Elemanter fonksiyonlarla yaklaşım ve hata

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Kasım, 2018

Bu bölümde

- Bu bölümde öncelikle verilen bir ayrık veri kümesi için

Elemanter fonksiyonlarla yaklaşım ve hata

Bu bölümde

- Bu bölümde öncelikle verilen bir ayrık veri kümesi için
- standart ve

Elemanter fonksiyonlarla yaklaşım ve hata

Bu bölümde

- Bu bölümde öncelikle verilen bir ayrık veri kümesi için
- standart ve
- ağırlıklı en küçük kareler yöntemi ile en uygun yaklaşım polinomunun nasıl belirleneceğini inceliyoruz. Ayrıca

Bu bölümde

- Bu bölümde öncelikle verilen bir ayrık veri kümesi için
- standart ve
- ağırlıklı en küçük kareler yöntemi ile en uygun yaklaşım polinomunun nasıl belirleneceğini inceliyoruz. Ayrıca
- standart en küçük kareler yöntemi ile bir aralık üzerinde verilen herhangi bir sürekli fonksiyona daha basit fonksiyonlarla uygun yaklaşımların nasıl gerçekleştirilebileceğini inceliyoruz .

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yaklaşım

- Hata içeren noktalardan geçen yüksek dereceli interpolasyon polinomunu bulmak yerine,

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yaklaşım

- Hata içeren noktalardan geçen yüksek dereceli interpolasyon polinomunu bulmak yerine,
- hatalı veri kümesine yeterince yakın noktalardan geçen daha düşük dereceli polinomu belirleyerek,

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yaklaşım

- Hata içeren noktalardan geçen yüksek dereceli interpolasyon polinomunu bulmak yerine,
- hatalı veri kümesine yeterince yakın noktalardan geçen daha düşük dereceli polinomu belirleyerek,
- interpolasyon işlemini elde edilen düşük dereceli polinomla gerçekleştirmek daha akılcı bir yöntemdir.

Standart En Küçük Kareler yöntemi(EKKY) ile yaklaşım

- Veri kümemizin

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$$

nokta çiftlerinden oluştuğunu ve bu nokta çiftlerine en yakın

$$P_1(x) = a + bx$$

polinomunu belirlemek istediğimizi kabul edelim .

Standart En Küçük Kareler yöntemi(EKKY) ile yaklaşım

- Veri kümemizin

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$$

nokta çiftlerinden oluştuğunu ve bu nokta çiftlerine en yakın

$$P_1(x) = a + bx$$

polinomunu belirlemek istediğimizi kabul edelim .

- Bu durumda en uygun ölçü iki normu yardımıyla

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{m} (P_1(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} (a + bx_i - y_i)^2 \qquad (1)$$

ile tanımlanmaktadır.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Amacımız $E(a, b)$ yi minimum yapan a ve b değerlerini belirlemektir.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Amacımız $E(a,b)$ yi minimum yapan a ve b değerlerini belirlemektir.
- Sözkonusu minimum nokta için gerek şart (yeter şart değil!)

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Amacımız $E(a, b)$ yi minimum yapan a ve b değerlerini belirlemektir.
- Sözkonusu minimum nokta için gerek şart (yeter şart değil!)

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

-

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m}(a + bx_i - y_i) = 0 \Rightarrow ma + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{m} y_i \qquad (2)$$

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Amacımız $E(a, b)$ yi minimum yapan a ve b değerlerini belirlemektir.
- Sözkonusu minimum nokta için gerek şart (yeter şart değil!)

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

- $$\frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m}(a + bx_i - y_i) = 0 \Rightarrow ma + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{m} y_i \qquad (2)$$

- $$\frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m}(a + bx_i - y_i)x_i = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) b = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \qquad (3)$$

  elde ederiz.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- (2) ve (3) sistemi çözülerek a ve b değerleri ve dolayısıyla da istenilen $P_1(x)$ polinomu elde edilmiş olunur.(1) daki karelerin toplamını minimize etmek(en küçük yapmak) için kullanılan bu yönteme, En Küçük Kareler Yöntemi(EKKY) adı verilir.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- (2) ve (3) sistemi çözülerek a ve b değerleri ve dolayısıyla da istenilen $P_1(x)$ polinomu elde edilmiş olunur.(1) daki karelerin toplamını minimize etmek(en küçük yapmak) için kullanılan bu yönteme, En Küçük Kareler Yöntemi(EKKY) adı verilir.
- Öte yandan (2) ve (3) sistemi matris-vektör notasyonu yardımıyla da ifade edilebilir:

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- (2) ve (3) sistemi çözülerek a ve b değerleri ve dolayısıyla da istenilen $P_1(x)$ polinomu elde edilmiş olunur.(1) daki karelerin toplamını minimize etmek(en küçük yapmak) için kullanılan bu yönteme, En Küçük Kareler Yöntemi(EKKY) adı verilir.
- Öte yandan (2) ve (3) sistemi matris-vektör notasyonu yardımıyla da ifade edilebilir:
- $$\begin{aligned} \mathbf{1} &= [1, 1, \cdots, 1]^T, (m \text{ elemanlı}) \\ \mathbf{x} &= [x_1, x_2, \cdots, x_m]^T, \\ \mathbf{y} &= [y_1, y_2, \cdots, y_m]^T, \\ \mathbf{u} &= [a, b]^T \end{aligned}$$

  vektörleri ile

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- $\mathbf{u} = [a, b]^T$ bilinmeyen vektörü

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- $\mathbf{u} = [a, b]^T$ bilinmeyen vektörü
- $$A = [\mathbf{1}\ \mathbf{x}]$$
  matrisi ile
  $$A^T A\mathbf{u} = A^T\mathbf{y} \tag{4}$$
  sisteminin çözümü olarak elde edilir.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

Örnek

$(0,0), (1,3/2), (2,1/2), (3,4), (4,3)$ *noktaları için*

$$P_1(x) = a + bx$$

biçimindeki birinci dereceden en iyi yaklaşım polinomunu En Küçük Kareler Yöntemini kullanarak belirleyiniz.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Örneğimiz için

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Örneğimiz için

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- ile

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}, A^T y = \begin{bmatrix} 10 \\ 53/2 \end{bmatrix}$$

olup, bilinmeyen vektörü $u = [a \ \ b]^T$ olmak üzere, (4) den

$$\begin{aligned} 5a + 10b &= 10 \\ 10a + 30b &= 53/2 \end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Bu sistemi çözerek,

$$a = 1/10;\, b = 17/20$$

elde ederiz. Elde edilen

$$P_1(x) = 1/10 + 17/20x$$

doğrusunun $(*)$ ile belirtilen verilere uygun mesafelerden geçerek (1) ile verilen $E(a, b)$ hatasını minimize etmeye çalıştığı görülmektedir.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

