Taylor polinomları ile yaklaşım ve hata

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Kasım, 2018

Taylor polinomları ile yaklaşım

Bu bölümde

- Kuvvet serisi, yakınsaklık yarıçapı ve bölgesi kavramlarını hatırlayacağız.

Taylor polinomları ile yaklaşım

Bu bölümde

- Kuvvet serisi, yakınsaklık yarıçapı ve bölgesi kavramlarını hatırlayacağız.
- Bir fonksiyonun bir nokta komşuluğundaki Taylor seri açılımını inceleyerek, benzer fonksiyonların Taylor seri açılımlarının nasıl belirlenebileceğini inceleyeceğiz.

Taylor polinomları ile yaklaşım

Bu bölümde

- Kuvvet serisi, yakınsaklık yarıçapı ve bölgesi kavramlarını hatırlayacağız.
- Bir fonksiyonun bir nokta komşuluğundaki Taylor seri açılımını inceleyerek, benzer fonksiyonların Taylor seri açılımlarının nasıl belirlenebileceğini inceleyeceğiz.
- Bir fonksiyona verilen bir nokta komşuluğunda Taylor polinomu ile yaklaşım sonucu oluşan hatayı inceleyeceğiz.

Taylor polinomları ile yaklaşım

Bu bölümde

- Kuvvet serisi, yakınsaklık yarıçapı ve bölgesi kavramlarını hatırlayacağız.
- Bir fonksiyonun bir nokta komşuluğundaki Taylor seri açılımını inceleyerek, benzer fonksiyonların Taylor seri açılımlarının nasıl belirlenebileceğini inceleyeceğiz.
- Bir fonksiyona verilen bir nokta komşuluğunda Taylor polinomu ile yaklaşım sonucu oluşan hatayı inceleyeceğiz.
- Taylor polinomlarının gerekliliği üzerinde duracağız.

Taylor polinomları ile yaklaşım

Bu bölümde

- Kuvvet serisi, yakınsaklık yarıçapı ve bölgesi kavramlarını hatırlayacağız.
- Bir fonksiyonun bir nokta komşuluğundaki Taylor seri açılımını inceleyerek, benzer fonksiyonların Taylor seri açılımlarının nasıl belirlenebileceğini inceleyeceğiz.
- Bir fonksiyona verilen bir nokta komşuluğunda Taylor polinomu ile yaklaşım sonucu oluşan hatayı inceleyeceğiz.
- Taylor polinomlarının gerekliliği üzerinde duracağız.
- Taylor polinomunun bir nokta veya nokta kümesi üzerindeki değer veya değerlerinin nasıl hesaplanabileceğini Horner yöntemi yardımıyla inceleyeceğiz.

Taylor polinomları ile yaklaşım

Bu bölümde

- Kuvvet serisi, yakınsaklık yarıçapı ve bölgesi kavramlarını hatırlayacağız.
- Bir fonksiyonun bir nokta komşuluğundaki Taylor seri açılımını inceleyerek, benzer fonksiyonların Taylor seri açılımlarının nasıl belirlenebileceğini inceleyeceğiz.
- Bir fonksiyona verilen bir nokta komşuluğunda Taylor polinomu ile yaklaşım sonucu oluşan hatayı inceleyeceğiz.
- Taylor polinomlarının gerekliliği üzerinde duracağız.
- Taylor polinomunun bir nokta veya nokta kümesi üzerindeki değer veya değerlerinin nasıl hesaplanabileceğini Horner yöntemi yardımıyla inceleyeceğiz.
- İki değişkenli fonksiyonların Taylor açılımını ve söz konusu açılımlar yardımıyla bilgisayar ortamında gerçekleştirilen aritmetik işlemlerde oluşan yuvarlama hatalarının nasıl birikeceğini inceleyeceğiz.

Taylor polinomları ile yaklaşım

Bu bölümde

- Kuvvet serisi, yakınsaklık yarıçapı ve bölgesi kavramlarını hatırlayacağız.
- Bir fonksiyonun bir nokta komşuluğundaki Taylor seri açılımını inceleyerek, benzer fonksiyonların Taylor seri açılımlarının nasıl belirlenebileceğini inceleyeceğiz.
- Bir fonksiyona verilen bir nokta komşuluğunda Taylor polinomu ile yaklaşım sonucu oluşan hatayı inceleyeceğiz.
- Taylor polinomlarının gerekliliği üzerinde duracağız.
- Taylor polinomunun bir nokta veya nokta kümesi üzerindeki değer veya değerlerinin nasıl hesaplanabileceğini Horner yöntemi yardımıyla inceleyeceğiz.
- İki değişkenli fonksiyonların Taylor açılımını ve söz konusu açılımlar yardımıyla bilgisayar ortamında gerçekleştirilen aritmetik işlemlerde oluşan yuvarlama hatalarının nasıl birikeceğini inceleyeceğiz.
- Detaylı bilgi için döküman sonunda belirtilen referanslara başvurulmasını tavsiye ederiz .

Kuvvet serisi ve yakınsaklık aralığı

- $a,\ c_n \in R,\ n = 0, 1, \cdots$ sabitleri ve keyfi $x \in R$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n := c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \qquad (1)$$

ifadesine a merkezli ve sabit katsayılı bir kuvvet serisi adı verilir.

Kuvvet serisi ve yakınsaklık aralığı

- $a,\ c_n \in R,\ n = 0, 1, \cdots$ sabitleri ve keyfi $x \in R$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n := c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \qquad (1)$$

ifadesine a merkezli ve sabit katsayılı bir kuvvet serisi adı verilir.

- $$S_N(x) := \sum_{n=0}^{N} c_n(x-a)^n$$

olmak üzere,

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} S_N(x)$$

limitine (1) **serisinin x noktasındaki toplamı** adı verilir. Eğer bir x noktasında serinin toplamı sonlu ise seriye söz konusu noktada **yakınsak**, diğer durumda ise **ıraksaktır** denir.

Kuvvet serisi ve yakınsaklık aralığı

- Oran testi ile

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n}\right| = |x-a|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1 \qquad (2)$$

için (1) serisi x noktasında yakınsaktır.

