

Bölüm 7

Tek Adım Sonlu Fark Yöntemlerinin Mutlak Kararlılığı

Bir *yöntemin kararlılığı*, önceki bölümde incelendiği üzere sabit bir noktada adım uzunluğu sıfıra yaklaşırken uyumlu bir yöntemle elde edilen sayısal çözümün analitik çözüme yakınsamasını garanti eden bir kriterdir. Bu bölümde inceleyeceğimiz *mutlak kararlılık* kriteri ise, özellikle hassas problem olarak adlandırılan ve sınırlı çözüme sahip problemler için büyük iterasyonlar ile sayısal yöntemin sınırlı çözümler üretebilmesi yeteneğini test yapan bir kriterdir.

Bu bölümde mutlak kararlılık kriterini tanıtarak,

- Asimtotik kararlı denge noktasına sahip

$$y' = f(y), y(0) = y_1 \in R$$

skaler problemi ve yine asimtotik kararlı denge noktasına sahip

$$Y' = f(Y), Y(0) = Y_1 \in R^n$$

sistemi için tek adım yöntemi olarak bilinen ileri Euler, geri Euler, Yamuk, Runge-Kutta-II, Runge-Kutta-IV yöntemlerinin mutlak kararlılık analizlerini, denge noktaları komşuluğunda elde edilen lineer modeller yardımıyla gerçekleştiriyoruz.

7.1 Skaler problemler için Mutlak Kararlılık analizi

Öncelikle

$$\begin{aligned} y' &= f(y) \\ y(t_1) &= y_1 \in R \end{aligned} \quad (7.1)$$

problemini gözönüne alalım. (7.1) probleminin $y = d$ denge noktasına sahip olduğunu kabul edelim. ($f(d) = 0, d \in R$ olsun.)

Bir denge noktasının komşuluğundaki çözüm eğrilerinin t -nin artan değerleri için

- denge noktası komşuluğunda kalması durumunda, denge noktasına kararlı,
- denge noktasına yaklaşması durumunda *asimtotik kararlı* ve
- uzaklaşması durumunda ise *kararsız* denge noktası adı verildiğini hatırlayalım.

Asimtotik kararlı denge noktası durumunda çözüm eğrileri t -nin artan değerleri için denge noktasına yaklaşacağından, sayısal yöntemle elde edilen yaklaşımların da benzer davranışı göstermesini bekleriz.

Diferensiyel denklemler derslerinden, bir nonlinear başlangıç değer probleminin denge noktası komşuluğundaki çözüm eğrilerinin davranışının, *genelde* denge noktasında lineerleştirilmiş başlangıç değer problemi yardımıyla karakterize edildiğini hatırlayalım. (7.1) probleminin $y = d$ noktası komşuluğundaki lineerleştirilmiş

$$y' = f(d) + f'(d)(y - d) = a(y - d)$$

veya $u = y - d$ değişkeni ile

$$\begin{aligned} u' &= au, \\ u(t_1) &= u_1 \end{aligned} \quad (7.2)$$

olarak ifade edilir ($u_1 = y_1 - d$).

Denge noktasının asimtotik kararlı olması $a < 0$ olmasını gerektirir. $t \rightarrow \infty$ için $u \rightarrow 0$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için elde edilen U_n sayısal yaklaşımları için de $U_n \rightarrow 0$ olması beklenir.

7.1.1 Skaler problemler için İleri Euler yönteminin Mutlak Kararlılık analizi

İleri Euler yöntemi (7.2) problemine uygulandığında

$$U_{n+1} = (1 + ah)U_n = (1 + ah)^n U_1 \quad (7.3)$$

elde edilir. $U_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ için ise $|1 + ah| < 1$ olması yani $ah \in (-2, 0)$ olması gerekir.

TANIM 7.1. *Asimtotik kararlı denge noktası komşuluğundaki sayısal çözümün analitik çözümle benzer davranış gösterdiği ve (7.3) deki ah değerlerinin yer aldığı $(-2, 0)$ aralığına ileri Euler yöntemin reel eksen üzerindeki mutlak kararlılık bölgesi adı verilir.*

TANIM 7.2. *$x = ah$ için (7.3) de $1 + ah$ terimine karşılık gelen*

$$K(x) = 1 + x$$

fonksiyonuna ileri Euler yönteminin mutlak kararlılık fonksiyonu adı verilir. $x \in (-2, 0)$ için $|K(x)| < 1$ olup, (7.3) iterasyonu $(-2, 0)$ aralığındaki $x = ah$ değerleri için yakınsar.

Öte yandan mutlak kararlılık bölgesi, ilgili sabit nokta iterasyonunun yakınsaklık kriteri yardımıyla da elde edilebilir. Bunun için Bölüm 4 ten aşağıdaki özelliği hatırlayalım:

Hatırlatma 7.1.

$$U_{n+1} = g(U_n) \quad (7.4)$$

ile tanımlanan iterasyonun g nin bir d sabit noktasına yakınsaması için, d nin yeterince yakın komşuluğunda bulunan U_1 başlangıç değeri ile

$$|g'(d)| < 1$$

kriteri sağlanmalıdır. Ayrıca $0 < g'(d) < 1$ için iterasyon monoton ve $-1 < g'(d) < 0$ için ise iterasyon salınımlı olarak yakınsaktır.