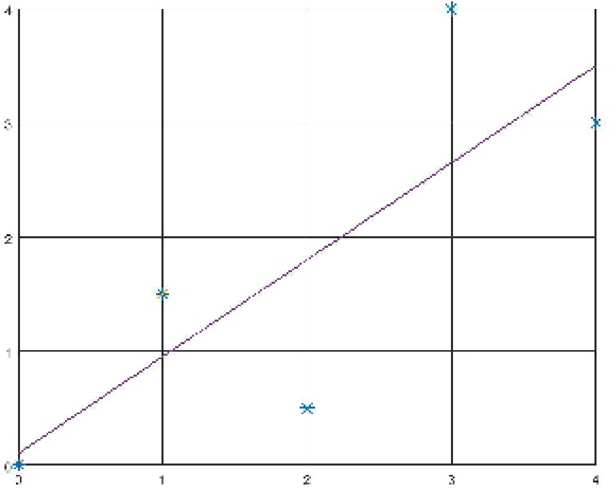

Figure: $P_1(x)$ polinomu, nokta çiftleri(*)

EKKY yöntemi ile yaklaşım

Örnek

Verilen $(x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, m$ *noktalarına uygun* $P_1(x) = a + bx$ *polinomunu belirleyerek, 1 ile verilen hatayı belirledikten sonra*

$$t \in \left(\min_{1 \le i \le m} (x_i), \max_{1 \le i \le m} (x_i) \right)$$

için t *noktasındaki değeri* $P_1(x)$ *yardımıyla tahmin*

$$[toplam\_hata, tahmin] = ekky1(x, y, t)$$

komutu ile çalışan bir En Küçük Kareler Yöntemi uygulaması geliştiriniz. Burada x *ve* y *sırasıyla nokta çiftlerinin apsis ve ordinatlarını içeren vekörlerdir.*

EKKY yöntemi ile yaklaşım algoritması

Algoritma

1. *Girdi*(x, y)

EKKY yöntemi ile yaklaşım algoritması

Algoritma

1. $Girdi(x, y)$
2. $m :=$ x *in eleman sayısı*

EKKY yöntemi ile yaklaşım algoritması

Algoritma

1. *Girdi*(x, y)
2. $m := x$ *in eleman sayısı*
3. $x := x^T, y := y^T$ *sütun vektörini tanımlayalım.*

EKKY yöntemi ile yaklaşım algoritması

Algoritma

1. *Girdi*(x, y)
2. $m := x$ *in eleman sayısı*
3. $x := x^T, y := y^T$ *sütun vektörini tanımlayalım.*
4. *birler isimli* m *bileşenli* 1 *rakamlarından oluşan sütun vektörünü tanımlayalım.*

EKKY yöntemi ile yaklaşım algoritması

Algoritma

1. *Girdi*(x, y)
2. $m := x$ *in eleman sayısı*
3. $x := x^T, y := y^T$ *sütun vektörini tanımlayalım.*
4. *birler isimli* m *bileşenli* 1 *rakamlarından oluşan sütun vektörünü tanımlayalım.*
5. $A := [birler\ x]$ *matrisini oluştur.*

EKKY yöntemi ile yaklaşım algoritması

Algoritma

1. *Girdi*(x, y)
2. $m :=$ *x in eleman sayısı*
3. $x := x^T, y := y^T$ *sütun vektörini tanımlayalım.*
4. *birler isimli m bileşenli* 1 *rakamlarından oluşan sütun vektörünü tanımlayalım.*
5. $A := [birler\ x]$ *matrisini oluştur.*
6. $B := A^T A$ *matrisi ve* $c := A^T y$ *vektörünü oluştur*

EKKY yöntemi ile yaklaşım algoritması

Algoritma

1. *Girdi*(x, y)
2. $m :=$ *x in eleman sayısı*
3. $x := x^T, y := y^T$ *sütun vektörini tanımlayalım.*
4. *birler isimli m bileşenli* 1 *rakamlarından oluşan sütun vektörünü tanımlayalım.*
5. $A := [birler\ x]$ *matrisini oluştur.*
6. $B := A^T A$ *matrisi ve* $c := A^T y$ *vektörünü oluştur*
7. $Bu = c$ *sistemini çözerek* $u := [a\ b]^T$ *bilinmeyenlerini belirle*

EKKY yöntemi ile yaklaşım algoritması

Algoritma

1. *Girdi*(x, y)
2. $m :=$ *x in eleman sayısı*
3. $x := x^T, y := y^T$ *sütun vektörini tanımlayalım.*
4. *birler isimli m bileşenli* 1 *rakamlarından oluşan sütun vektörünü tanımlayalım.*
5. $A := [birler\ x]$ *matrisini oluştur.*
6. $B := A^T A$ *matrisi ve* $c := A^T y$ *vektörünü oluştur*
7. $Bu = c$ *sistemini çözerek* $u := [a\ b]^T$ *bilinmeyenlerini belirle*
8. (x, y) *ikililerinin eksende yerlerini işaretle*

EKKY yöntemi ile yaklaşım algoritması

Algoritma

1. *Girdi*(x, y)
2. $m :=$ x *in eleman sayısı*
3. $x := x^T, y := y^T$ *sütun vektörini tanımlayalım.*
4. *birler isimli* m *bileşenli* 1 *rakamlarından oluşan sütun vektörünü tanımlayalım.*
5. $A := [birler\ \ x]$ *matrisini oluştur.*
6. $B := A^T A$ *matrisi ve* $c := A^T y$ *vektörünü oluştur*
7. $Bu = c$ *sistemini çözerek* $u := [a\ \ b]^T$ *bilinmeyenlerini belirle*
8. (x, y) *ikililerinin eksende yerlerini işaretle*
9. $p(x) = a + bx$ *polinomunun grafiğini aynı eksende çizdir.*

