/9h^2y'''(c) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Diğer bir değimle yöntem, yani GeriFarkM2,

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= 4/3Y_i - 1/3Y_{i-1} + 2/3hf(t_{i+1}, Y_{i+1}), i = 2,3,... \\ Y_1 &= y(a) \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir.

GeriFarkM2 yöntemi ile ilgili olarak iki önemli noktayı vurgulamak gerekmektedir. Birincisi yöntem kapalı bir yöntem oluşu, ikincisi ise iki adım yöntemi olması nedeniyle tek başına başlatılamamasıdır.

Yöntemin kapalı oluşu her adımda yukarıda incelenen Yamuk yönteminde olduğu gibi uygun bir iteratif yöntemin belirtilen kriter sağlanana kadar uygulanmasını gerektirir.

Yöntemin çok adım yöntem oluşu ise başlatılabilmesi için bir tek adım yöntemine ihtiyaç duyulmasını gerektirir. Örneğin $Y_1 = y(a)$ başlangıç değerinin bilindiğini kabul ederek tanım kümesi içerisinde hesaplayabileceğimiz ilk değer Y_3 değeridir. Fakat bu ise Y_2 değerinin bilinmesini gerektirir. Bu bakımdan uygun bir tek adım yöntemi ile Y_2 değerinin hesaplanması gerekmektedir.

Program 4.3 ile elde edilen yaklaşımların başlatılabilmesi için gerekli ilk yaklaşım $Y_2 \cong y(t_2)$ Geri Euler yöntemi yardımıyla hesaplanmaktadır. Y_3 için ilk yaklaşımı $Y_{31} = Y_2$ kabul etmek suretiyle iterasyon değerleri arasındaki fark epsilondan küçük olana kadar yeni yaklaşım değerleri hesaplanmaktadır. Söz konusu fark epsilondan küçük kaldığında elde edilen en güncel yaklaşım $Y_3 = Y_{32}$ yaklaşımı olarak kabul edilmektedir. Elde edilen yaklaşımlar($Y_1 = Y_2; Y_2 = Y_3$) ve zaman değişken değerleri($t_1 = t_2; t_2 = t_3$) güncellenerek iterasyon işlemine yeni zaman değeri ile devam edilmektedir.

Tablo 4.4 de bazı m değerleri için Geri Fark yöntemi katsayıları ve hataları verilmektedir.

m	β_0	α_1	α_2	α_3	α_4	$E_k(t,h)$
1	1	-1				$O(h)$
2	2/3	$-4/3$	1/3			$O(h^2)$
3	6/11	$-18/11$	9/11	$-2/11$		$O(h^3)$
4	12/25	$-48/25$	26/25	$-16/25$	3/25	$O(h^4)$

Tablo 4.4: Geri Fark Yöntemi β katsayıları ve kesme mertebeleri

Alıştırmalar 4.2. *1-5 numaralı problemlerde*

$$y\prime = y - 2e^{-t}, y(0) = 1 \tag{4.13}$$

Başlangıç Değer problemini kullanınız. Diferensiyel denklemin yön alanları ve bazı başlangıç değerlerine karşılık gelen çözüm eğrileri aşağıdaki Şekilde verilmektedir.

$y(0) = 1$ *noktası komşuluğundaki çözüm eğrilerinin artan* t *değerleri için birbirlerinden hızla uzaklaştıkları görülmektedir. O halde problem hassas(stiff) bir problemdir.*

1. *(4.13) ile verilen başlangıç değer problemini çözünüz.*

2. *(4.13) problemini* $y(0) = 1$ *başlangıç değeri yerine* $y(0) = c$ *(c sabit) keyfi başlangıç değeri ile çözünüz.* $y(0)$ *başlangıç değerinin* 1 *in komşuluğundaki küçük değişimlerinin çözümün davranışını nasıl etkilediğini gözlemleyiniz.*

```
%-------------------------------------------
% Sabit nokta iterasyonu ile II. basamaktan
% Geri-Fark uygulaması
%  [T,Y]=gerifark2(f,tanim,Y1,h)
%-------------------------------------------

 function [T,Y]=gerifark2(f,tanim,Y1,h)
  t1=tanim(1);tson=tanim(2);
  eps=0.0001;
  t2=t1+h;t3=t2+h;
  tanim=[t1,t2];
  [T,Y]=geuler(f,tanim,Y1,h);
  Y2=Y(2);Y31=Y2;
  while t2 < tson
   fark=2*eps;
   while fark > eps
      Y32=4/3*Y2-1/3*Y1+2/3*h*f(t3,Y31);
      fark=abs(Y32-Y31);
      Y31=Y32;
   end
   Y3=Y32;Y1=Y2;Y2=Y3;
   t1=t2;t2=t3;
   T=[T;t3];Y=[Y;Y3];
   t3=t3+h;
 end
 %
 %-------------------------------------------
```

