

Bölüm 5

Elemanter Fonksiyonlarla Yaklaşım ve Hata

Bu bölümde öncelikle verilen bir ayrık veri kümesi için

- standart ve
- ağırlıklı en küçük kareler yöntemi ile en uygun yaklaşım polinomunun nasıl belirleneceğini inceliyoruz. Ayrıca
- bir aralık üzerinde verilen herhangi bir integrallenebilir fonksiyona daha basit fonksiyonlarla uygun yaklaşımların nasıl geliştirilebileceğini MATLAB/Octave'm **vektör cebirsel** işlem yetenekleri yardımıyla inceliyoruz.

Konunun **skaler cebirsel** analizi için [1],[4] ve [9] temel referans kaynaklarını öneririz.

5.1 Giriş

Herhangi bir araştırma sonucunda belirli bir amaca yönelik olarak elde edilmiş olan ve apsileri birbirlerinden farklı olan

$$A = \{(x_i, y_i) | i = 0, 1, \dots, n\}$$

nokta çiftleri kümesinin verildiğini kabul edelim. Önceki bölümde

$$P(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$$

özelliğini sağlayan ve derecesi $\leq n$ olan interpolasyon polinomunun nasıl elde edildiğini öğrendik. Yine önceki bölümde gözlemlediğiniz üzere, verilerde hata olması durumunda söz konusu hata interpolasyon polinomunun yüksek dereceli terimlerinin katsayılarını etkiler ve böylece hatalı verilerle elde edilen interpolasyon polinomu ile gerçekleştirilen interpolasyon işlemi de güvenilirliğini kaybeder. Bu durumda yüksek dereceli polinomlarla interpolasyon yerine, verilere uygun fonksiyonlarla yaklaşım gerçekleştirilerek, bilinmeyen noktadaki değer tahmini elde edilen yaklaşım fonksiyonu ile gerçekleştirilir.

5.2 Ayırık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yaklaşım

Hata içeren noktalardan geçen yüksek dereceli interpolasyon polinomunu bulmak yerine, hatalı veri kümesine yeterince yakın noktalardan geçen daha düşük dereceli polinomu belirleyerek interpolasyon işlemi elde edilen düşük dereceli polinomla gerçekleştirmek daha akılcı bir yöntemdir.

Standart En Küçük Kareler Yöntemi ile Yaklaşım

Veri kümemizin

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$$

nokta çiftlerinden oluştuğunu ve bu nokta çiftlerine en yakın

$$P_1(x) = a + bx$$

polinomunu belirlemek istediğimizi kabul edelim. Burada a ve b bilinmeyenlerini, veri kümesinin $P_1(x)$ polinomuna yakınlığının "uygun bir ölçüsünü" minimize edecek biçimde belirlemek istiyoruz. Bu durumda en uygun ölçü iki normu yardımıyla

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^m (P_1(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^m (a + bx_i - y_i)^2 \quad (5.1)$$

ile tanımlanmaktadır. Amacımız $E(a, b)$ yi minimum yapan a ve b değerlerini belirlemektir. Söz konusu minimum nokta için gerek şart (yeter şart değil!)

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Fakat

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a} &= 2 \sum_{i=1}^m (a + bx_i - y_i) = 0 \\ \Rightarrow ma + \left(\sum_{i=1}^m x_i \right) b &= \sum_{i=1}^m y_i\end{aligned}\quad (5.2)$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial b} &= 2 \sum_{i=1}^m (a + bx_i - y_i)x_i = 0 \\ \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^m x_i \right) a + \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right) b &= \sum_{i=1}^m x_i y_i\end{aligned}\quad (5.3)$$

elde ederiz. (5.2) ve (5.3) sistemi çözülerek a ve b değerleri ve dolayısıyla da istenilen $P_1(x)$ polinomu elde edilmiş olunur. (5.1) deki karelerin toplamını minimize etmek(en küçük yapmak) için kullanılan bu yöntem, En Küçük Kareler Yöntemi(EKKY) adı verilir.