EKKY yöntemi ile yaklaşım algoritması

Algoritma

1. *Girdi*(x, y)
2. $m :=$ x *in eleman sayısı*
3. $x := x^T, y := y^T$ *sütun vektörini tanımlayalım.*
4. *birler isimli* m *bileşenli* 1 *rakamlarından oluşan sütun vektörünü tanımlayalım.*
5. $A := [birler\ \ x]$ *matrisini oluştur.*
6. $B := A^T A$ *matrisi ve* $c := A^T y$ *vektörünü oluştur*
7. $Bu = c$ *sistemini çözerek* $u := [a\ \ b]^T$ *bilinmeyenlerini belirle*
8. (x, y) *ikililerinin eksende yerlerini işaretle*
9. $p(x) = a + bx$ *polinomunun grafiğini aynı eksende çizdir.*
10. *a ve b değerlerini geri gönder*

EKKY yöntemi ile yaklaşım

```
function [a,b]=ekky1(x,y)
```

- `x=x';y=y';m=length(x);`

EKKY yöntemi ile yaklaşım

```
function [a,b]=ekky1(x,y)
```

- `x=x';y=y';m=length(x);`
- `birler=ones(m,1);`

EKKY yöntemi ile yaklaşım

```
function [a,b]=ekky1(x,y)
```

- `x=x';y=y';m=length(x);`
- `birler=ones(m,1);`
- `A=[birler x];`

EKKY yöntemi ile yaklaşım

```
function [a,b]=ekky1(x,y)
```

- `x=x';y=y';m=length(x);`
- `birler=ones(m,1);`
- `A=[birler x];`
- `B=A'*A;`

EKKY yöntemi ile yaklaşım

```
function [a,b]=ekky1(x,y)
```

- `x=x';y=y';m=length(x);`
- `birler=ones(m,1);`
- `A=[birler x];`
- `B=A'*A;`
- `c=A'*y;`

EKKY yöntemi ile yaklaşım

```
function [a,b]=ekky1(x,y)
```

- `x=x';y=y';m=length(x);`
- `birler=ones(m,1);`
- `A=[birler x];`
- `B=A'*A;`
- `c=A'*y;`
- `u=B\c;`

EKKY yöntemi ile yaklaşım

```
function [a,b]=ekky1(x,y)
```

- `x=x';y=y';m=length(x);`
- `birler=ones(m,1);`
- `A=[birler x];`
- `B=A'*A;`
- `c=A'*y;`
- `u=B\c;`
- `p=@(xx) u(1)+u(2)*xx;`

EKKY yöntemi ile yaklaşım

```
function [a,b]=ekky1(x,y)
```

- `x=x';y=y';m=length(x);`
- `birler=ones(m,1);`
- `A=[birler x];`
- `B=A'*A;`
- `c=A'*y;`
- `u=B\c;`
- `p=@(xx) u(1)+u(2)*xx;`
- `xx=x(1):0.1:x(end);`

EKKY yöntemi ile yaklaşım

```
function [a,b]=ekky1(x,y)
```

- `x=x';y=y';m=length(x);`
- `birler=ones(m,1);`
- `A=[birler x];`
- `B=A'*A;`
- `c=A'*y;`
- `u=B\c;`
- `p=@(xx) u(1)+u(2)*xx;`
- `xx=x(1):0.1:x(end);`
- `plot(x,y,'*','markersize',10); hold on;`

EKKY yöntemi ile yaklaşım

```
function [a,b]=ekky1(x,y)
```

- `x=x';y=y';m=length(x);`
- `birler=ones(m,1);`
- `A=[birler x];`
- `B=A'*A;`
- `c=A'*y;`
- `u=B\c;`
- `p=@(xx) u(1)+u(2)*xx;`
- `xx=x(1):0.1:x(end);`
- `plot(x,y,'*','markersize',10); hold on;`
- `yy=p(xx); plot(xx,yy);`

EKKY yöntemi ile yaklaşım

```
function [a,b]=ekky1(x,y)
```

- `x=x';y=y';m=length(x);`
- `birler=ones(m,1);`
- `A=[birler x];`
- `B=A'*A;`
- `c=A'*y;`
- `u=B\c;`
- `p=@(xx) u(1)+u(2)*xx;`
- `xx=x(1):0.1:x(end);`
- `plot(x,y,'*','markersize',10); hold on;`
- `yy=p(xx); plot(xx,yy);`
- `a=u(1);b=u(2);`

EKKY yöntemi ile yaklaşım

Test

```
>> x=[0 1 2 3 4];
>> y=[0 3/2 1/2 4 3];
>> [a,b]=ekky1(x,y)
a = 1/10
b = 17/20
```

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Eğer
$$P_2(x) = a + bx + cx^2$$
biçiminde olup, veri kümesine en iyi yaklaşan ikinci dereceden polinomu belirlemek istersek yine aynı işlemleri takip ederiz, ancak bu defa çözülmesi gereken lineer sistem 3×3 lük bir sistem olur.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Eğer
$$P_2(x) = a + bx + cx^2$$
biçiminde olup, veri kümesine en iyi yaklaşan ikinci dereceden polinomu belirlemek istersek yine aynı işlemleri takip ederiz, ancak bu defa çözülmesi gereken lineer sistem 3×3 lük bir sistem olur.
- Veri kümesi üstel veya logaritmik bir dağılıma sahip olması durumunda en iyi yaklaşım polinomu da veri kümesi için iyi bir yaklaşım olmaz. Bir deney sonucunda değerleri zamanla üstel olarak artan veya azalan pozitif ordinatlı bir veri kümesi için en iyi yaklaşım
$$y = ae^{bx}, a > 0$$
biçiminde olmalıdır.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Bu durumda

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{m} (ae^{bx_i} - y_i)^2 \tag{5}$$

ifadesini minimize eden a ve b değerlerinin belirlenmesi gerekir.

- Bu durumda
$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{m} (ae^{bx_i} - y_i)^2 \tag{5}$$
ifadesini minimize eden a ve b değerlerinin belirlenmesi gerekir.
- Ancak bu durumda
$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= 2\sum_{i=1}^{m} (ae^{bx_i} - y_i)e^{bx_i} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 2\sum_{i=1}^{m} (ae^{bx_i} - y_i)ax_ie^{bx_i} = 0 \end{aligned}$$
biçimde yazılabilen a ve b bilinmeyenleri için nonlineer bir sistem elde ederiz ki bu sistemin çözümü de Newton yöntemi gibi **sayısal bir yöntem** gerektirir.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Alternatif bir yöntem takip edebiliriz:

$$y(x_i) = ae^{bx_i}(a > 0)$$

değerlerini verilen $y_i > 0$ değerlerine yaklaştırmaya çalışmak $\ln(y(x_i))$ değerlerini $\ln(y_i)$ değerlerine yaklaştırmaya denktir: Gerçekten de

$$y(x_i) \to y_i$$

ise, logaritma fonksiyonunun sürekliliği gereği

$$\ln(y(x_i)) \to \ln(y_i)$$

dir.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Tersine

$$\ln(y(x_i)) \to \ln(y_i)$$

ise

$$\ln(y(x_i)) - \ln(y_i) \to 0$$

veya

$$\ln(\frac{y(x_i)}{y_i}) \to 0 \Rightarrow \frac{y(x_i)}{y_i} \to 1,$$

yani $y(x_i) \to y_i$ dir.