Kuvvet serisi ve yakınsaklık aralığı

- Oran testi ile

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n}\right| = |x-a| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1 \qquad (2)$$

için (1) serisi x noktasında yakınsaktır.

- Eğer $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 0$, (1) her $x \in (-\infty, \infty)$ için yakınsaktır. Bu durumda (1) serisinin yakınsaklık yarıçapı sonsuz ve yakınsaklık aralığı ise $(-\infty, \infty)$ aralığıdır.

Kuvvet serisi ve yakınsaklık aralığı

- Oran testi ile

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n}\right| = |x-a|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1 \qquad (2)$$

için (1) serisi x noktasında yakınsaktır.

- Eğer $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 0$, (1) her $x \in (-\infty, \infty)$ için yakınsaktır. Bu durumda (1) serisinin yakınsaklık yarıçapı sonsuz ve yakınsaklık aralığı ise $(-\infty, \infty)$ aralığıdır.
- Eğer $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \infty$ ise, (1) serisi $x = a$ noktası dışında hiçbir noktada yakınsak değildir. Bu durumda (1) serisinin yakınsaklık yarıçapı sıfırdır ve yakınsaklık aralığı mevcut değildir.

Kuvvet serisi ve yakınsaklık aralığı

- Eğer $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ mevcut, sonlu ve sıfırdan farklı ise bu limiti $1/R$ ile gösterelim. Bu durumda (2) ve oran testi yardımıyla (1) serisi

$$|x-a|/R<1$$

eşitsizliğini sağlayan x değerleri, yani $x\in(a-R,a+R)$ için yakınsaktır. $x=a-R$ ve $x=a+R$ noktalarındaki yakınsaklık durumu farklı kriterler yardımıyla belirlenerek, yakınsaklık bölgesi adı verilen ve yakınsamanın gerçekleştiği noktalar kümesi belirlenebilir.

Kuvvet serisi ve fonksiyon

- *Yakınsaklık aralığı içerisinde kuvvet serisi bir fonksiyon tanımlar*:

Kuvvet serisi ve fonksiyon

- *Yakınsaklık aralığı içerisinde kuvvet serisi bir fonksiyon tanımlar*:
- x noktası (1) serisinin yakınsaklık bölgesi içerisinde bir nokta olmak üzere,

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, x \in (a-R, a+R) \tag{3}$$

- *Yakınsaklık aralığı içerisinde kuvvet serisi bir fonksiyon tanımlar*:
- x noktası (1) serisinin yakınsaklık bölgesi içerisinde bir nokta olmak üzere,

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, x \in (a-R, a+R) \tag{3}$$

- veya açıkça yazmak gerekirse

$$f(x) := c_0 + c_1 (x-a) + \cdots + c_n (x-a)^n + \cdots$$

ifadesinden yakınsaklık aralığı içerisinde terim terime türev alınabileceği kuralını kullanarak,

Taylor serisi

$$c_0 = f(a), c_1 = f'(a), c_2 = f''(a)/2!, \cdots, c_n = f^{(n)}(a)/n! \qquad (4)$$

elde ederiz.

- (4) ile verilen c değerleri (3) de yazılarak,

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, x \in (a-R, a+R) \qquad (5)$$

ile tanımlanan f fonksiyonunun $x = a$ noktası merkezli **Taylor serisi** veya "**Taylor açılımı**" elde edilir.

$$c_0 = f(a), c_1 = f'(a), c_2 = f''(a)/2!, \cdots, c_n = f^{(n)}(a)/n! \tag{4}$$

elde ederiz.

- (4) ile verilen c değerleri (3) de yazılarak,

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, x \in (a-R, a+R) \tag{5}$$

  ile tanımlanan f fonksiyonunun $x = a$ noktası merkezli **Taylor serisi** veya "**Taylor açılımı**" elde edilir.

- Örnek olarak $x = 0$ noktası komşuluğunda $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1)$

Taylor serisi

- Örnek olarak $x = 0$ noktası komşuluğunda

Taylor serisi

- Örnek olarak $x = 0$ noktası komşuluğunda
  - $e^x = 1 + x + x^2/2! + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!, x \in (-\infty, \infty)$

Taylor serisi

- Örnek olarak $x = 0$ noktası komşuluğunda
  - $e^x = 1 + x + x^2/2! + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!, x \in (-\infty, \infty)$
  - $\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!, x \in (-\infty, \infty)$

Taylor serisi

- Örnek olarak $x = 0$ noktası komşuluğunda
  - $e^x = 1 + x + x^2/2! + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!, x \in (-\infty, \infty)$
  - $\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!, x \in (-\infty, \infty)$
  - $cos(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}/(2n)!, x \in (-\infty, \infty)$

Bilinen Taylor açılımları yardımıyla benzer fonksiyonların açılımları

- $x = 0$ noktası komşuluğunda bilinen Taylor açılımlarını kulalnarak, benzer fonksiyonların Taylor açılımlarını belirleyebiliriz:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \\
\frac{2}{3+4x} &= \frac{2}{3(1+\frac{4}{3}x)} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{4}{3}x + (\frac{4}{3}x)^2 - \cdots\right)
\end{aligned}$$

Bilinen Taylor açılımları yardımıyla benzer fonksiyonların açılımları

- $x = 0$ noktası komşuluğunda bilinen Taylor açılımlarını kulalnarak, benzer fonksiyonların Taylor açılımlarını belirleyebiliriz:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
&\Longrightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \\
\frac{2}{3+4x} &= \frac{2}{3(1+\frac{4}{3}x)} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{4}{3}x + (\frac{4}{3}x)^2 - \cdots\right)
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots \\
&\Longrightarrow e^{-x} = 1 - x + x^2/2! - x^3/3! + \cdots \\
&\Longrightarrow e^{-x^2} = 1 - x^2 + x^4/2! - x^6/3! + \cdots
\end{aligned}
$$

Bilinen Taylor açılımları yardımıyla benzer fonksiyonların açılımları

- Yakınsaklık bölgesi içerisinde Taylor serisi terim terim türev veya integre edilebilir.