Gözlem 7.1. *(7.3) iterasyonu $g(y) = (1 + ah)y$ ile (7.4) biçiminde ifade edilebilir. O halde $g'(y) = (1 + ah)$ olup, $0 < 1 + ah < 1$ veya $-1 < ah < 0$, yani $0 < h < 1/|a|$ için iterasyon monoton yakınsaktır. Öte yandan $-1 < 1 + ah < 0$ veya $-2 < ah < -1$, yani $1/|a| < h < 2/|a|$ için iterasyon salınımlı yakınsaktır. Sonuç olarak $ah \in (-2, 0)$ için (7.4) iterasyonu U_1 değerinden bağımsız olarak $u = 0$ denge noktasına yakınsaktır.*

Gözlem 7.2. Literatürde mutlak kararlılık analizi lineer model problemler üzerinden gerçekleştirilir. Öte yandan ileri Euler yöntemi doğrudan (7.1) nonlinear problemine uygulandığında,

$$Y_{i+1} = Y_i + hf(Y_i), i = 1, 2, \dots \quad (7.5)$$

$$Y_1 = y(0) \quad (7.6)$$

elde edilir. Bu iterasyona ait iterasyon fonksiyonu

$$g(y) = y + hf(y)$$

olmak üzere, (7.5) iterasyonun yakınsaması için d ye yeterince yakın Y_1 ile

$$|g'(d)| = |1 + hf'(d)| < 1$$

veya $f'(d)h \in (-2, 0)$ seçilmelidir. Eğer Y_1 başlangıç değeri denge noktasına yeterince yakın değilse, bu taktirde her adımda $|g'(Y_i)| < 1$ şartını sağlayacak biçimde

$$h_i f'(Y_i) \in (-2, 0)$$

değişken h_i adım uzunlukları seçilebilir.

ÖRNEK 7.1.

$$y' = y(1 - 50y), y(0) = 5 \quad (7.7)$$

başlangıç değer problemi için

- $y = d = 1/50$ nin asimtotik kararlı bir denge noktası olduğunu gösteriniz,
- söz konusu denge noktası komşuluğundaki lineer modeli belirleyiniz. Lineer modele uygulanan ileri Euler yönteminin
 - monoton olarak yakınsaması ve ayrıca
 - salınımlı olarak yakınsaması için h adım uzunluğu en fazla ne olabilir?

Çözüm.

- $0 < y(0) < 1/50$ için $y' > 0$ (y artan) ve $y(0) > 1/50$ için ise $y' < 0$ (y azalan) dır. O halde $y(0) > 0$ şartı ile başlayan bütün başlangıç değerleri ile elde edilen çözümler $y = d = 1/50$ denge noktasına yakınsamaktadır, dolayısıyla denge noktası asimtotik kararlıdır.

-

$$f(y) = y(1 - 50y)$$

fonksiyonunun $y = d = 1/50$ denge noktası komşuluğundaki seri açılımının lineer terimi

$$f(d) + f'(d)(y - d) = -1(y - 1/50)$$

olup, $u = y - d$ için (7.7) ya karşılık gelen lineer sistemi

$$u' = -u, u(0) = y(0) - d = 5 - 1/50 = 249/50 \quad (7.8)$$

olarak elde ederiz.

- (7.8) için ileri Euler yöntemini uygulayarak,

$$U_{i+1} = U_i + h(-U_i) \quad (7.9)$$

elde ederiz. (7.9) yi

$$g(u) = (1 - h)u$$

sabit fonksiyonu için $U_{i+1} = g(U_i)$ olarak düşünebiliriz.

$$g'(u) = 1 - h$$

ile iterasyonun monoton yakınsaklığı için

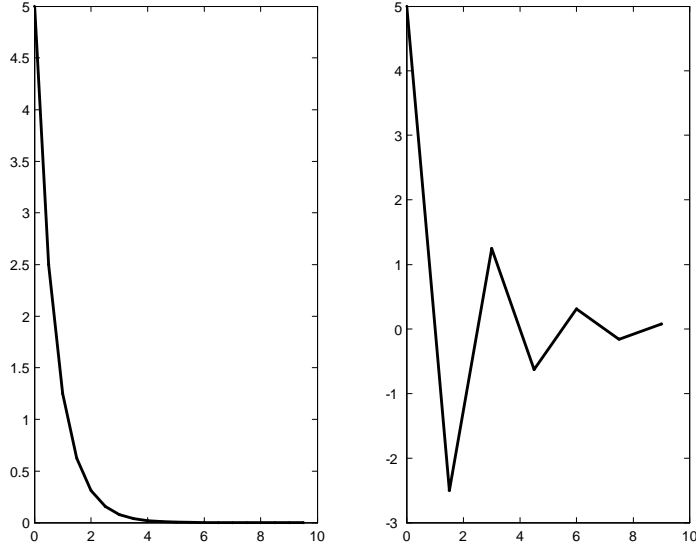
$$0 < 1 - h < 1 \text{ veya } 0 < h < 1$$

sağlanmalıdır.

- Salınlı yakınsama için ise

$$-1 < 1 - h < 0 \text{ veya } 1 < h < 2$$

sağlanmalıdır, Şekil 7.1.1.



\ref{leq77} için $h = 1/2$ ile monoton yakınsama(sol), $h = 3/2$ ile salınımlı yakınsama(sağ).

7.1.2 Skaler problemler için Geri Euler yönteminin Mutlak Kararlılık analizi

Geri Euler yönteminin (7.2) için mutlak kararlılık fonksiyonu ve bölgesini belirleyelim.

Geri Euler yöntemini (7.2) için uygulayarak

$$U_{i+1} = U_i + haU_{i+1}$$

veya

$$\begin{aligned} U_{i+1} &= \frac{1}{1 - ah} U_i \\ &\vdots \\ &= \left(\frac{1}{1 - ah} \right)^i U_1 \end{aligned} \quad (7.10)$$

elde ederiz.

$$g(u) = \frac{1}{1 - ah} u$$

iterasyon fonksiyonu için

$$g'(u) = \frac{1}{1 - ah}$$

olup, $a < 0$ ve $h > 0$ kabulü ile

$$0 < g'(u) < 1$$

eşitsizliği sağlar. O halde h adım uzunluğu üzerinde herhangi bir kısıtlama olmaksızın (7.10) ile tanımlanan iterasyon, $u = 0$ denge çözümüne monoton olarak yakınsar.

(7.10) den, yöntemin iterasyon fonksiyonu

$$K(x) = \frac{1}{1 - x}$$

olarak elde edilir. $x = ah < 0$ için $|K(x)| < 1$ dir. O halde yöntemin mutlak kararlılık bölgesi $(-\infty, 0)$ açık aralıktır.