- O halde (5) ile verilen fonksiyonu minimize etme problemi

$$\begin{aligned} \hat{E}(a,b) &= \sum_{i=1}^{m} (\ln(ae^{bx_i}) - \ln(y_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\ln(a) + bx_i - \ln(y_i))^2 \qquad (6) \end{aligned}$$

fonksiyonunu minimize etme problemine denktir.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- $\hat{a} = \ln(a)$ ve
$$\hat{y}_i = \ln(y_i), i = 1, 2, ..., m$$
olarak tanımlarsak, problem (1) a benzer olarak
$$\hat{E}(\hat{a}, b) = \sum_{i=1}^{m} (\hat{a} + bx_i - \hat{y}_i)^2 \tag{7}$$
ifadesini minimize eden $\hat{a}$ ve b değerlerini belirleme problemine, diğer bir değimle
$$Y = \hat{a} + bx$$
lineer ifadesini elde etme problemine dönüşür.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- $\hat{a} = \ln(a)$ ve
$$\hat{y}_i = \ln(y_i), i = 1, 2, ..., m$$
olarak tanımlarsak, problem (1) a benzer olarak
$$\hat{E}(\hat{a}, b) = \sum_{i=1}^{m} (\hat{a} + bx_i - \hat{y}_i)^2 \qquad (7)$$
ifadesini minimize eden $\hat{a}$ ve b değerlerini belirleme problemine, diğer bir değimle
$$Y = \hat{a} + bx$$
lineer ifadesini elde etme problemine dönüşür.
- Yukarıda gerçekleştirilen işleme EKKY için **lineerleştirme işlemi** adı verilmektedir.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

Örnek

$(0, 1/2), (1, 2), (2, 5), (3, 8)$ *noktaları için*

$$y = ae^{bx}$$

biçimindeki en iyi yaklaşımı EKKY ile belirleyiniz.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- (2) ve (3) sisteminin katsayılarını elde etmek için aşağıdaki tabloyu oluşturalım:

y_i	$\hat{y}_i = \ln(y_i)$
$1/2$	$\ln(1/2) = -\ln 2$
2	$\ln(2)$
5	$\ln(5)$
8	$\ln(8) = 3\ln(2)$

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Buna göre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \hat{y} = \begin{bmatrix} -\ln(2) \\ \ln(2) \\ \ln(5) \\ 3\ln(2) \end{bmatrix}$$

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Buna göre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \hat{y} = \begin{bmatrix} -\ln(2) \\ \ln(2) \\ \ln(5) \\ 3\ln(2) \end{bmatrix}$$

- için

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, A^T \hat{y} = \begin{bmatrix} 3\ln(2) + \ln(5) \\ 10\ln(2) + 2\ln(5) \end{bmatrix}$$

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Buna göre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \hat{y} = \begin{bmatrix} -\ln(2) \\ \ln(2) \\ \ln(5) \\ 3\ln(2) \end{bmatrix}$$

- için

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, A^T \hat{y} = \begin{bmatrix} 3\ln(2) + \ln(5) \\ 10\ln(2) + 2\ln(5) \end{bmatrix}$$

-

$$\begin{aligned} 4\hat{a} + 6b &= 3\ln(2) + \ln(5) = 3.688\,9 \\ 6\hat{a} + 14b &= 10\ln(2) + 2\ln(5) = 10.15 \end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Bu sistemi çözerek $\hat{a} \doteq -0.4628$, $b \doteq 0.9233$ elde ederiz.

$$a = e^{\hat{a}} = 0.6295$$

ve $\quad y = ae^{bx} = 0.6295e^{0.9233x}$ $\qquad$ elde ederiz.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Bu sistemi çözerek $\hat{a} \doteq -0.4628$, $b \doteq 0.9233$ elde ederiz.

$$a = e^{\hat{a}} = 0.6295$$

ve $\quad y = ae^{bx} = 0.6295e^{0.9233x} \qquad$ elde ederiz.

- Verilen nokta çiftleri ve elde edilen eğrinin grafiği Şekil (2) te verilmektedir.

EKKY yöntemi ile yaklaşım

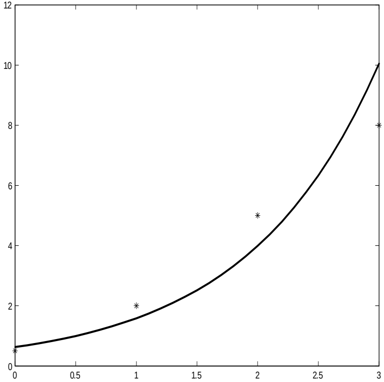

Figure: Elde edilen üstel fonksiyon ve verilen nokta çiftleri $(*)$

EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Benzer biçimde (x_i, y_i) nokta çiftleri için

$$
\begin{array}{lll}
y = \frac{1}{a+bx} & \text{biçiminde eğri aranıyorsa} & \hat{y} = \frac{1}{y} \\
y = \frac{1}{\sqrt{a+bx}} & \text{"} & \hat{y} = \frac{1}{y^2}
\end{array}
$$

biçiminde dönüşümlerle EKKY problemi lineer probleme dönüştürülür.

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Ağırlıklı En Küçük Kareler yöntemi ile verilen veri kümesi için uygun yaklaşım belirlenirken, verilerin güvenilirliği bilgisi de dikkate alınır.

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım

- Ağırlıklı En Küçük Kareler yöntemi ile verilen veri kümesi için uygun yaklaşım belirlenirken, verilerin güvenilirliği bilgisi de dikkate alınır.
- Bu amaçla

$$w = (w_1, w_2, \cdots, w_m), w_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

özelliğini sağlayan w_i çarpanları(veya ağırlıkları) için

$$E(a, b; w) = \sum_{i=1}^{m} w_i (a x_i + b - y_i)^2 \tag{8}$$

ile tanımlanan normu minimize eden a ve b sabitleri belirlenir.