Program 4.3: II. Basamaktan Geri Fark Uygulaması

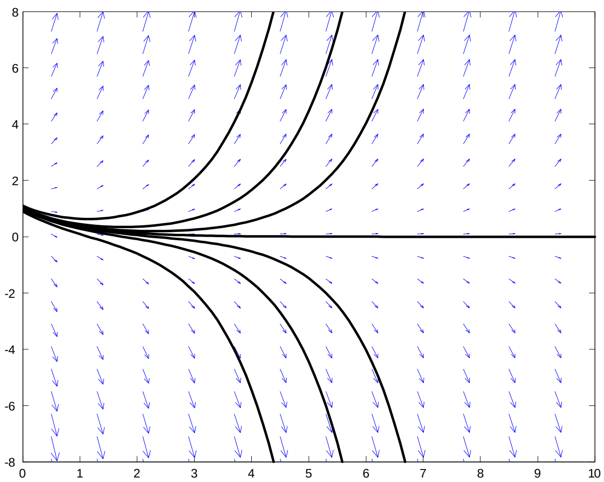
3. $h = 0.1$ *alarak (4.13) probleminin* $[0, 4]$ *aralığındaki yaklaşık çözümlerini*

(a) *Geri Euler Yöntemi*

(b) *Yamuk Yöntemi*

(c) *Yukarıda verilen gerifark2 yöntemi ile çözerek elde ettiğiniz sonuçları gerçek çözümle karşılaştırınız.*

(d) *Gerifark2 programda gerekli* Y_2 *değerini programda belirtildiği üzere geuler(Geri Euler) yöntemi yerine Runge-Kutta(II) ve Runge-Kutta(IV) yöntemleri ile hesaplayarak sonuçlarınızı karşılaştırınız.*



(e) *Bu defa da Y_2 değerini gerçek çözümden $Y_2 = y(h)$ elde ederek yöntemi çalıştırınız.*

4. *IV. basamaktan Geri Fark yöntemi için Program 4.4 de verilen gerifark4 programını inceleyiniz ve yukarıda verilen Başlangıç Değer Problemini $h = 0.1$ adım uzunluğu ile çalıştırınız.*

5. *(4.13) ile verilen problemi $[0, 8]$ aralığında*

   (a) *MATLAB ODE çözücüleri(ode23, ode45) ile çözünüz.*

   (b) *Hassas(Stiff) problemler için tasarlanan ode15s, ode23s ile çözünüz.*

   (c) *Diğer MATLAB ode çözücüleri de deneyiniz(ode23t, ode23tb,ode113)*

   (d) *Şimdi de aynı problemi OCTAVE lsode programı yardımıyla çözünüz.*

   (e) *Elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırınız.*

6.

$$y\prime = y + cos(t) - sin(t), y(0) = 0$$

Başlangıç Değer Problemini tekrar gözönüne alalım. Verilen denkleme ait yön alanları ve çözüm eğrilerini elde ediniz. Soru 5 i $[0, 15]$ aralığında bu başlangıç değer problemi için tekrarlayınız.

7.

$$y\prime = y - 1, y(0) = 1$$

```
%-------------------------------------------
% Sabit nokta iterasyonu ile IV. basamaktan
% Geri-Fark uygulaması
%  [T,Y]=gerifark4(f,tanim,Y1,h)
%-------------------------------------------

 function [T,Y]=gerifark4(f,tanim,Y1,h)
  t1=tanim(1);tson=tanim(2);
  eps=0.0001;
  t2=t1+h;t3=t2+h;t4=t3+h;t5=t4+h;
  [T,Y]=rk4(f,[t1,t4],Y1,h);
  Y2=Y(2);Y3=Y(3);Y4=Y(4);Y51=Y4;
  while t1<tson
   fark=2*eps;
   while fark>eps
     Y52=48/25*Y4-36/25*Y3+16/25*Y2-3/25*Y1
 +12/25*h*f(t5,Y51);
     fark=abs(Y52-Y51); Y51=Y52;
   end
  Y5=Y52;t1=t2;t2=t3;t3=t4;t4=t5;
  Y1=Y2;Y2=Y3;Y3=Y4;Y4=Y5;
  T=[T;t5];Y=[Y;Y5];
  t5=t5+h;
 end
 %
 %------------------------------------------
```

Program 4.4: IV. Basamaktan Geri Fark Uygulaması

başlangıç değer problemini gözönüne alalım. Probleme ait yön alanları ve çözüm eğrilerini $y = 1$ *doğrusu komşuluğunda kabaca çiziniz. Soru 5 i* $[0, 5]$ *aralığında bu başlangıç değer problemi için tekrarlayınız.*