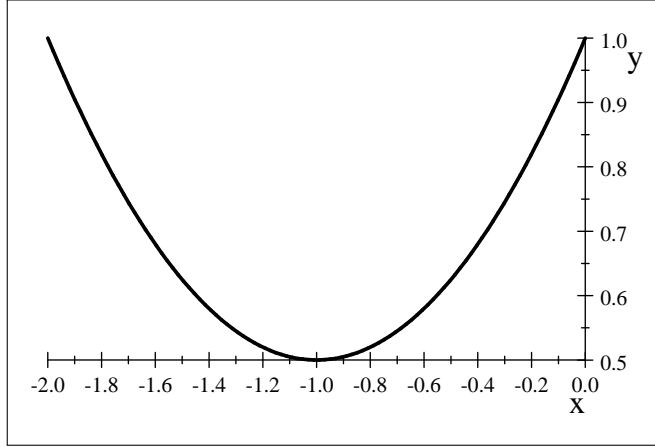
7.1.3 Skaler problemler için Runge-Kutta-II yönteminin Mutlak Kararlılık analizi

Runge-Kutta II yöntemini (7.2) için uygulayarak yöntemin reel eksen üzerindeki mutlak kararlılık bölgesini belirleyelim. Bu amaçla $f(t, u) = au$ ile Runge-Kutta yöntemini uygulayalım:

$$\begin{aligned} m_1 &= f(t_i, U_i) = aU_i \\ m_2 &= f(t_{i+1}, U_i + hm_1) = a(U_i + hm_1) = aU_i + a^2hU_i \\ m &= (m_1 + m_2)/2 = aU_i + a^2hU_i/2 \\ U_{i+1} &= U_i + hm = U_i + ahU_i + a^2h^2U_i/2 \\ &= (1 + ah + a^2h^2/2)U_i \\ &= (1 + ah + a^2h^2/2)^2U_{i-1} \\ &\vdots \\ &= (1 + ah + a^2h^2/2)^iU_1 \end{aligned}$$

elde ederiz. $U_i \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$ için

$$|1 + ah + a^2h^2/2| < 1 \quad (7.11)$$



Şekil 7.1: Runge-Kutta II yönteminin mutlak kararlılık polinomu

eşitsizliği sağlanmalıdır.

(7.1) den, yöntemin iterasyon fonksiyonu

$$K(x) = 1 + x + x^2/2$$

olarak elde edilir. $x = ah < 0$ için $K(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.

$K(x)$ polinomu $[-2, 0]$ aralığında maksimum değerini $x = -2$ ve $x = 0$ noktalarında alır, $K(-2) = K(0) = 1$ dir. O halde (7.11) eşitsizliğinin sağlanması için $x = ah \in (-2, 0)$ olmalıdır. Bu sonuç ileri Euler yöntemiyle elde ettiğimiz sonucun aynısıdır.

7.1.4 Skaler problemler için Yamuk yönteminin Mutlak Kararlılık analizi

Yamuk yöntemini (7.2) için uygulayarak yöntemin reel eksen üzerindeki mutlak kararlılık bölgesini belirleyelim. Bu amaçla $f(t, u) = au$ ile Yamuk yöntemini uygulayalım:

$$\begin{aligned} U_{i+1} &= U_i + h/2(f(t_i, U_i) + f(t_{i+1}, U_{i+1})) \\ &= U_i + h/2(aU_i + aU_{i+1}) \end{aligned}$$

ve

$$(1 - ah/2)U_{i+1} = (1 + ah/2)U_i$$

den

$$\begin{aligned} U_{i+1} &= \frac{(1 + ah/2)}{(1 - ah/2)} U_i, \\ &= \left[\frac{(1 + ah/2)}{(1 - ah/2)} \right]^2 U_{i-1} \\ &\vdots \\ &= \left[\frac{(1 + ah/2)}{(1 - ah/2)} \right]^i U_1 \end{aligned}$$

elde ederiz. $U_i \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$ için

$$\left| \frac{1 + ah/2}{1 - ah/2} \right| < 1$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. O halde yöntemin mutlak kararlılık fonksiyonu

$$K(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$$

dir ve $x < 0$ bölgesindeki grafiği aşağıdaki gibidir ($x = ah/2 < 0$ olduğuna dikkat edelim).

$x < 0$ bölgesinde $|K(x)| < 1$ olup, yamuk yönteminin mutlak kararlılık bölgesi $(-\infty, 0)$ aralığıdır.

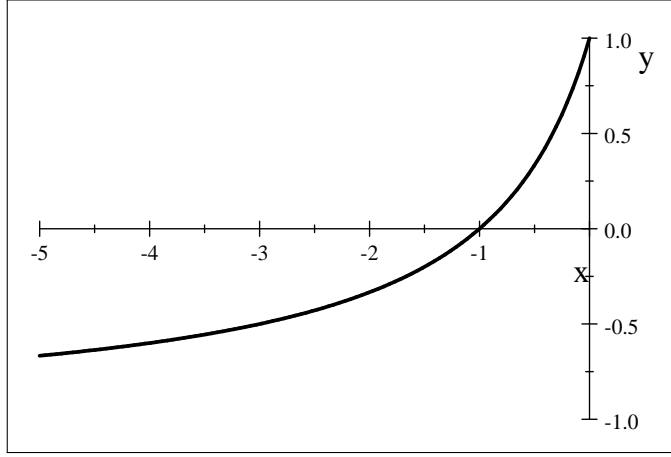
7.2 Sistemler için Mutlak Kararlılık bölgesi

Önceki bölümde verilen bir Başlangıç Değer Problemi için Euler yönteminin mutlak kararlılığını

$$u' = au, a < 0 \quad (7.12)$$

biçiminde asimtotik kararlı denge noktasına ($u = 0$) sahip bir test problem üzerinde incelemiştik. (7.12) problemini, $y = d$ asimtotik kararlı denge noktasına sahip

$$y' = f(y) \quad (7.13)$$



Şekil 7.2: Yamuk yönteminin mutlak kararlılık fonksiyonu

probleminin bu denge noktası komşuluğundaki lineerleştirilmiş olarak değerlendiririz.