- Sözkonusu minimum nokta için gerek şart (yeter şart değil!)

$$\frac{\partial E(a,b;w)}{\partial a}=0,\ \frac{\partial E(a,b;w)}{\partial b}=0$$

sağlanmasıdır. Fakat

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a} &= 2\sum_{i=1}^{m} w_i(a+bx_i-y_i)=0\\ &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} w_i\right)a+\left(\sum_{i=1}^{m} x_i w_i\right)b=\sum_{i=1}^{m} y_i w_i \qquad (9)\end{aligned}$$

- Sözkonusu minimum nokta için gerek şart (yeter şart değil!)

$$\frac{\partial E(a,b;w)}{\partial a}=0,\ \frac{\partial E(a,b;w)}{\partial b}=0$$

sağlanmasıdır. Fakat

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a} &= 2\sum_{i=1}^{m} w_i(a+bx_i-y_i)=0\\ &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} w_i\right)a+\left(\sum_{i=1}^{m} x_i w_i\right)b=\sum_{i=1}^{m} y_i w_i \qquad (9)\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial b} &= 2\sum_{i=1}^{m} w_i(a+bx_i-y_i)x_i=0\\ &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} x_i w_i\right)a+\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 w_i\right)b=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i w_i \qquad (10)\end{aligned}$$

elde ederiz.

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım

- (9) ve (10) sistemi çözülerek a ve b değerleri ve dolayısıyla da istenilen $P_1(x)$ polinomu elde edilmiş olunur.

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım

- (9) ve (10) sistemi çözülerek a ve b değerleri ve dolayısıyla da istenilen $P_1(x)$ polinomu elde edilmiş olunur.
- (8) daki karelerin toplamını minimize etmek(en küçük yapmak) için kullanılan bu yönteme, Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi(EKKY) adı verilir.

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım

- (9) ve (10) sistemi çözülerek a ve b değerleri ve dolayısıyla da istenilen $P_1(x)$ polinomu elde edilmiş olunur.
- (8) daki karelerin toplamını minimize etmek(en küçük yapmak) için kullanılan bu yönteme, Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi(EKKY) adı verilir.
- Öte yandan (9) ve (10 sistemi matris-vektör notasyonu yardımıyla da ifade edilebilir: Öncelikle

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1} &= [1, 1, \cdots, 1]^T, \\
\mathbf{x} &= [x_1, x_2, \cdots, x_m]^T, \\
\mathbf{y} &= [y_1, y_2, \cdots, y_m]^T, \\
\mathbf{u} &= [a, b]^T
\end{aligned}
$$

vektörlerini ve

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım

- $$\begin{aligned} A &= [\mathbf{1}\ \mathbf{x}]_{m\times 2} \\ W &= \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & w_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

  matrisini tanımlayalım.

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım

- $$\begin{aligned} A &= [\mathbf{1}\ \mathbf{x}]_{m\times 2} \\ W &= \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & w_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

  matrisini tanımlayalım.
- Bu durumda

  $$A^T W A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m w_i & \sum_{i=1}^m x_i w_i \\ \sum_{i=1}^m x_i w_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 w_i \end{bmatrix}, A^T W \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i w_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i w_i \end{bmatrix}$$

  olarak elde ederiz.

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım

- $$\begin{aligned} A &= [\mathbf{1}\ \mathbf{x}]_{m\times 2} \\ W &= \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & w_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

  matrisini tanımlayalım.
- Bu durumda

  $$A^T W A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m w_i & \sum_{i=1}^m x_i w_i \\ \sum_{i=1}^m x_i w_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 w_i \end{bmatrix}, A^T W \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i w_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i w_i \end{bmatrix}$$

  olarak elde ederiz.
- İstenilen $\mathbf{u} = [a, b]^T$ vektörü ise

  $$A^T W A \mathbf{u} = A^T W \mathbf{y}$$

  sisteminin çözümü olarak elde edilir.

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım örneği

Örnek

Sırasıyla $w_1 = 1/8, w_2 = 1/8$ *ve* $w_3 = 3/4$ *ağırlıklara sahip* $\{(0,0),(1,1/2),(2,4)\}$ *veri kümesini göz önüne alalım. Bu veri kümesi için en uygun* $P_1(x) = a + bx$ *polinomunu*

- *Standart EKKY ve*

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım örneği

Örnek

Sırasıyla $w_1 = 1/8, w_2 = 1/8$ *ve* $w_3 = 3/4$ *ağırlıklara sahip* $\{(0,0),(1,1/2),(2,4)\}$ *veri kümesini göz önüne alalım. Bu veri kümesi için en uygun* $P_1(x) = a + bx$ *polinomunu*

- *Standart EKKY ve*
- *Ağırlıklı EKKY ile belirleyiniz*

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım örneği

- $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım örneği

- $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 4 \end{bmatrix}$$
- Standart EKKY ile,

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım örneği

- $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 4 \end{bmatrix}$$
- Standart EKKY ile,
- $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, A^T y = \left[\begin{bmatrix} 9/2 \\ 17/2 \end{bmatrix}\right], A^T A\mathbf{u} = A^T\mathbf{y}$ veya

$$\begin{aligned} 3a + 3b &= 9/2 \\ 3a + 5b &= 17/2 \end{aligned}$$

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım örneği

- $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 4 \end{bmatrix}$$
- Standart EKKY ile,
- $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, A^T y = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 9/2 \\ 17/2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, A^T A\mathbf{u} = A^T \mathbf{y}$ veya

$$\begin{aligned} 3a + 3b &= 9/2 \\ 3a + 5b &= 17/2 \end{aligned}$$

- sistemini çözerek $a = -1/2$, $b = 2$ elde ederiz.

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım örneği

- Ağırlıklı EKKY ile

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ile

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım örneği

- Ağırlıklı EKKY ile

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

  ile

-

$$\begin{aligned} A^T WA &= \begin{bmatrix} 1 & 13/8 \\ 13/8 & 25/8 \end{bmatrix}, A^T Wy = \begin{bmatrix} 49/16 \\ 97/16 \end{bmatrix}, \\ A^T WA\mathbf{u} &= A^T W\mathbf{y} \end{aligned}$$

  sistemini çözerek, $a = -18/31, b = 139/62$ elde ederiz.