Öte yandan (5.2) ve (5.3) sistemi matris-vektör noktasyonu yardımıyla da ifade edilebilir: Öncelikle

$$\begin{aligned}\mathbf{1} &= [1, 1, \dots, 1]^T, \\ \mathbf{x} &= [x_1, x_2, \dots, x_m]^T, \\ \mathbf{y} &= [y_1, y_2, \dots, y_m]^T, \\ \mathbf{u} &= [a, b]^T\end{aligned}$$

vektörlerini ve

$$A = [\mathbf{1} \ \mathbf{x}]_{m \times 2}$$

matrisini tanımlayalım. Bu durumda

$$A^T A = \begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{bmatrix}, \quad A^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{bmatrix}$$

olup, (5.2) ve (5.3) sistemi

$$A^T A \mathbf{u} = A^T \mathbf{y}\quad (5.4)$$

olarak ifade edilebilir.

ÖRNEK 5.1. $(0, 0), (1, 3/2), (2, 1/2), (3, 4), (4, 3)$ noktaları için

$$P_1(x) = a + bx$$

biçimindeki birinci dereceden en iyi yaklaşım polinomunu En Küçük Kareler Yöntemini kullanarak belirleyiniz.

Çözüm.

Örneğimiz için

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ile

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}, A^T y = \begin{bmatrix} 10 \\ 53/2 \end{bmatrix}$$

olup, bilinmeyen vektörü $u = [a \ b]^T$ olmak üzere, (5.4) den

$$\begin{aligned} 5a + 10b &= 10 \\ 10a + 30b &= 53/2 \end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemi çözerek,

$$a = 1/10; b = 17/20$$

elde ederiz. Elde edilen

$$P_1(x) = 1/10 + 17/20x$$

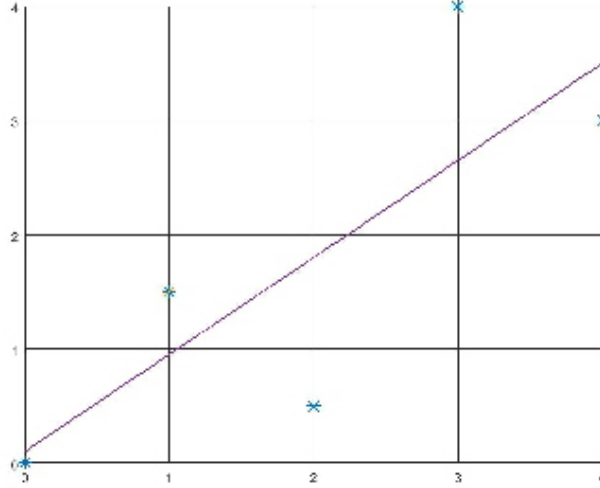
doğrusunun (*) ile belirtilen verilere uygun mesafelerden geçerek (5.1) ile verilen $E(a, b)$ hatasını minimize etmeye çalıştığı görülmektedir.

ÖRNEK 5.2. Verilen $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, m$ noktalarına uygun $P_1(x) = a + bx$ polinomunu belirleyerek, (5.1) hatasını belirledikten sonra

$$t \in \left(\min_{1 \leq i \leq m} (x_i), \max_{1 \leq i \leq m} (x_i) \right)$$

için t noktasındaki değeri $P_1(x)$ yardımıyla tahmin

$$[\text{toplama_hata, tahmin}] = \text{ekky1}(x, y, t)$$



Şekil 5.1: Örnek 5.1 nokta çiftleri(*) ve $P_1(x)$ yaklaşım polinomu

komutu ile çalışan bir En Küçük Kareler Yöntemi uygulaması geliştiriniz. Burada x ve y sırasıyla nokta çiftlerinin apsis ve ordinatlarını içeren vektörlerdir.

Çözüm.

Probleme ait yöntemimiz En Küçük Kareler Yöntemi olduğundan, öncelikle yönteme ait algoritmayı geliştirelim:

Algoritma 5.1. 1. $Girdi(x, y)$

2. $m := x$ in eleman sayısı
3. $x := x^T, y := y^T$ sütun vektörünü tanımla.
4. birler isimli m bileşenli 1 rakamlarından oluşan sütun vektörünü tanımla.
5. $A := [birler \ x]$ matrisini oluştur.
6. $B := A^T A$ matrisi ve $c := A^T y$ vektörünü oluştur
7. $Bu = c$ sistemini çözerek $u := [a \ b]$ bilinmeyenlerini belirle

8. (x, y) ikililerinin ekseninde yerlerini işaretle
9. $p(x) = a + bx$ polinomunun grafiğini aynı ekseninde çizdir.
10. a ve b değerlerini geri gönder