Benzer biçimde (x^*, y^*) asimtotik kararlı denge noktasına sahip

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\quad (7.14)$$

nonlineer sistemini göz önüne alarak, sisteme denge noktası komşuluğunda karşılık gelen lineer modeli (7.14) için *model problem* olarak gözönüne alacağız. Söz konusu *model problemi*, $f(x, y)$ ve $g(x, y)$ fonksiyonlarının (x^*, y^*) noktası komşuluğunda Taylor açılımlarının lineer kısımlarını alarak oluşturabiliriz:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) + \dots \\ g(x, y) &= g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) + \dots\end{aligned}$$

açılımlarından $f(x^*, y^*) = 0$, $g(x^*, y^*) = 0$ olduğunu dikkate alarak, (7.14) ye karşılık gelen lineer problemi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\ \frac{dy}{dt} &= g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*)\end{aligned}\quad (7.15)$$

veya

$$U = \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} \text{ ve } \frac{dU}{dt} = \begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= JU \\ U(0) &= U^{(1)} \end{aligned} \quad (7.16)$$

biçiminde lineer ve homojen bir denklem sistemi olarak ifade edebiliriz. (x^*, y^*) asimtotik kararlı denge noktası olduğu için J matrisi reel kısımları negatif olan özdeğerlere sahiptir, dolayısıyla $U = [0, 0]^T$ noktası (7.16) sisteminin asimtotik kararlı denge noktasıdır. Diğer bir deyimle $t \rightarrow \infty$ için $U(t) \rightarrow \mathbf{0}$ dir.

Mutlak kararlılık kriteri (7.16) için uygulanan sayısal yaklaşımların da analitik çözüme benzer davranış göstermesini garanti eder:

7.2.1 Sistemler için İleri Euler yönteminin Mutlak Kararlılık analizi

(7.16) için ileri Euler yöntemi

$$U^{(i+1)} = U^{(i)} + hJU^{(i)} = (I + hJ)U^{(i)} := AU^{(i)}, i = 1, 2, \dots \quad (7.17)$$

olarak ifade edilebilir. Burada A matrisine yöntemin *iterasyon matrisi* adı verilmektedir. (7.17) iterasyonu

$$U^{(i+1)} = A^i U^{(1)}, i = 1, 2, \dots$$

olarak ifade edilebilir. $U^{(i)} \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (A^i) = 0 \quad (7.18)$$

sağlanmalıdır. Hangi durumlarda (7.18) özelliğini sağlanabileceğini görmek amacıyla aşağıdaki tanımları verelim:

TANIM 7.3. λ_i ler J matrisinin özdeğerleri olmak üzere J nin spektral yarıçapı

$$\rho(J) = \max \{|\lambda_i|, i = 1, 2, \dots, n\}$$

olarak tanımlanır.

TEOREM 7.1. *A matrisinin herhangi bir normu için*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (A^i) = 0 \iff \rho(A) < 1$$

dir.

İspat.

A matrisinin farklı özdeğerlere sahip olması durumu için ispatı kolaylıkla verebiliriz. Bu durumda lineer cebirden

$$A = SAS^{-1}$$

spektral ayrışımı mevcuttur, burada Λ , A matrisinin özdeğerlerini içeren köşegen matris, S ise j -inci sütununda $\Lambda(j, j)$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü içeren matristir ($AS = S\Lambda$ olduğunu görmeye çalışınız). Bu durumda

$$A^i = S\Lambda^i S^{-1}$$

elde ederiz. Buradan

$$\rho(A) < 1 \iff \lim_{i \rightarrow \infty} (\Lambda^i) = 0 \iff \lim_{i \rightarrow \infty} (A^i) = 0$$

elde ederiz.

Sonuç 7.1. *(7.17) yönteminin mutlak kararlı olması için, $(U^{(i)} \rightarrow 0, i \rightarrow \infty)$ gerek ve yeter şart h adım uzunluğunun*

$$\rho(A) < 1 \tag{7.19}$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilmiş olmasıdır.

Gözlem 7.3. *Eğer λ, J matrisinin x özvektörüne karşılık gelen bir özdeğeri ise $1 + h\lambda$ da $A = I + hJ$ nin aynı özvektöre karşılık gelen özdeğeri olduğunu kontrol ediniz (Alıştırma 8).*

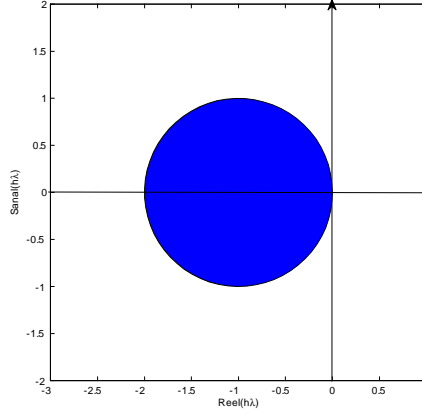
Gözlem 7.4. *$J_{n \times n}$ matrisinin λ özdeğerleri karmaşık sayılar olabileceğinden $z = h\lambda$ olmak üzere (7.19) eşitsizliği*

$$K(z) = 1 + z$$

mutlak kararlılık fonksiyonu olmak üzere

$$|K(z)| = |z + 1| = |z - (-1)| < 1$$

bölgesi içerisinde sağlanır.



Şekil 7.3: İleri Euler yönteminin mutlak kararlılık bölgesi

O halde yöntemin diferensiyel denklem sistemleri için mutlak kararlı olmasını istiyorsak, λ_i ler J matrisinin özdeğerleri olmak üzere h adım uzunluğunu $z_i = h\lambda_i$ lerin herbiri, -1 merkezli birim yarıçaplı çember içerisinde olacak biçimde seçmeliyiz. Bu durumda

$$R(z) = \{z = h\lambda \in C, |z - (-1)| < 1\}$$

olarak tanımlanan ve Şekil 7.3 de gösterilen disk ileri Euler yönteminin *mutlak kararlılık bölgesi*dir.