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım örneği

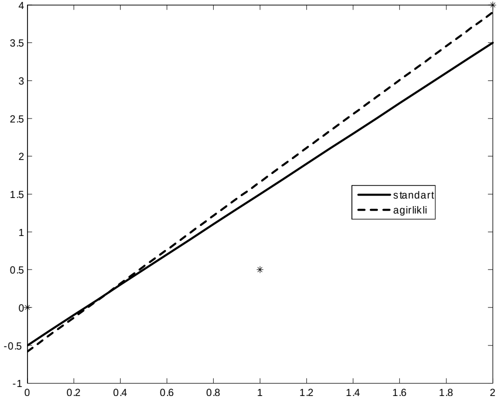

Figure: (x_i, y_i) noktaları(*) ile Standart ve Ağırlıklı EKKY polinom grafikleri

Ağırlıklı EKKY yöntemi ile yaklaşım örneği

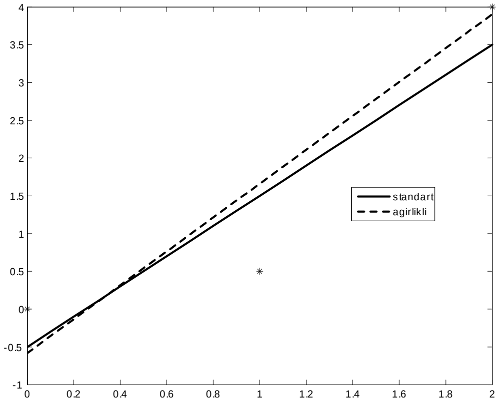

Figure: (x_i, y_i) noktaları(*) ile Standart ve Ağırlıklı EKKY polinom grafikleri

- Ağırlıklı EKKY ile $w_3 = 3/4$ ağırlığına sahip noktaya daha yakınız!

Aralık üzerinde integrallenebilir fonksiyona yaklaşım

- Önceki bölümümde incelenen ayrık veri kümesi yerine, bazen bir $[c, d]$ aralığı üzerinde integrallenebilir bir f fonksiyonuna yüksek dereceli bir interpolasyon polinomu yerine daha basit fonksiyon veya polinomlar yardımıyla yaklaşım elde edilmek istenebilir.

Aralık üzerinde integrallenebilir fonksiyona yaklaşım

- Önceki bölümümde incelenen ayrık veri kümesi yerine, bazen bir $[c, d]$ aralığı üzerinde integrallenebilir bir f fonksiyonuna yüksek dereceli bir interpolasyon polinomu yerine daha basit fonksiyon veya polinomlar yardımıyla yaklaşım elde edilmek istenebilir.
- Verilen fonksiyona

$$P_1(x) = a + bx$$

gibi *en küçük kareler yaklaşım polinomunu* belirlemek için bu defa (1) deki toplam yerine integral sembolü yardımıyla polinom ve fonksiyon arasındaki farkın bir ölçüsü olan(L_2 normunun karesi)

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \int_c^d (P_1(x) - f(x))^2 dx \\ &= \int_c^d (a + bx - f(x))^2 dx \end{aligned}$$

ifadesini minimum yapan a ve b değerlerini buluruz.

İntegrallenebilir fonksiyona yaklaşım

- Bu amaçla yine

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial a} &= 2\int_c^d (a + bx - f(x))dx = 0 \\
\frac{\partial E}{\partial b} &= 2\int_c^d (a + bx - f(x))xdx = 0
\end{aligned}$$

veya

İntegrallenebilir fonksiyona yaklaşım

- Bu amaçla yine
$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$
sağlanmalıdır.
$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a} &= 2\int_c^d (a + bx - f(x))dx = 0\\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 2\int_c^d (a + bx - f(x))xdx = 0\end{aligned}$$
veya
- $$\begin{aligned}\left(\int_c^d dx\right) a + \left(\int_c^d xdx\right) b &= \int_c^d f(x)dx\\ \left(\int_c^d xdx\right) a + \left(\int_c^d x^2 dx\right) b &= \int_c^d xf(x)dx \qquad (11)\end{aligned}$$
lineer denklem sistemini sağlayan a ve b değerleri verilen f fonksiyonuna en iyi yaklaşan $P_1(x)$ polinomunu verir.

İntegrallenebilir fonksiyona yaklaşım

Örnek

$f(x) = \sin(x)$ *fonksiyonuna* $[0, \pi/2]$ *aralığında*

$$P_1(x) = a + bx$$

biçimindeki en küçük kareler yaklaşım polinomunu belirleyiniz.

İntegrallenebilir fonksiyona yaklaşım

- $$E(a,b) = \int_0^{\pi/2} (a + bx - \sin(x))^2 dx$$

  fonksiyonelini minimize eden a ve b değerleri (11) den

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\pi/2} dx\right) a + \left(\int_0^{\pi/2} xdx\right) b &= \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx \\ \int_0^{\pi/2} (xdx)\, a + \left(\int_0^{\pi/2} x^2 dx\right) b &= \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx \end{aligned}$$

İntegrallenebilir fonksiyona yaklaşım

- $$\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = 1 \text{ve} \int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (-\cos x)\ dx = 1$$

  integral değerleri yardımıyla

  $$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}a + \frac{\pi^2}{8}b &= 1 \\ \frac{1}{8}\pi^2 a + \frac{1}{24}\pi^3 b &= 1 \end{aligned}$$

İntegrallenebilir fonksiyona yaklaşım

- $$\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = 1\text{ve} \int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (-\cos x)\ dx = 1$$

  integral değerleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}a + \frac{\pi^2}{8}b &= 1 \\ \frac{1}{8}\pi^2 a + \frac{1}{24}\pi^3 b &= 1 \end{aligned}$$

- lineer denklem sisteminden

$$a = \frac{1}{\pi^2}(8\pi - 24) = 0.114\,77$$

ve

$$b = -\frac{1}{\pi^3}(24\pi - 96) = 0.664\,44$$

elde ederiz.

İntegrallenebilir fonksiyona yaklaşım

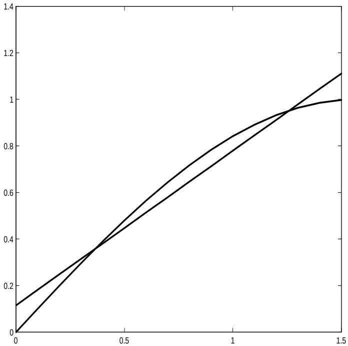

Figure: $\sin(x)$ fonksiyonu ve $[0, 1.5]$ aralığındaki en küçük kareler yaklaşımı.