Yukarıdaki algoritmaya ait Program (5.1) aşağıda verilmektedir.

```
function [a,b]=ekky1(x,y)
% (x,y) noktaları ile uyumlu P(x)=a+bx
% polinomunu EKKY ile hesaplar
% polinom ve nokta çiftlerini grafigini cizer
%-----
x=x';y=y';m=length(x);
birler=ones(m,1);
A=[birler x];
B=A'*A;
c=A'*y;
u=B\c;
p=@(xx) u(1)+u(2)*xx;
xx=x(1):0.1:x(end);
plot(x,y,'*','markersize',10); hold on;
yy=p(xx); plot(xx,yy);
a=u(1);b=u(2);
```

Program 5.1: EKKY uygulaması

Test

```
>> x=[0 1 2 3 4];
>> y=[0 3/2 1/2 4 3];
>> [a,b]=ekky1(x,y)
>>
a = 1/10
b = 17/20
Eğer
```

$$P_2(x) = a + bx + cx^2$$

biçiminde olup, veri kümesine en iyi yaklaşan ikinci dereceden polinomu belirlemek istersek yine aynı işlemleri takip ederiz, ancak bu defa çözülmesi gereken lineer sistem 3×3 lük bir sistem olur. Bu durumda A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmalıdır.

Veri kümesi üstel veya logaritmik bir dağılıma sahip olması durumunda en iyi yaklaşım polinomu da veri kümesi için iyi bir yaklaşım olmaz. Bir deney sonucunda değerleri zamanla üstel olarak artan veya azalan pozitif ordinatlı bir veri kümesi için en iyi yaklaşım

$$y = ae^{bx}, a > 0$$

biçiminde olmalıdır. Bu durumda

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^m (ae^{bx_i} - y_i)^2 \quad (5.5)$$

ifadesini minimize eden a ve b değerlerinin belirlenmesi gerekir. Ancak bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= 2 \sum_{i=1}^m (ae^{bx_i} - y_i)e^{bx_i} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 2 \sum_{i=1}^m (ae^{bx_i} - y_i)ax_i e^{bx_i} = 0 \end{aligned}$$

biçimde yazılabilen a ve b bilinmeyenleri için nonlineer bir sistem elde ederiz ki bu sistemin çözümü de Newton yöntemi gibi sayısal bir yöntem gerektirir.

Alternatif bir yöntem takip edebiliriz:

$$y(x_i) = ae^{bx_i} (a > 0)$$

değerlerini verilen $y_i > 0$ değerlerine yaklaştırmaya çalışmak $\ln(y(x_i))$ değerlerini $\ln(y_i)$ değerlerine yaklaştırmaya denktir: Gerçekten de

$$y(x_i) \rightarrow y_i$$

ise, logaritma fonksiyonunun sürekliliği gereği

$$\ln(y(x_i)) \rightarrow \ln(y_i)$$

dir. Tersine

$$\ln(y(x_i)) \rightarrow \ln(y_i)$$

ise

$$\ln(y(x_i)) - \ln(y_i) \rightarrow 0$$

veya

$$\ln\left(\frac{y(x_i)}{y_i}\right) \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{y(x_i)}{y_i} \rightarrow 1,$$

yani $y(x_i) \rightarrow y_i$ dir.

O halde (5.5) ile verilen fonksiyonu minimize etme problemi

$$\hat{E}(a, b) = \sum_{i=1}^m (\ln(ae^{bx_i}) - \ln(y_i))^2 \quad (5.6)$$

$$= \sum_{i=1}^m (\ln(a) + bx_i - \ln(y_i))^2 \quad (5.7)$$

fonksiyonunu minimize etme problemine denktir. $\hat{a} = \ln(a)$, ve

$$\hat{y}_i = \ln(y_i), i = 1, 2, \dots, m$$

olarak tanımlarsak, problem (5.1) a benzer olarak

$$\hat{E}(\hat{a}, b) = \sum_{i=1}^m (\hat{a} + bx_i - \hat{y}_i)^2 \quad (5.8)$$

ifadesini minimize eden \hat{a} ve b değerlerini belirleme problemine, diğer bir deyimle

$$\hat{y} = \hat{a} + bx$$

lineer ifadesini elde etme problemine döndürür. Yukarıda gerçekleştirilen işleme EKKY için **lineerleştirme işlemi** adı verilmektedir.