Gözlem 7.5. $R(z)$ diskinin reel eksen üzerindeki kısmı, skaler problemler için ileri Euler yönteminin mutlak kararlılık bölgesi yukarıda elde edildiği üzere $(-2, 0)$ aralığıdır.

ÖRNEK 7.2.

$$\begin{aligned} x' &= 18x - 19y \\ y' &= 38x - 39y \\ x(0) &= 1, y(0) = 10 \end{aligned}$$

başlangıç değerleri verilmiş olsun.

- Verilen başlangıç değer probleminin analitik çözümünü ve
- İleri Euler yöntemini verilen sisteme uygulayarak, $X^{(i+1)} = AX^{(i)}$ olacak biçimdeki A matrisini belirleyelim.

- λ_i ler A nın özdeğerleri olmak üzere, $\rho(A) = \max(|\lambda_i|, i = 1, 2) < 1$ için h en fazla ne olabilir?
- $h = 0.01$ ve $h = 0.1$ adım uzunlukları ile Euler yaklaşımlarının $x - y$ düzlemindeki grafiğini çizdiriniz. Ne gözlemliyorsunuz? Neden?
- $h = 0.01$ ve $h = 0.1$ adım uzunlukları ve artan k değerleri için MATLAB/Octave ortamında $\|A^k\|$ normlarını hesaplayınız. Hangi h için $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$ dir.

Çözüm.

- $J = \begin{bmatrix} 18 & -19 \\ 38 & -39 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -20$ ve karşılık gelen özvektörleri ise sırasıyla

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dir. O halde verilen problemin genel çözümü

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-20t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dir. $x(0) = 1, y(0) = 10$ başlangıç şartlarını sağlayan çözüm ise

$$\begin{aligned} x(t) &= -8e^{-t} + 9e^{-20t} \\ y(t) &= -8e^{-t} + 18e^{-20t} \end{aligned}$$

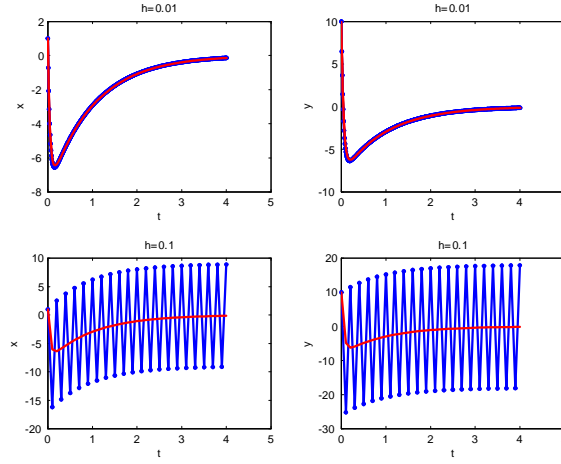
olarak elde edilir.

- İleri Euler yönteminden

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h(18x_i - 19y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h(38x_i - 39y_i) \\ x_1 &= 1, y_1 = 10 \end{aligned}$$

elde ederiz. Vektör-matris notasyonu yardımıyla bu sistem

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + 18h & -19h \\ 38h & 1 - 39h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + 18h & -19h \\ 38h & 1 - 39h \end{bmatrix}^{i+1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Şekil 7.4: Örnek 7.2 için farklı adım uzunlukları ile İleri Euler yaklaşımları

olarak ifade edilebilir. O halde

$$A = I + hJ = \begin{bmatrix} 1 + 18h & -19h \\ 38h & 1 - 39h \end{bmatrix}$$

ve

$$X^{(i+1)} = AX^{(i)} = A^{i+1}X^{(1)}$$

elde ederiz.

- $A = I + hJ$ olduğundan $\lambda(A) = 1 + h\lambda(J)$ dir. O halde $\lambda_1 = 1 - h$, $\lambda_2 = 1 - 20h$ olup,

$$|\lambda_1| < 1 \Rightarrow 0 < h < 2$$

ve

$$|\lambda_2| < 1 \Rightarrow 0 < h < 1/10$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla kararlı yöntem için her iki kısıtlamayı sağlayan $h < 1/10$ kriteri sağlanmalıdır.

- $h = 0.01$ ve $h = 0.1$ adım uzunluğu ile $x(t), y(t)$ gerçek çözümleri(çizgi) ve Euler yaklaşımları(-o) Şekil 7.4 de sırasıyla üst ve alt satırda görülmektedir.

•

	$h = 0.01$	$h = 0.1$
	$A = \begin{bmatrix} 1.1800 & -0.1900 \\ 0.3800 & 0.6100 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 2.8000 & -1.9000 \\ 3.8000 & -2.9000 \end{bmatrix}$
k	$\ A^k\ _\infty$	$\ A^k\ _\infty$
1	1.3700	6.7000
2	1.6603	1.5700
4	2.0626	2.0317
8	2.4327	2.7086
16	2.4981	3.4441
32	2.1734	3.8970
64	1.5768	3.9965
128	0.8288	4.0000
256	0.2289	4.0000

Tablo 7.1: A matrisleri ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|$ normları

- h adım uzunluğunun mutlak kararlılık kriterine uymaması durumunda elde edilen yaklaşımların gerçek çözüm etrafında salınım yaptıklarını ve artan t değerleri için genliklerinin yuvarlama hatalarından dolayı arttığına dikkat edelim.
- A matrisleri ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|$ normları Tablo 7.1 de sunulmaktadır. $h = 0.01$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$ iken $h = 0.1$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 4 \neq 0$ olduğu görülmektedir.

Hatırlatma 7.2. h adım uzunluğu üzerindeki kısıtlama belirlerken, λ değerlerini h cinsinden ifade ederek, $|\lambda| < 1$ kriterini kullandık. Ancak λ değerlerini belirlemek yerine, λ değerlerini içeren aralığı tahmin etmek suretiyle de h adım uzunluğu üzerindeki kısıtlama belirlenebilir. λ değerlerini tahmin etmek için ise aşağıda ifade edilen Gershgorin çember teoremi kullanılabilir.