$\sin(x)$ fonksiyonu ve en küçük kareler anlamındaki en iyi

$$P_1(x) = 0.114\,77 + 0.664\,44x$$

yaklaşım polinomu.

Alıştırma

1 $(0,1),(1,3),(2,1),(3,6)$ *veri kümesi için EKKY göre aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım polinomlarını belirleyiniz.(a) şıkkında elde ettiğiniz sonucu nasıl yorumlarsınız.*

Alıştırma

1 $(0,1),(1,3),(2,1),(3,6)$ *veri kümesi için EKKY göre aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım polinomlarını belirleyiniz.(a) şıkkında elde ettiğiniz sonucu nasıl yorumlarsınız.*

- $P_0(x) = a$

Alıştırmalar

Alıştırma

1 $(0,1),(1,3),(2,1),(3,6)$ *veri kümesi için EKKY göre aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım polinomlarını belirleyiniz.(a) şıkkında elde ettiğiniz sonucu nasıl yorumlarsınız.*

- $P_0(x) = a$
- $P_1(x) = a + bx$

Alıştırma

1 $(0,1),(1,3),(2,1),(3,6)$ *veri kümesi için EKKY göre aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım polinomlarını belirleyiniz.(a) şıkkında elde ettiğiniz sonucu nasıl yorumlarsınız.*

- $P_0(x) = a$
- $P_1(x) = a + bx$
- $P_2(x) = a + bx + cx^2$

Alıştırmalar

Alıştırma

1 $(0,1),(1,3),(2,1),(3,6)$ *veri kümesi için EKKY göre aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım polinomlarını belirleyiniz.(a) şıkkında elde ettiğiniz sonucu nasıl yorumlarsınız.*

- $P_0(x) = a$
- $P_1(x) = a + bx$
- $P_2(x) = a + bx + cx^2$
- $P_3(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

Alıştırmalar

Alıştırma

1. $(0,1),(1,3),(2,1),(3,6)$ *veri kümesi için EKKY göre aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım polinomlarını belirleyiniz.(a) şıkkında elde ettiğiniz sonucu nasıl yorumlarsınız.*
   - $P_0(x) = a$
   - $P_1(x) = a + bx$
   - $P_2(x) = a + bx + cx^2$
   - $P_3(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$
2. *Soru 1 için verilen nokta kümesi ile elde ettiğiniz polinom grafiklerini aynı eksende gösteriniz.*

Alıştırmalar

Alıştırma

1. $(0,1),(1,3),(2,1),(3,6)$ *veri kümesi için EKKY göre aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım polinomlarını belirleyiniz.(a) şıkkında elde ettiğiniz sonucu nasıl yorumlarsınız.*
   - $P_0(x) = a$
   - $P_1(x) = a + bx$
   - $P_2(x) = a + bx + cx^2$
   - $P_3(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$
2. *Soru 1 için verilen nokta kümesi ile elde ettiğiniz polinom grafiklerini aynı eksende gösteriniz.*
3. *Soru 1 için elde ettiğiniz her bir yaklaşım için (1) ile verilen hatayı hesaplayınız. Hata hangi yaklaşım için daha küçüktür?*

Alıştırmalar

Alıştırma

4 *Soru 1 i sırasıyla* $w_1 = 1/16, w_2 = 1/16, w_3 = 1/8, w_4 = 3/4$ *ağırlıkları ile ve Ağırlıklı EKKY ile tekrar ediniz.*

Alıştırmalar

Alıştırma

4 *Soru 1 i sırasıyla* $w_1 = 1/16, w_2 = 1/16, w_3 = 1/8, w_4 = 3/4$ *ağırlıkları ile ve Ağırlıklı EKKY ile tekrar ediniz.*

5 *Soru 1 de verilen nokta kümesi ve soru 4 te elde ettiğiniz polinom grafiklerini aynı eksende gösteriniz.*

Alıştırmalar

Alıştırma

4 *Soru 1 i sırasıyla* $w_1 = 1/16, w_2 = 1/16, w_3 = 1/8, w_4 = 3/4$ *ağırlıkları ile ve Ağırlıklı EKKY ile tekrar ediniz.*

5 *Soru 1 de verilen nokta kümesi ve soru 4 te elde ettiğiniz polinom grafiklerini aynı eksende gösteriniz.*

6 *Soru 2 ve soru 5 te elde ettiğiniz grafikleri inceleyerek,* $w_i, i = 1, 2, 3, 4$ *ağırlıklarının, yaklaşım polinomları üzerindeki etkisini inceleyiniz.*

Alıştırma

4 *Soru 1 i sırasıyla* $w_1 = 1/16, w_2 = 1/16, w_3 = 1/8, w_4 = 3/4$ *ağırlıkları ile ve Ağırlıklı EKKY ile tekrar ediniz.*

5 *Soru 1 de verilen nokta kümesi ve soru 4 te elde ettiğiniz polinom grafiklerini aynı eksende gösteriniz.*

6 *Soru 2 ve soru 5 te elde ettiğiniz grafikleri inceleyerek,* $w_i, i = 1, 2, 3, 4$ *ağırlıklarının, yaklaşım polinomları üzerindeki etkisini inceleyiniz.*

7 *Grafiği Soru 1 de verilen noktalardan geçen* $Q_3(x)$ *interpolasyon polinomunu belirleyiniz.* $Q_3(x)$ *ile Soru 1(d) de elde ettiğiniz* $P_3(x)$ *i karşılaştırınız. Ne gözlemliyorsunuz?*

Alıştırma

4 *Soru 1 i sırasıyla* $w_1 = 1/16, w_2 = 1/16, w_3 = 1/8, w_4 = 3/4$ *ağırlıkları ile ve Ağırlıklı EKKY ile tekrar ediniz.*

5 *Soru 1 de verilen nokta kümesi ve soru 4 te elde ettiğiniz polinom grafiklerini aynı eksende gösteriniz.*

6 *Soru 2 ve soru 5 te elde ettiğiniz grafikleri inceleyerek,* $w_i, i = 1, 2, 3, 4$ *ağırlıklarının, yaklaşım polinomları üzerindeki etkisini inceleyiniz.*

7 *Grafiği Soru 1 de verilen noktalardan geçen* $Q_3(x)$ *interpolasyon polinomunu belirleyiniz.* $Q_3(x)$ *ile Soru 1(d) de elde ettiğiniz* $P_3(x)$ *i karşılaştırınız. Ne gözlemliyorsunuz?*

8 $(0, 1), (1, 2), (2, 2.5), (3, 2.8)$ *veri kümesi için EKKY e göre en iyi*

$$f(x) = \sqrt{a + bx}$$

yaklaşım fonksiyonunu belirleyiniz ve oluşan $E(a, b)$ *hatasını hesaplayınız. Fonksiyon ve veri kümesinin grafiğini aynı eksende*

Alıştırmalar

Alıştırma

9 *Soru 8 de verilen veri kümesi için en iyi*

$$g(x) = \ln(a + bx)$$

fonksiyonunu ve oluşan $E(a, b)$ hatasını hesaplayınız. Elde ettiğiniz hatayı soru 3 deki değer ile karşılaştırınız. Belirtilen veri kümesi için f ve g fonksiyonlarından hangisi daha uygundur?