Bilinen Taylor açılımları yardımıyla benzer fonksiyonların açılımları

- Yakınsaklık bölgesi içerisinde Taylor serisi terim terim türev veya integre edilebilir.
- Bu işlem yardımıyla elde edilen serinin yakınsaklık bölgesi de orijinal serinin yakınsaklık aralığı ile aynıdır.

Bilinen Taylor açılımları yardımıyla benzer fonksiyonların açılımları

- Yakınsaklık bölgesi içerisinde Taylor serisi terim terim türev veya integre edilebilir.
- Bu işlem yardımıyla elde edilen serinin yakınsaklık bölgesi de orijinal serinin yakınsaklık aralığı ile aynıdır.
- Buna göre

$$\ln(1+x)$$

fonksiyonunun $x=0$ komşuluğundaki Taylor seri açılımı,

$$\frac{1}{1+x}$$

fonksiyonunun açılımının terim terime integrali yardımıyla elde edilebilir.

Bilinen Taylor açılımları yardımıyla benzer fonksiyonların açılımları

- Örnekleri inceleyelim

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, x \in (-1,1) \\
&\Longrightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, x \in (-1,1] \\
\frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \\
&\Longrightarrow \arctan(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots
\end{aligned}
$$

Taylor Teoremi

Theorem

(Taylor teoremi) $f \in C^{n+1}[a,b]$, *ve* $x_0 \in (a,b)$ *seçilsin. Bu taktirde*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{6}$$

olarak ifade edilir. Burada $P_n(x)$, f *nin* x_0 *noktası koşluğundaki* $n-$ *inci dereceden Taylor polinomu:*

$$P_n(x) := f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0$$

ve

$$R_n(x) := \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(t-x_0)^n dt$$

kalan terimdir veya alternatif olarak

$$R_n(x) = (x-x_0)^{n+1}/(n+1)!f^{(n+1)}(c_x),$$

Taylor yaklaşım polinomunun derecesini tahmin edebiliriz

- $f(x) = e^x$ fonksiyonuna $[-1, 1]$ aralığında $\epsilon = 0.1$ den küçük kesme hatası ile $x_0 = 0$ noktası komşuluğundaki Taylor polinomu yaklaşım için en düşük polinom derecesi ne olmalıdır?

Taylor yaklaşım polinomunun derecesini tahmin edebiliriz

- $f(x) = e^x$ fonksiyonuna $[-1, 1]$ aralığında $\epsilon = 0.1$ den küçük kesme hatası ile $x_0 = 0$ noktası komşuluğundaki Taylor polinomu yaklaşım için en düşük polinom derecesi ne olmalıdır?
- $f^{(n+1)}(c_x) = e^{c_x}$, $c_x \epsilon (-1, 1)$ olup,

$$|R_n(x)| = \left|x^{n+1}/(n+1)! e^{c_x}\right| \leq \frac{e}{(n+1)!} < 0.1$$

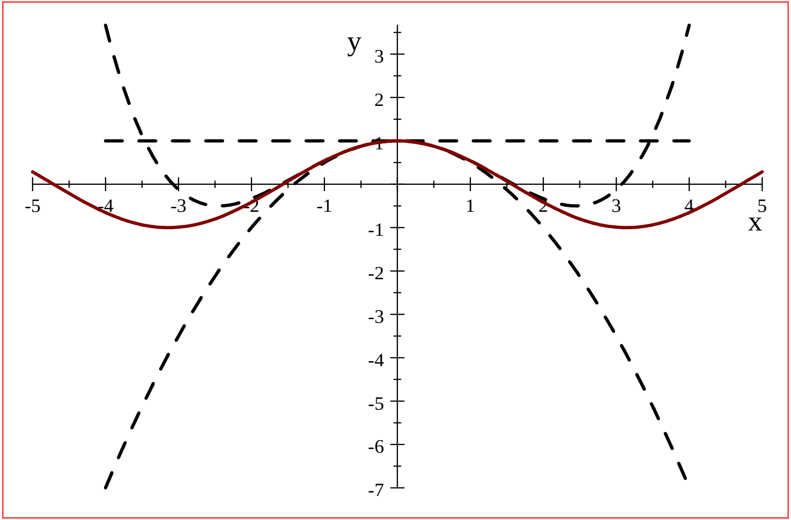
için $n \geq 4$ olmalıdır. O halde belirtilen $\epsilon = 0.1$ dan küçük kesme hatası ile yaklaşım için fonksiyona en az dördüncü dereceden

$$P_4(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! + x^4/4!$$

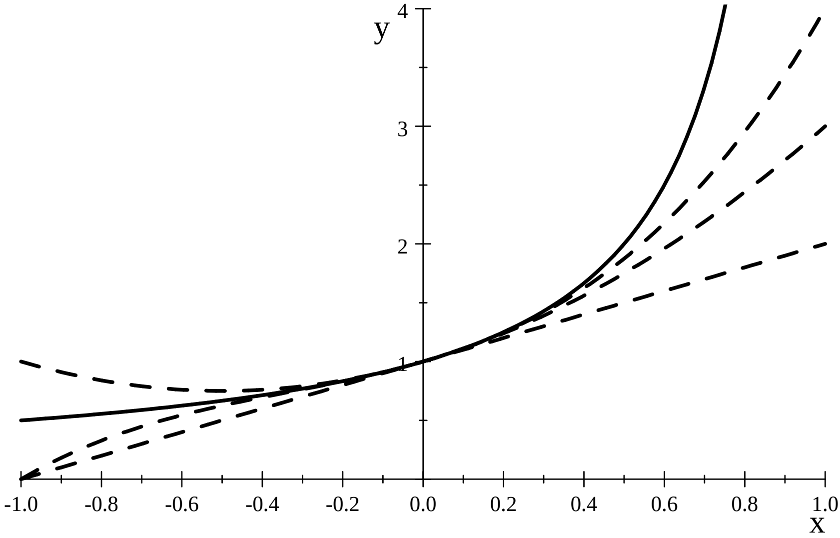
polinomu ile yaklaşım yapılmalıdır.