TEOREM 7.2. (Gershgorin Çember Teoremi) $A_{n \times n}$ matrisinin bütün özdeğerleri, a_{ii} merkezli ve $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ yarıçaplı

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

disklerinin birleşimi olan $C = \cup C_i, i = 1, 2, \dots, n$ bölgesinde yer alır.

ÖRNEK 7.3. *Gershgorin Çember Teoremi yardımıyla reel özdeğerlere sahip olan*

$$J = \begin{bmatrix} 18 & -19 \\ 38 & -39 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerlerinin yer aldığı aralıkları belirleyiniz.

Çözüm.

Gershgorin teoremine göre özdeğerler $|z - 18| \leq 19$ ve $|z - (-39)| \leq 38$ diskleri içersinde yer alırlar. Ancak özdeğerler bu örnek için reel olduğundan reel sayılar kümesinin

$$|x - 18| \leq 19 \text{ ve } |x - (-39)| \leq 38$$

eşitsizlikleri ile belirlenen aralıkları içerisinde yer alırlar. Buradan özdeğerlerin

$$-19 \leq x - 18 \leq 19 \Rightarrow -1 \leq x \leq 37$$

ve

$$-38 \leq x + 39 \leq 38 \Rightarrow -77 \leq x \leq -1$$

aralıklarının birleşimi olan $[-77, 37]$ aralığı içerisinde olduğunu tahmin ederiz. Yukarıdaki örnekten özdeğerlerin $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -20$ olduğunu biliyoruz. O halde Gershgorin çember teoremi yardımıyla elde ettiğimiz tahmin doğrudur. Ancak elde edilen aralığın özdeğerleri içeren ve fakat oldukça geniş bir aralık olduğuna dikkat edelim.

Sonuç 7.2. *$A = I + hJ$ matrisinin özdeğerleri $[1 - 77h, 1 + 37h]$ aralığında yer alırlar. $h > 0$ olduğundan $\rho(A) < 1$ olması için bu aralık tahmininden elde edebileceğimiz kısıtlama $|1 - 77h| < 1$, yani $-1 < 1 - 77h < 1$ veya $h < 2/77 = 0.0260$ dir.*

Gözlem 7.6. *Gershgorin teoremi yardımıyla özdeğerlerin bulunduğu aralığı tahmin etmek suretiyle h adım uzunluğu üzerinde elde ettiğimiz bu kısıtlama, gerçek özdeğerlerden hareketle yukarıda elde ettiğimiz $h < 1/10$ kısıtlaması kadar hassas değildir. Ancak özdeğerleri belirleme zorunluluğu getirmediği için pratik bir kısıtlamadır, gerek olmasa da bir yeter şarttır.*

ÖRNEK 7.4. Birbiriyle rekabet içerisinde yaşayan Lotka-Volterra canlı nüfus modelini gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= aN_1 - bN_1N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} &= -cN_2 + dN_1N_2 \\ N_1(0) &= N_{10}, N_2(0) = N_{20}\end{aligned}\quad (7.20)$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

- Problemin kritik noktalarını belirleyerek, her bir kritik noktanın asimtotik kararlı olup olmadığını araştırınız.
- $a = -1; b = 2; c = 3; d = 1$ parametre değerleri için $r = 2$ çemberi üzerinden başlayan çözüm eğrilerinin grafiğini sistemler için ileri Euler yöntemi yardımıyla elde ediniz.
- $(0, 0)$ denge noktası komşuluğundaki lineer sistemin ileri Euler yöntemi ile elde edilen ve $(0, 0)$ denge noktasına yakınsaması için h adım uzunluğu en fazla ne olabilir?

Çözüm.

Sistemin denge noktaları denklemin sağ tarafı sıfıra eşitlenerek elde edilebilir. Buna göre

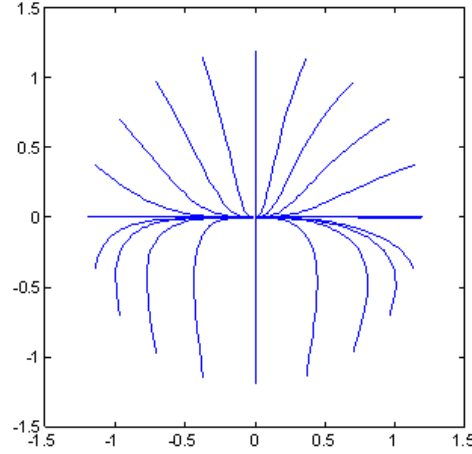
$$\begin{aligned}aN_1 - bN_1N_2 &= 0 \\ -cN_2 + dN_1N_2 &= 0\end{aligned}$$

denklemler çözülerek $(0, 0), (c/d, a/b)$ denge noktaları elde edilir. Sisteme ait Jacobien matrisi

$$J = \begin{bmatrix} a - bN_2 & -bN_1 \\ dN_2 & -c + dN_1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

- $(N_1, N_2) = (0, 0)$ denge noktası $a < 0$ ve $c > 0$ için hem lineerleştirilmiş ve hem de orjinal problemin asimtotik kararlı bir noktasıdır.



Şekil 7.5: Örnek 7.3 de belirtilen başlangıç değerleri ile $(x(t), y(t))$ çözümlerinin eğrileri

- $(N_1, N_2) = (c/d, a/b)$ noktasında ise

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -bc/d \\ ad/b & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Özdeğerler $\lambda^2 + ac = 0$ denklemini sağlar ve $ac > 0$ olması durumunda özdeğerler $\lambda_1 = i\sqrt{ac}, \lambda_2 = -i\sqrt{ac}$ karmaşık sayılardır. Bu durumda denge noktası lineerleştirilmiş problemin merkez noktasıdır ve karşılık gelen nonlinear problem için hiçbir bilgi vermez. $ac < 0$ olması durumunda ise denge noktası kararsız eyer noktasıdır.

- İki birim yarıçaplı çember üzerinde başlayan çözümler $a = -1 < 0$ ve $c = 3 > 0$ olduğundan $(0, 0)$ denge noktasına yakınsarlar. Euler yöntemi ile $h = 0.1$ için elde edilen sonuçlar Şekil 7.5 de sunulmaktadır.