Alıştırmalar

Alıştırma

9 *Soru 8 de verilen veri kümesi için en iyi*

$$g(x) = \ln(a + bx)$$

fonksiyonunu ve oluşan $E(a, b)$ hatasını hesaplayınız. Elde ettiğiniz hatayı soru 3 deki değer ile karşılaştırınız. Belirtilen veri kümesi için f ve g fonksiyonlarından hangisi daha uygundur?

10 $(0, 1/2), (2, 3), (3, 8)$ *veri kümesi için EKKY e göre en iyi*

$$f(x) = ae^{bx}$$

yaklaşım fonksiyonunu belirleyiniz.

Alıştırmalar

Alıştırma

11 *$f(x) = \cos(x)$ fonksiyonu için $[-1, 1]$ aralığında EKKY göre aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım fonksiyonlarını ve oluşan*

$$E = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))^2 dx$$

hatalarını belirleyiniz.

Alıştırma

11 $f(x) = \cos(x)$ *fonksiyonu için* $[-1, 1]$ *aralığında EKKY göre aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım fonksiyonlarını ve oluşan*

$$E = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))^2 dx$$

hatalarını belirleyiniz.

- $g(x) = a$

Alıştırma

11 *$f(x) = \cos(x)$ fonksiyonu için $[-1, 1]$ aralığında EKKY göre aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım fonksiyonlarını ve oluşan*

$$E = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))^2 dx$$

hatalarını belirleyiniz.

- $g(x) = a$
- $g(x) = a + bx$

Alıştırmalar

Alıştırma

11 $f(x) = \cos(x)$ *fonksiyonu için* $[-1, 1]$ *aralığında EKKY göre aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım fonksiyonlarını ve oluşan*

$$E = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))^2 dx$$

hatalarını belirleyiniz.

- $g(x) = a$
- $g(x) = a + bx$
- $g(x) = a + bx + cx^2$

Alıştırma

12 *Soru 6 da elde verilen f için $x = 0$ noktasında sırasıyla sıfırıncı ve ikinci dereceden Taylor yaklaşımları sonucunda oluşan*

Alıştırma

12 *Soru 6 da elde verilen f için* $x = 0$ *noktasında sırasıyla sıfırıncı ve ikinci dereceden Taylor yaklaşımları sonucunda oluşan*

1. $E = \int_{-1}^{1} (\cos(x) - 1)^2 dx,$

Alıştırma

12 *Soru 6 da elde verilen f için $x = 0$ noktasında sırasıyla sıfırıncı ve ikinci dereceden Taylor yaklaşımları sonucunda oluşan*

1. $E = \int_{-1}^{1} (\cos(x) - 1)^2 dx$,
2. $E = \int_{-1}^{1} (\cos(x) - (1 - x^2/2))^2 dx$
   hatalarını elde ediniz. (a) ve (b) de elde ettiğiniz sonuçları sırasıyla, soru 6(a) ve soru 6(c) ile karşılaştırınız. Taylor mu yoksa EKKY yaklaşımı mı daha küçük hata üretmektedir?

Alıştırma

12 *Soru 6 da elde verilen f için $x = 0$ noktasında sırasıyla sıfırıncı ve ikinci dereceden Taylor yaklaşımları sonucunda oluşan*

1. $E = \int_{-1}^{1} (\cos(x) - 1)^2 dx$,
2. $E = \int_{-1}^{1} (\cos(x) - (1 - x^2/2))^2 dx$

   hatalarını elde ediniz. (a) ve (b) de elde ettiğiniz sonuçları sırasıyla, soru 6(a) ve soru 6(c) ile karşılaştırınız. Taylor mu yoksa EKKY yaklaşımı mı daha küçük hata üretmektedir?

13 *Soru 6 ve 7 deki işlemleri Maxima ortamında da gerçekleştiriniz.*

Alıştırmalar

Alıştırma

14 (x, y) *veri kümesi için en iyi* $n-$*inci dereceden polinomu hesaplayarak katsayılarını geri gönderen ve*

$$katsayi = ekkypol(x, y, n)$$

yazılımı ile çalışan bir MATLAB/Octave programı hazırlayınız. Hazırladığınız program (x, y)*nokta çiftlerinin ve elde edilen polinomun grafiğini de aynı eksende çizmelidir.*

Alıştırmalar

Alıştırma

14 (x, y) *veri kümesi için en iyi* $n-$*inci dereceden polinomu hesaplayarak katsayılarını geri gönderen ve*

$$katsayi = ekkypol(x, y, n)$$

yazılımı ile çalışan bir MATLAB/Octave programı hazırlayınız. Hazırladığınız program (x, y)*nokta çiftlerinin ve elde edilen polinomun grafiğini de aynı eksende çizmelidir.*

15 (x, y) *veri kümesi için en iyi* $y = ae^{bx}$ *fonksiyonunu hesaplayarak a ve b değerlerini geri gönderen ve*

$$[a, b] = ekkyustel(x, y)$$

yazılımı ile çalışan bir MATLAB/Octave programı hazırlayınız. Hazırladığınız program (x, y) *nokta çiftlerinin ve elde edilen* $y = ae^{bx}$ *fonksiyonunun grafiğini de aynı eksende çizmelidir.*

Kaynaklar

- Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1988.
- Coşkun, E. MATLAB/OCTAVE ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:erhancoskun.com.tr).
- Coşkun, E. Maxima ile Sembolik Hesaplama ve Kodlama(URL:erhancoskun.com.tr).
- Coşkun, E. MATLAB/OCTAVESayısal Analize Giriş(vektör cebirsel yaklaşım)(URL:erhancoskun.com.tr).
- Stoer, J., Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1976.