Fonksiyon ve Taylor Polinomları

- $f(x) = \cos(x)$ ve Taylor polinomları $1, 1 - x^2/2, 1 - x^2/2! + x^4/4!$



Fonksiyon ve Taylor Polinomları



- $1/(1-x)$ fonksiyonu ve $1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$ polinomları

Kesme hatası

- $[-2, 2]$ aralığında hesaplanan

$$\|e^{-x^2} - P_n(x)\|_\infty$$

hatalar farklı n değerleri için aşağıdaki tabloda verilmektedir.

n	0	4	6	8	10	12	16	20
$\|\|f(x) - P_n(x)\|\|_\infty$	0.98	4.98	5.68	4.98	3.55	2.14	0.51	0.08

- $[-2, 2]$ aralığında hesaplanan

$$\|e^{-x^2} - P_n(x)\|_\infty$$

hatalar farklı n değerleri için aşağıdaki tabloda verilmektedir.

n	0	4	6	8	10	12	16	20
$\|\|f(x) - P_n(x)\|\|_\infty$	0.98	4.98	5.68	4.98	3.55	2.14	0.51	0.08

- $$\lim_{n \longrightarrow \infty} P_n(x) = e^{-x^2}$$

olduğunu gözlemleyelim. Detaylı bilgiler için [1],[2] ve [5] nolu kaynakları öneririz.

Taylor polinomları niçin gereklidir?

- Bir nokta komşuluğunda elde edilen Taylor polinomu, söz konusu fonksiyonu bu nokta komşuluğunda uygun dereceli polinomla temsil ederek, fonksiyonla gerçekleştirilecek işlemlerde kolaylık amacıyla kullanılır.

Taylor polinomları niçin gereklidir?

- Bir nokta komşuluğunda elde edilen Taylor polinomu, söz konusu fonksiyonu bu nokta komşuluğunda uygun dereceli polinomla temsil ederek, fonksiyonla gerçekleştirilecek işlemlerde kolaylık amacıyla kullanılır.
- Örneğin $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x^2}dx$ gibi analitik olarak hesaplanamayan integralleri yaklaşık olarak hesaplamak için e^{-x^2} fonksiyonunun $x = 0$ noktası komşuluğundaki Taylor polinomundan faydalanılabilir[7],

Taylor polinomları niçin gereklidir?

- Bir nokta komşuluğunda elde edilen Taylor polinomu, söz konusu fonksiyonu bu nokta komşuluğunda uygun dereceli polinomla temsil ederek, fonksiyonla gerçekleştirilecek işlemlerde kolaylık amacıyla kullanılır.
- Örneğin $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ gibi analitik olarak hesaplanamayan integralleri yaklaşık olarak hesaplamak için e^{-x^2} fonksiyonunun $x = 0$ noktası komşuluğundaki Taylor polinomundan faydalanılabilir[7],
- Nonlineer problemlerin bir nokta komşuluğundaki davranışı, söz konusu nokta komşuluğunda Taylor açılımı ile elde edilen lineer yaklaşım yardımıyla analiz edilebilir. Örneğin

Taylor polinomları niçin gereklidir?

- Bir nokta komşuluğunda elde edilen Taylor polinomu, söz konusu fonksiyonu bu nokta komşuluğunda uygun dereceli polinomla temsil ederek, fonksiyonla gerçekleştirilecek işlemlerde kolaylık amacıyla kullanılır.
- Örneğin $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ gibi analitik olarak hesaplanamayan integralleri yaklaşık olarak hesaplamak için e^{-x^2} fonksiyonunun $x = 0$ noktası komşuluğundaki Taylor polinomundan faydalanılabilir[7],
- Nonlineer problemlerin bir nokta komşuluğundaki davranışı, söz konusu nokta komşuluğunda Taylor açılımı ile elde edilen lineer yaklaşım yardımıyla analiz edilebilir. Örneğin
  - Nonlineer Diferensiyel denklem veya sistemlerinin çözümlerinin bir nokta komşuluğundaki davranışı, Taylor açılımları yardımıyla elde edilen lineer sistemler yardımıyla analiz edilebilir(Bknz [4])

Taylor polinomları niçin gereklidir?

- Bir nokta komşuluğunda elde edilen Taylor polinomu, söz konusu fonksiyonu bu nokta komşuluğunda uygun dereceli polinomla temsil ederek, fonksiyonla gerçekleştirilecek işlemlerde kolaylık amacıyla kullanılır.
- Örneğin $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ gibi analitik olarak hesaplanamayan integralleri yaklaşık olarak hesaplamak için e^{-x^2} fonksiyonunun $x = 0$ noktası komşuluğundaki Taylor polinomundan faydalanılabilir[7],
- Nonlineer problemlerin bir nokta komşuluğundaki davranışı, söz konusu nokta komşuluğunda Taylor açılımı ile elde edilen lineer yaklaşım yardımıyla analiz edilebilir. Örneğin
  - Nonlineer Diferensiyel denklem veya sistemlerinin çözümlerinin bir nokta komşuluğundaki davranışı, Taylor açılımları yardımıyla elde edilen lineer sistemler yardımıyla analiz edilebilir(Bknz [4])
  - Nonlineer cebirsel sistemlerin sayısal çözümleri, Taylor açılımı ile elde edilen lineer cebirsel sistemlerin çözümleri yardımıyla elde edilebilir(Bknz [5]).

Taylor polinomları niçin gereklidir?

- Bir nokta komşuluğunda elde edilen Taylor polinomu, söz konusu fonksiyonu bu nokta komşuluğunda uygun dereceli polinomla temsil ederek, fonksiyonla gerçekleştirilecek işlemlerde kolaylık amacıyla kullanılır.
- Örneğin $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ gibi analitik olarak hesaplanamayan integralleri yaklaşık olarak hesaplamak için e^{-x^2} fonksiyonunun $x = 0$ noktası komşuluğundaki Taylor polinomundan faydalanılabilir[7],
- Nonlineer problemlerin bir nokta komşuluğundaki davranışı, söz konusu nokta komşuluğunda Taylor açılımı ile elde edilen lineer yaklaşım yardımıyla analiz edilebilir. Örneğin
  - Nonlineer Diferensiyel denklem veya sistemlerinin çözümlerinin bir nokta komşuluğundaki davranışı, Taylor açılımları yardımıyla elde edilen lineer sistemler yardımıyla analiz edilebilir(Bknz [4])
  - Nonlineer cebirsel sistemlerin sayısal çözümleri, Taylor açılımı ile elde edilen lineer cebirsel sistemlerin çözümleri yardımıyla elde edilebilir(Bknz [5]).