- $(0, 0)$ denge noktasında

$$J = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$$

olup, $a < 0, c > 0$ için özdeğerler $\lambda_1 = a < 0, \lambda_2 = -c < 0$ dir. Bu durumda lineerleştirilmiş problemin iterasyon matrisi $A = I + hJ$ nin

özdeğerleri $\lambda_1 = 1 + ha, \lambda_2 = 1 - hc$ dir. $\rho(A) = \max(|1 + ha|, |1 - hc|) < 1$ için $h < \min(2/|a|, 2/c)$ olmalıdır.

7.2.2 Sistemler için Runge-Kutta II ve IV yöntemlerinin Mutlak Kararlılık analizi

Sistemler için RKII yönteminin mutlak kararlılık bölgesi reel kısımları negatif olan özdeğerlere sahip (7.16) model problemini gözönüne alalım. Model probleme RKII yöntemini uygulayarak

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= F(t, U) = JU, \\ U(0) &= U^{(1)}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}M1 &= F(t_i, U^{(i)}) = JU^{(i)} \\ M2 &= F(t_i + h, U^{(i)} + hM1) = J(U^{(i)} + hM1) = JU^{(i)} + hJ^2U^{(i)}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}U^{(i+1)} &= U^{(i)} + h/2(M1 + M2) \\ &= U^{(i)} + h/2(JU^{(i)} + JU^{(i)} + hJ^2U^{(i)}) \\ &= (I + hJ + \frac{h^2}{2}J^2)U^{(i)}\end{aligned}$$

elde ederiz.

$$A = f(J) = I + hJ + \frac{h^2}{2}J^2$$

olmak üzere RKII iterasyonlarını

$$U^{(i+1)} = AU^{(i)} = A^{i+1}U^{(1)}$$

olarak yazabiliriz. Genel olarak λ, J matrisinin bir v vektörüne karşılık gelen öz değeri ve p bir polinom ise, $p(\lambda)$ da $A = p(J)$ matrisinin aynı özvektöre karşılık gelen özdeğeridir (Aıştırma 8). Buna göre $1 + h\lambda + \frac{h^2}{2}\lambda^2$ de A matrisinin özdeğeridir.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A^i = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$$

O halde A nın her bir özdeğerinin mutlak değerce birim disk içerisinde olmasını, yani

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{h^2}{2}\lambda^2 \right| < 1 \quad (7.21)$$

olmasını isteriz. λ lar karmaşık sayılar olabileceğinden (7.21) eşitsizliği ise,

$$K(z) = 1 + z + z^2/2$$

yöntemin mutlak kararlılık polinomu olmak üzere,

$$R(z) = \{z \in C : |K(z)| < 1\}$$

kümesi içerisinde yer alır ve bu kümeye de RKII yönteminin mutlak kararlılık bölgesi adı verilir ve bu bölge grafiksel olarak Şekil (7.6) de gösterilmektedir.

RKIV yönteminin de mutlak kararlılık bölgesi benzer biçimde belirlenebilir. Bu durumda mutlak kararlılık polinomu

$$K(z) = 1 + z + z^2/2 + z^3/6$$

dır (Alıştırma 12).

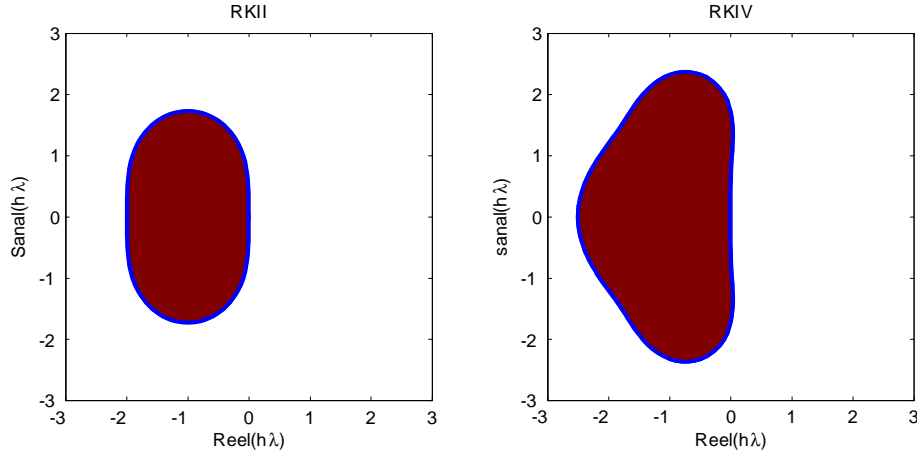
RKII ve RKIV yöntemlerinin mutlak kararlılık bölgeleri sırasıyla $|1 + z + z^2/2| < 1$ ve $|1 + z + z^2/2 + z^3/6| < 1$ ile tanımlı olup Şekil 7.6 de grafiksel olarak görülmektedir.

TANIM 7.4. (Mutlak kararlı yöntem) Mutlak kararlılık bölgesi sol yarı düzlemi içeren yöntem mutlak kararlı sayısal yöntem adı verilir.

Gözlem 7.7. Yukarıdaki tanıma göre Geri Euler yöntemi ve Yamuk yöntemi mutlak kararlı (absolutely stable: A-stable) yöntemlerdir, ancak ileri Euler ve Runge-Kutta yöntemleri ise mutlak kararlı yöntemler değildirler.

Çok adım yöntemlerinin mutlak kararlılık bölgelerini belirlemek amacıyla pratik kriterler mevcuttur (bknz [?]), ancak söz konusu yöntemlerin mutlak kararlılık analizine bu çalışmanın hacmini sınırlı tutmak amacıyla yer veremiyoruz.

Alıştırmalar 7.1.



Şekil 7.6: RKII ve RKIV yöntemlerinin mutlak kararlılık bölgeleri

1. $A = \begin{bmatrix} -15 & 5 \\ 5 & -15 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.
2. Gersgorin teoremi yardımıyla simetrik olan A matrisinin özdeğerlerini içeren en küçük uzunluklu aralığı belirleyiniz.
3. Soru 1 de verilen A matrisi için

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= AU, \\ U(0) &= (10, 5)^T \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümünü belirleyiniz.