ÖRNEK 5.3. $(0, 1/2), (1, 2), (2, 5), (3, 8)$ noktaları için

$$y = ae^{bx}$$

biçimindeki en iyi yaklaşımı EKKY ile belirleyiniz.

Çözüm.

(5.2) ve (5.3) sisteminin katsayılarını elde etmek için aşağıdaki tabloyu oluşturalım:

y_i	$\hat{y}_i = \ln(y_i)$
1/2	$\ln(1/2) = -\ln 2$
2	$\ln(2)$
5	$\ln(5)$
8	$\ln(8) = 3 \ln(2)$

Buna göre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \hat{y} = \begin{bmatrix} -\ln(2) \\ \ln(2) \\ \ln(5) \\ 3 \ln(2) \end{bmatrix}$$

için

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, A^T \hat{y} = \begin{bmatrix} 3 \ln(2) + \ln(5) \\ 10 \ln(2) + 2 \ln(5) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4\hat{a} + 6b &= 3 \ln(2) + \ln(5) = 3.6889 \\ 6\hat{a} + 14b &= 10 \ln(2) + 2 \ln(5) = 10.15 \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Bu sistemi çözerek

$$\hat{a} \doteq -0.4628, b \doteq 0.9233$$

elde ederiz. O halde

$$a = e^{\hat{a}} = 0.6295$$

olmak üzere,

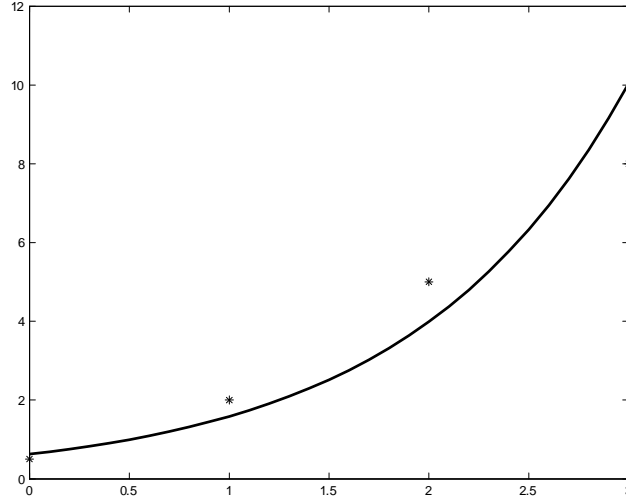
$$y = ae^{bx} = 0.6295e^{0.9233x}$$

elde ederiz. Verilen nokta çiftleri ve elde edilen eğrinin grafiği Şekil 5.2 de verilmektedir.

Benzer biçimde (x_i, y_i) nokta çiftleri için

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{a+bx} & \text{ biçiminde eğri aranıyorsa} & \hat{y} = \frac{1}{y} \\ y = \frac{1}{\sqrt{a+bx}} & \text{ " } & \hat{y} = \frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

biçiminde dönüşümlerle EKKY problemi lineer probleme dönüştürülür.



Şekil 5.2: Elde edilen üstel fonksiyon ve verilen nokta çiftleri (*)

Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi ile Yaklaşım

Ağırlıklı En Küçük Kareler yöntemi ile verilen veri kümesi için uygun yaklaşım belirlenirken, verilerin güvenilirliği bilgisi de dikkate alınır. Bu amaçla

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_m), w_i \geq 0, \sum_{i=1}^m w_i = 1$$

özelliğini sağlayan w_i çarpanları (veya ağırlıkları) için

$$E(a, b; w) = \sum_{i=1}^m w_i (ax_i + b - y_i)^2 \quad (5.9)$$

ile tanımlanan normu minimize eden a ve b sabitleri belirlenir. Söz konusu minimum nokta için gerek şart (yeter şart değil!)

$$\frac{\partial E(a, b; w)}{\partial a} = 0, \frac{\partial E(a, b; w)}{\partial b} = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Fakat