Taylor polinom değerlerinin hesaplanması(Horner yöntemi)

- $$P_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_n x + a_{n+1}$$

  olarak ifade edilen polinomun x_0 noktasındaki değeri

  $$P_n(x_0) = a_1 x_0^n + a_2 x_0^{n-1} + \cdots + a_n x_0 + a_{n+1} \tag{7}$$

  ifesinin doğrudan kodlanması suretiyle hesaplanmaz.

- $$P_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_n x + a_{n+1}$$

  olarak ifade edilen polinomun x_0 noktasındaki değeri

  $$P_n(x_0) = a_1 x_0^n + a_2 x_0^{n-1} + \cdots + a_n x_0 + a_{n+1} \tag{7}$$

  ifesinin doğrudan kodlanması suretiyle hesaplanmaz.

- Çünkü bu şekliyle $n(n+1)/2$ adet çarpma işlemi gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Örneğin

  $$\begin{aligned} P_3(x) &= a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \\ &= a_1 \times x \times x \times x + a_2 \times x \times x + a_3 \times x + a_4 \end{aligned}$$

  polinomu için $P_3(x_0)$ değerinin hesaplanması 6 adet çarpma işlemi ve 3 adet toplama işlemi gerektirir.

Taylor polinom değerlerinin hesaplanması(Horner yöntemi)

- Oysa aynı işlem

$$P_3(x) = ((a_1x + a_2)x + a_3)x + a_4$$

örneğinde olduğu üzere iç içe çarpım formatında yazılmak suretiyle 3 adet çarpma ve 3 adet toplama işlemi ile gerçekleştirilebilir.

- Oysa aynı işlem

$$P_3(x) = ((a_1x + a_2)x + a_3)x + a_4$$

örneğinde olduğu üzere iç içe çarpım formatında yazılmak suretiyle 3 adet çarpma ve 3 adet toplama işlemi ile gerçekleştirilebilir.

- $$b_1 = a_1$$

olarak tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1x_0 + a_2 = a_1x_0 + a_2 \text{(en içteki toplam)} \\ b_3 &= b_2x_0 + a_3 = (a_1x_0 + a_2)x_0 + a_3 \text{(en içten ikinci toplam)} \\ b_4 &= b_3x_0 + a_4 = ((a_1x_0 + a_2)x_0 + a_3)x_0 + a_4 \text{(istenen toplam)} \end{aligned}$$

Taylor polinom değerlerinin hesaplanması(Horner yöntemi)

- $$b_1 = a_1$$

- $$b_1 = a_1$$
- $$b_k = a_k + x_0 b_{k-1}, k = 2, 3, \ldots, n$$

  ile tanımlanan $\{b_k\}, k = 1, 2, 3, \ldots, n$ dizisi için yukarıdaki örneğimize paralel olarak

  $$b_n = P_n(x_0)$$

  elde ederiz.

Taylor polinom değerlerinin hesaplanması(Horner yöntemi)

- $$b_1 = a_1$$

- $$b_k = a_k + x_0 b_{k-1}, k = 2, 3, \ldots, n$$

  ile tanımlanan $\{b_k\}, k = 1, 2, 3, \ldots, n$ dizisi için yukarıdaki örneğimize paralel olarak
  $$b_n = P_n(x_0)$$
  elde ederiz.

- Bu işlemin sadece $(n-1)$ adet çarpma işlemi gerektirdiğine dikkat edelim.

Horner algoritması

- Girdi a, x_0, burada a polinom katsayılarını içeren vektördür.

Horner algoritması

- Girdi a, x_0, burada a polinom katsayılarını içeren vektördür.
- $n = a$ nin eleman sayısı

Horner algoritması

- Girdi a, x_0, burada a polinom katsayılarını içeren vektördür.
- $n = a$ nin eleman sayısı
- $b_1 = a_1$

Horner algoritması

- Girdi a, x_0, burada a polinom katsayılarını içeren vektördür.
- $n = a$ nin eleman sayısı
- $b_1 = a_1$
- $k = 2, 3, \cdots, n$ için

$$b_k = a_k + x_0 * b_{k-1};$$

- Girdi a, x_0, burada a polinom katsayılarını içeren vektördür.
- $n = a$ nin eleman sayısı
- $b_1 = a_1$
- $k = 2, 3, \cdots, n$ için

$$b_k = a_k + x_0 * b_{k-1};$$

- Çıktı b_n

Horner tablosu

- Yukarıda belirtilen işlemler *Horner*[1] tabosu adı verilen tablo üzerinden kolayca gerçekleştirilebilir.

[1]William George Horner (1786 – 1837, ingiliz matematikçi)

- Yukarıda belirtilen işlemler *Horner*[1] tabosu adı verilen tablo üzerinden kolayca gerçekleştirilebilir.
-

x_0	a_1	a_2	a_3	a_4
		$x_0 b_1$	$x_0 b_2$	$x_0 b_3$
	$b_1 = a_1$	$b_2 = a_2 + x_0 b_1$	$b_3 = a_3 + x_0 b_2$	$b_4 = a_4 + x_0 b_3$

[1] William George Horner (1786 – 1837, ingiliz matematikçi)

Örnek

$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$ polinomunun $x_0 = 1$ noktasındaki değerini Horner yöntemi yardımıyla belirleyiniz.

- Horner tablosu

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & -2 & 1 & -4 \\
\hline
 & & 1 \times 1 & -1 \times 1 & 0 \times 1 \\
\hline
 & 1 & -1 & 0 & -4
\end{array}
$$

olup, $P(1) = -4$ olarak elde edilir.

Birden fazla noktada polinom değer hesabı

Birden fazla noktada verilen polinomun değerini hesaplayan algoritma aşağıda verilmektedir.