4. İleri Euler yöntemini Soru 3 de verilen sisteme uygulayarak

$$U^{(i+1)} = BU^{(i)}, i = 0, 1, \dots$$

fark denklemini sağlayan B iterasyon matrisini belirleyiniz.

5. Soru 3 teki A matrisinin özdeğerlerini içeren aralığı Gersgorin teoremi yardımıyla belirleyiniz. Soru 3 te verilen iterasyonun mutlak kararlı olması için h üzerindeki kısıtlamayı belirleyiniz.
6. Soru 3 ve 4 ü RKII yöntemi için tekrarlayınız. (Not: J nin özdeğerlerinin reel olduğu dikkate alınınız.)

7. Soru 3 ve 4 i RKIV yöntemi için tekrarlayınız.
8. Eğer λ , J matrisinin bir v vektörüne karşılık gelen özdeğeri ve

$$p(t) = a_0 + a_1t + \dots a_nt^n$$

bir polinom ise, $p(\lambda)$ da

$$A = p(J) = a_0I + a_1J + \dots + a_nJ^n$$

matrisinin aynı özvektöre karşılık gelen özdeğeri olduğunu gösteriniz.

9. Soru 8 in bir sonucu olarak $A = I + hJ$ matrisi için $\rho(A) = 1 + h\rho(J)$ olduğunu gösteriniz.
10. İleri Euler ve RKII ve RKIV yöntemleri için sırasıyla Şekil ?? ve Şekil ?? de verilen mutlak kararlılık bölgelerini karşılaştırınız. Hangi yöntem adım uzunluğunun diğerlerine göre kısmen de olsa biraz daha büyük seçilebilmesine izin vermektedir? Gözlemınız Soru 5,6, ve 7 de elde ettiğiniz tahminlerle uyumlu mu?

11.

$$y' = ay, y(0) = y_1 \in R, a < 0$$

model problemi için Runge-Kutta IV yönteminin kararlılık polinomu ve reel eksenindeki kararlılık bölgesini belirleyiniz.

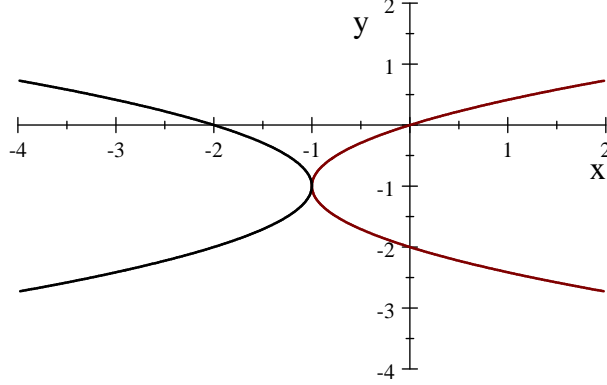
12.

$$\frac{dU}{dt} = JU, U(0) = U^{(1)} \in R^n$$

sistemi için Runge-Kutta IV yönteminin mutlak kararlılık polinomunu belirleyerek, mutlak kararlılık bölgesinin Şekil (7.6) de belirtildiği gibi olduğunu kontrol ediniz.

13. Soru 2 de verilen başlangıç değer problemini sistemler için verilen İleri Euler, RKII ve RKIV programları yardımıyla Soru 4,5, ve 6 da elde ettiğiniz maksimum adım uzunluklarıyla $[0, 2]$ aralığında çözünüz.

(a) Aşağıda grafikleri verilen $(y + 1)^2 = x + 1$ ve $(y + 1)^2 = -x - 1$ parabollerinin $y^2 = x$ ve $y^2 = -x$ parabollerinden uygun ötelemeler yardımıyla elde edildiğini ve $(-1, -1)$ arakesit noktasına sahip olduklarını gösteriniz.



(b) (a) şıkkı yardımıyla

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (y + 1)^2 - (x + 1) \\ \frac{dy}{dt} &= (y + 1)^2 + (x + 1)\end{aligned}$$

denklem sisteminin $(-1, 1)$ denge noktasına sahip olduğunu gösteriniz.

(c) Verilen sistemin sayısal çözümünü RK4 yöntemi yardımıyla $[0, 7]$ aralığında $h = 0.1$ adım uzunluğu ile elde ediniz. Çözüm bileşenleri elde ettiğiniz denge noktasına yaklaşıyor mu? Neden?

14. (a) Aşağıda grafikleri verilen $-x^2 + y^2 = 0$, $-x^2 - y^2 + 1/2 = 0$ eğrilerinin arakesit noktalarını belirletin.

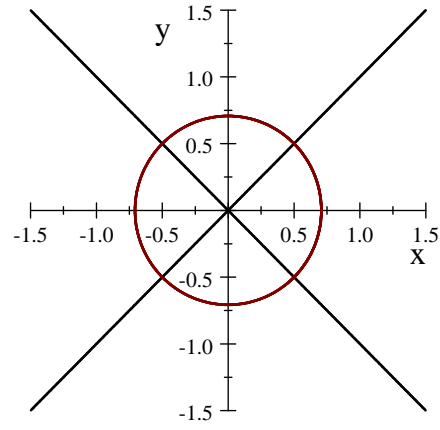
(b) (a) şıkkı yardımıyla

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x^2 + y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -x^2 - y^2 + 1/2\end{aligned}$$

denklem sisteminin denge noktalarını belirleyiniz.

(c) Sistemin her bir denge noktasındaki Jacobien matrisini bularak, özdeğerlerden hareketle denge noktalarının karakterlerini belirleyiniz.

(d) Her bir denge noktası için $(-1, 1), (1, 1), (1, -1), (-1, -1)$ başlangıç değerleri ve $h = 0.1$ adım uzunluğu RK4 yöntemi yardımıyla çözümlerin davranışını inceleyiniz. Hangi başlangıç noktası ile elde edilen



çözüm denge noktasına yakınsamaktadır? Elde ettiğiniz sonuç denge noktalarının karakteri ile uyumlu mu?