- Girdi a, x_0, burada a polinom katsayılarını içeren vektör ve x_0 ise hesaplama noktalarını içeren vektördür

Birden fazla noktada polinom değer hesabı

Birden fazla noktada verilen polinomun değerini hesaplayan algoritma aşağıda verilmektedir.

- Girdi a, x_0, burada a polinom katsayılarını içeren vektör ve x_0 ise hesaplama noktalarını içeren vektördür
- $n = a$ nın eleman sayısı;

Birden fazla noktada polinom değer hesabı

Birden fazla noktada verilen polinomun değerini hesaplayan algoritma aşağıda verilmektedir.

- Girdi a, x_0, burada a polinom katsayılarını içeren vektör ve x_0 ise hesaplama noktalarını içeren vektördür
- $n = a$ nın eleman sayısı;
- $m = x_0$ ın eleman sayısı;

Birden fazla noktada verilen polinomun değerini hesaplayan algoritma aşağıda verilmektedir.

- Girdi a, x_0, burada a polinom katsayılarını içeren vektör ve x_0 ise hesaplama noktalarını içeren vektördür
- $n = a$ nın eleman sayısı;
- $m = x_0$ ın eleman sayısı;
- $b_{1,:} = [a(1)\ a(1)...a(1)]$, m bileşenli satır vektörü

Birden fazla noktada polinom değer hesabı

Birden fazla noktada verilen polinomun değerini hesaplayan algoritma aşağıda verilmektedir.

- Girdi a, x_0, burada a polinom katsayılarını içeren vektör ve x_0 ise hesaplama noktalarını içeren vektördür
- $n = a$ nın eleman sayısı;
- $m = x_0$ ın eleman sayısı;
- $b_{1,:} = [a(1)\ a(1) ... a(1)]$, m bileşenli satır vektörü
- $k = 2, 3, \cdots, n$ için

$$b_{k,:} = a_k + x_0 .* b_{k-1,:};$$

Birden fazla noktada polinom değer hesabı

Birden fazla noktada verilen polinomun değerini hesaplayan algoritma aşağıda verilmektedir.

- Girdi a, x_0, burada a polinom katsayılarını içeren vektör ve x_0 ise hesaplama noktalarını içeren vektördür
- $n = a$ nın eleman sayısı;
- $m = x_0$ ın eleman sayısı;
- $b_{1,:} = [a(1)\ a(1) ... a(1)]$, m bileşenli satır vektörü
- $k = 2, 3, \cdots, n$ için

$$b_{k,:} = a_k + x_0 .* b_{k-1,:};$$

- Çıktı $b_{n,:}$

Birden fazla noktada polinom değer hesabı

- Yukarıdaki Algoritmaya ait Program aşağıda verilmektedir.

$function\ sonuc = hornerler(a, x0);$
$n = length(a); m = length(x0);$
$b(1, :) = a(1) * ones(1, m);$
$for\ \ k = 2 : n$
$\quad b(k, :) = a(k) + x0. * b(k-1, :);$
end
$sonuc = b(n, :);$

Birden fazla noktada polinom değer hesabı

- Örneğin $P_2(x) = x^2 - 2x + 3$ polinomunun $x_0 = [1\ 2\ -1]$ vektöründeki değerlerini Program ile verilen *vektö rel Horner* yöntemi yardımıyla kolayca hesaplayabiliriz:

Birden fazla noktada polinom değer hesabı

- Örneğin $P_2(x) = x^2 - 2x + 3$ polinomunun $x_0 = [1\ 2\ -1]$ vektöründeki değerlerini Program ile verilen *vektö rel Horner* yöntemi yardımıyla kolayca hesaplayabiliriz:
- $>>$ a=[1 -2 3];
  $>>$ x0=[1 2 -1;]
  $>>$ hornerler(a,x0)
  ans =
  2 3 6

İki değişkenli fonksiyonların Taylor açılımları

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)} + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)} \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left[(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]|_{(a,b)} \\
&\quad + \ldots
\end{aligned}
$$

İki değişkenli fonksiyonların Taylor açılımları

- $$\begin{aligned} \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial x}\right)f(a,b) &:= h\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}+k\frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)} \\ \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f(a,b) &:= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{(a,b)} \end{aligned}$$

  notasyonu ile f nin (a,b) noktası komşuluğundaki *Taylor* serisi

İki değişkenli fonksiyonların Taylor açılımları

- $$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial x}\right)f(a,b) \quad &: \quad = h\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}+k\frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}\\ \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f(a,b) \quad &: \quad = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{(a,b)}\end{aligned}$$

  notasyonu ile f nin (a,b) noktası komşuluğundaki *Taylor* serisi

- $$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial x}\right)^n f(a,b) \tag{8}$$

  olarak ifade edilir.

Örnek

$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktası komşuluğundaki, ilk dört Taylor yaklaşım polinomu bularak fonksiyonla birlikte aynı eksende grafiklerini çiziniz.

İki değişkenli fonksiyonların Taylor açılımları

- $$\begin{aligned} f(0,0) &= 1 \\ f_x(0,0) &= (-2xe^{-(x^2+y^2)})(0,0) = 0 \\ f_y(0,0) &= (-2ye^{-(x^2+y^2)})(0,0) = 0 \\ f_{xx}(0,0) &= e^{-(x^2+y^2)}(4x^2-2)(0,0) = -2 \\ f_{yy}(0,0) &= e^{-(x^2+y^2)}(4y^2-2)(0,0) = -2 \\ f_{xy}(0,0) &= e^{-(x^2+y^2)}(4xy)(0,0) = 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(0,0) &= 1 \\ f_x(0,0) &= (-2xe^{-(x^2+y^2)})(0,0) = 0 \\ f_y(0,0) &= (-2ye^{-(x^2+y^2)})(0,0) = 0 \\ f_{xx}(0,0) &= e^{-(x^2+y^2)}(4x^2-2)(0,0) = -2 \\ f_{yy}(0,0) &= e^{-(x^2+y^2)}(4y^2-2)(0,0) = -2 \\ f_{xy}(0,0) &= e^{-(x^2+y^2)}(4xy)(0,0) = 0 \end{aligned}$$

- $$f(x,y) = 1 - (x^2+y^2) + \frac{1}{2!}(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{3!}(x^2+y^2)^3 + \ldots$$

  açılımını elde ederiz. (Bu açılımı yukarıda verilen e^{-x^2} açılımı ile karşılaştırınız).

Taylor yaklaşımları

$$P_0(x,y) = 1, \tag{9}$$

$$P_2(x,y) = 1-(x^2+y^2), \tag{10}$$

$$P_4(x,y) = 1-(x^2+y^2)+\frac{1}{2!}(x^2+y^2)^2 \tag{11}$$

$$P_6(x,y) = 1-(x^2+y^2)+\frac{1}{2!}(x^2+y^2)^2-\frac{1}{3!}(x^2+y^2)^3+\ldots \tag{12}$$

Taylor yaklaşımları

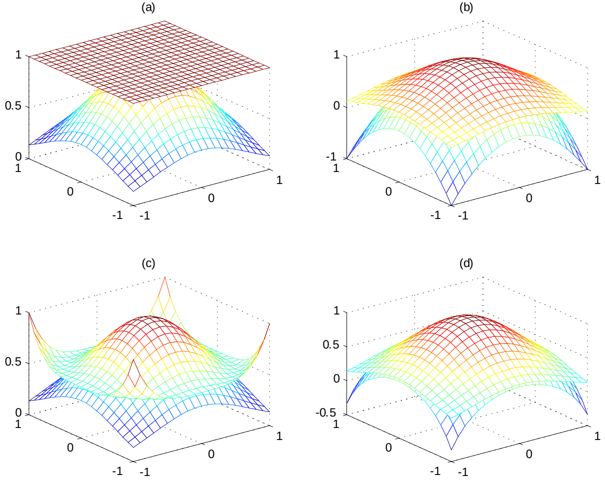


Figure: $e^{-(x^2+y^2)}$ fonksiyonu ve artan n değerleri için Taylor polinom yaklaşımları

Taylor açılımı ile hata birim analizi

- x_f değeri x için bir yaklaşım olsun ve $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. x yerine x_f yaklaşımının kullanılması durumunda oluşacak olan $\Delta y = y_f - y$ mutlak hatası ve $\varepsilon_b(y)$ bağıl hatasını tahmin etmek istiyoruz. Detaylar için [8] nolu kaynağı öneririz.

Taylor açılımı ile hata birim analizi

- x_f değeri x için bir yaklaşım olsun ve $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. x yerine x_f yaklaşımının kullanılması durumunda oluşacak olan $\Delta y = y_f - y$ mutlak hatası ve $\varepsilon_b(y)$ bağıl hatasını tahmin etmek istiyoruz. Detaylar için [8] nolu kaynağı öneririz.
- *Taylor* açılımı yardımıyla $\Delta y \cong f'(x)\Delta x$ olarak yazarız. Burada $\cong$ yaklaşımı birinci mertebeden türeve kadar ilgili terimlerin eşitliğini ifade etmektedir. $y \neq 0$ için her iki tarafı y ye bölmek suretiyle

$$\varepsilon_b(y) = \frac{\Delta y}{y} \cong \frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x = \frac{f'(x)}{f(x)} x \varepsilon_b(x)$$

Taylor açılımı ile hata birim analizi

Örnek

x yerine x_f yaklaşımı alınması durumunda, $y = f(x) = x^n$ fonksiyonunda oluşan mutlak ve bağıl hataları x deki mutlak ve bağıl hatalar cinsinden hesaplayınız.

Örnek

x yerine x_f yaklaşımı alınması durumunda, $y = f(x) = x^n$ fonksiyonunda oluşan mutlak ve bağıl hataları x deki mutlak ve bağıl hatalar cinsinden hesaplayınız.

- Mutlak hata

$$\Delta y \cong f'(x)\Delta x = nx^{n-1}\Delta x$$

olur. Bağıl hata ise

$$\varepsilon_b(y) \cong \frac{f'(x)}{f(x)} x\varepsilon_b(x) = \frac{nx^{n-1}}{x^n} x\varepsilon_b(x) = n\varepsilon_b(x)$$

olarak elde edilir.

Örnek

x yerine x_f yaklaşımı alınması durumunda, $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ fonksiyonunda oluşan mutlak ve bağıl hataları x deki mutlak ve bağıl hatalar cinsinden hesaplayınız.

- Mutlak hata

$$\Delta y \cong f'(x)\Delta x = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \Delta x$$

olur. Bağıl hata ise

$$\varepsilon_b(y) \cong \frac{f'(x)}{f(x)} x \varepsilon_b(x) = \frac{\frac{1}{n} x^{(\frac{1}{n}-1)}}{x^{1/n}} x \varepsilon_b(x) = \frac{1}{n} \varepsilon_b(x)$$

olarak elde edilir.

Taylor açılımı ile hata birim analizi

- Benzer biçimde iki değişkenli bir $z = f(x, y)$ fonksiyonu için x_f, y_f değerleri x ve y için birer yaklaşım olsunlar. Bu durumda

$$\Delta z \cong \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

ve

$$\varepsilon_b(z) \cong \frac{x}{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial x}\varepsilon_b(x) + \frac{y}{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial y}\varepsilon_b(y)$$

Taylor açılımı ile hata birim analizi

- Buna göre özel olarak toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri için sırasıyla $z = f(x, y)$ fonksiyonunu

$$f(x, y) = x + y, x - y, x \times y, x/y$$

almak suretiyle

toplama/çıkarma	$z = f(x, y) = x \pm y$
	$\Delta z = \Delta x \pm \Delta y$
	$\varepsilon_b(z) = \frac{1}{x \pm y}(x\varepsilon_b(x) \pm y\varepsilon_b(y), x \pm y \neq 0$

elde ederiz.

Taylor açılımı ile hata birim analizi

- Buna göre özel olarak toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri için sırasıyla $z = f(x, y)$ fonksiyonunu

$$f(x, y) = x + y, x - y, x \times y, x/y$$

almak suretiyle

toplama/çıkarma	$z = f(x, y) = x \pm y$
	$\Delta z = \Delta x \pm \Delta y$
	$\varepsilon_b(z) = \frac{1}{x \pm y}(x\varepsilon_b(x) \pm y\varepsilon_b(y), x \pm y \neq 0$

elde ederiz.

- Benzer biçimde çarpma ve bölme için aşağıda verilen mutlak ve bağıl hata ifadelerini elde ederiz:

çarpma	$z = f(x, y) = x \times y$
	$\Delta z = y\Delta x + x\Delta y$
	$\varepsilon_b(z) = \varepsilon_b(x) + \varepsilon_b(y)$

Taylor açılımı ile hata birim analizi

bölme	$z = f(x, y) = x/y$
	$\Delta z \cong \frac{1}{y}\Delta x - \frac{x}{y^2}\Delta y$
	$\varepsilon_b(z) \cong \varepsilon_b(x) - \varepsilon_b(y)$

Taylor açılımı ile hata birim analizi

Örnek

Karesel bir ofisin bir kenarı $x_f = x \pm \Delta x = 3 \pm 0.1m$ olarak ölçülmüş olsun. Bu durumda ofis alanının hesaplanmasında oluşan mutlak ve bağıl hata yaklaşık olarak ne kadardır?

- $y = f(x) = x^2$ alınırsa

$$\Delta y \cong f'(x)\Delta x = 2x\Delta x = 2 \times 3 \times (0.1) = 0.6$$

elde ederiz. Bağıl hatayı ise yaklaşık olarak

$$\varepsilon_b(y) = \frac{\Delta y}{y} = 0.6/9 \doteq 0.0667$$

olarak elde ederiz.

Taylor açılımı ile hata birim analizi

Örnek

Sürtünmesiz ortamda hareket eden bir cismin kütlesinin $m = 2 \pm 0.1(kg)$ *ve cisme* t *anında etki eden kuvvetin ise* $F = 5 \pm 0.2(kg \times m/s^2)$ *olduğu ölçülmüştür. Cismin ivmesini, ölçümlerdeki mutlak hatalardak kaynaklanan mutlak ve bağıl hata ile birlikte belirleyiniz.*

$\Delta m = 0.1$ ve $\Delta F = 0.2$ mutlak hataları ve *II. Newton* yasası gereği $a = F/m = 2.5(m/s^2)$ ivmesinde oluşan mutlak hata

$$\Delta a \cong \frac{1}{m}\Delta F - \frac{F}{m^2}\Delta m = \frac{1}{2}(0.2) - \frac{5}{2^2}(0.1) = -0.0250$$

Taylor açılımı ile hata birim analizi

- $$\varepsilon_b(m) = \Delta m / m = 0.1/2 = 0.05$$

Taylor açılımı ile hata birim analizi

- $$\varepsilon_b(m) = \Delta m/m = 0.1/2 = 0.05$$
- $$\varepsilon_b(F) = \Delta F/F = 0.2/5 = 0.04$$

Taylor açılımı ile hata birim analizi

- $$\varepsilon_b(m) = \Delta m/m = 0.1/2 = 0.05$$

- $$\varepsilon_b(F) = \Delta F/F = 0.2/5 = 0.04$$

- $$\varepsilon_b(a) = \frac{\Delta a}{a} \cong \frac{-0.0250}{2.5} = -0.01$$

Taylor açılımı ile hata birim analizi

Örnek

$$f(a,b,c) = -b + \sqrt{b^2 - 4ac}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $a = 1 \pm 0.1$, $b = 2 \pm 0.1$, $c = 0.001 \pm 0.001$ *için, yani* $\Delta a = 0.1$, $\Delta b = 0.1$, $\Delta c = 0.001$ *mutlak hatalarıyla,* f *nin* (a,b,c) *noktasındaki değerinin hesaplanmasında oluşan mutlak ve bağıl hatayı hesaplayınız.*

Taylor açılımı ile hata birim analizi

- $$\begin{aligned}
\Delta f &\cong \frac{\partial f}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial f}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial f}{\partial c}\Delta c \\
&= \frac{-2c}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\Delta a + (-1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 4ac}})\Delta b + \frac{-2a}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\Delta c \\
&= (-0.0010) \times 0.1 + (5.0038e - 004) \times 0.1 + (-1.0005) \times 0.001 \\
&= -0.00105046
\end{aligned}$$

Taylor açılımı ile hata birim analizi

- $$\begin{aligned}\Delta f &\cong \frac{\partial f}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial f}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial f}{\partial c}\Delta c \\ &= \frac{-2c}{\sqrt{b^2-4ac}}\Delta a + (-1 + \frac{b}{\sqrt{b^2-4ac}})\Delta b + \frac{-2a}{\sqrt{b^2-4ac}}\Delta c \\ &= (-0.0010) \times 0.1 + (5.0038e-004) \times 0.1 + (-1.0005) \times 0.001 \\ &= -0.00105046\end{aligned}$$

- $$f(a,b,c) = f(1,2,0.001) = -0.00100025$$

  olup,

  $$\varepsilon_b(f) \cong \frac{\Delta f}{f} = \frac{0.00105046}{0.00100025} = 1.05019745$$

  elde ederiz.

Kaynaklar

- Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1988.
- Boas, M. L., Mathematical Methods in the Physical Sciences, John Wiley & Sons, 1983.
- Coşkun, E. OCTAVE ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:aves.ktu.edu.tr/erhan/dokumanlar).
- Coşkun, E. Maxima ile Sembolik Hesaplama ve Kodlama(URL:aves.ktu.edu.tr/erhan/dokumanlar).
- Coşkun, E. OCTAVE ile Vektör Cebirsel Uygulamalı Sayısal Analiz(URL:aves.ktu.edu.tr/erhan/dokumanlar).
- Coşkun, E. OCTAVE ile Vektör Cebirsel Uygulamalı Sonlu fark Yöntemleri(URL:aves.ktu.edu.tr/erhan/dokumanlar).
- Davis, J. P. ve Rabinowitz, P., Methods of Numerical Integration, Academic Press, 1983.