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a} &= 2 \sum_{i=1}^m w_i (a + bx_i - y_i) = 0 \\ \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^m w_i \right) a + \left(\sum_{i=1}^m x_i w_i \right) b &= \sum_{i=1}^m y_i w_i\end{aligned}\quad (5.10)$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial b} &= 2 \sum_{i=1}^m w_i (a + bx_i - y_i) x_i = 0 \\ \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^m x_i w_i \right) a + \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 w_i \right) b &= \sum_{i=1}^m x_i y_i w_i\end{aligned}\quad (5.11)$$

elde ederiz. (5.10) ve (5.11) sistemi çözülerek a ve b değerleri ve dolayısıyla da istenilen $P_1(x)$ polinomu elde edilmiş olunur. (5.9) daki karelerin toplamını minimize etmek(en küçük yapmak) için kullanılan bu yöntem, Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi(EKKY) adı verilir.

Öte yandan (5.10) ve (5.11) sistemi matris-vektör notasyonu yardımıyla da ifade edilebilir: Öncelikle

$$\begin{aligned}\mathbf{1} &= [1, 1, \dots, 1]^T, \\ \mathbf{x} &= [x_1, x_2, \dots, x_m]^T, \\ \mathbf{y} &= [y_1, y_2, \dots, y_m]^T, \\ \mathbf{u} &= [a, b]^T\end{aligned}$$

vektörlerini ve

$$A = [\mathbf{1} \ \mathbf{x}]_{m \times 2}$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w_m \end{bmatrix}$$

matrisini tanımlayalım. Bu durumda

$$A^T W A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m w_i & \sum_{i=1}^m x_i w_i \\ \sum_{i=1}^m x_i w_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 w_i \end{bmatrix}, \quad A^T W \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i w_i \end{bmatrix}$$

olarak elde ederiz. İstenilen $\mathbf{u} = [a, b]^T$ vektörü ise

$$A^T W A \mathbf{u} = A^T W \mathbf{y}$$

sisteminin çözümü olarak elde edilir.

ÖRNEK 5.4. Sırasıyla $w_1 = 1/8, w_2 = 1/8$ ve $w_3 = 3/4$ ağırlıklara sahip $(0, 0), (1, 1/2), (2, 4)$ noktalar kümesini göz önüne alalım. Bu küme için en uygun $P_1(x) = a + bx$ polinomunu

- Standart EKKY ve
- Ağırlıklı EKKY ile belirleyiniz

Çözüm.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

olmak üzere Standart EKKY ile,

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, A^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 9/2 \\ 17/2 \end{bmatrix},$$

olmak üzere

$$A^T A \mathbf{u} = A^T \mathbf{y} \text{ veya açıkça}$$

$$3a + 3b = 9/2$$

$$3a + 5b = 17/2$$

sistemini çözerek $a = -1/2, b = 2$ elde ederiz.

Ağırlıklı EKKY ile

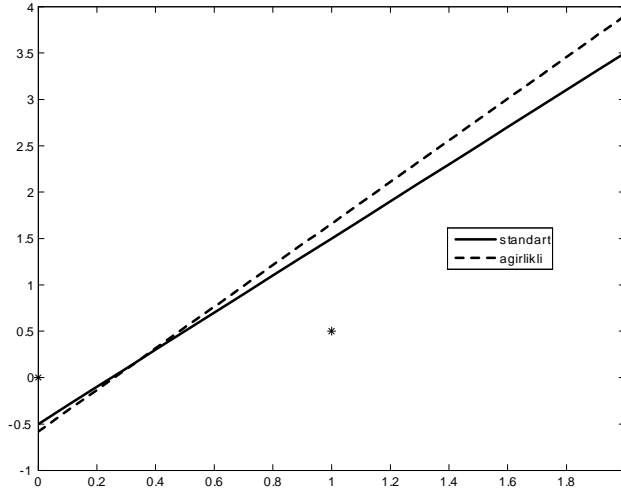
$$A^T W A = \begin{bmatrix} 1 & 13/8 \\ 13/8 & 25/8 \end{bmatrix}, A^T W \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 49/16 \\ 97/16 \end{bmatrix}$$

solmak üzere

$$A^T W A \mathbf{u} = A^T W \mathbf{y}$$

sistemini çözerek, $a = -18/31, b = 139/62$ elde ederiz.

Ağırlıklı EKKY ile $w_3 = 3/4$ ağırlığına sahip noktaya daha yakınız!



Şekil 5.3: (x_i, y_i) noktaları(*) ile Standart ve Ağırlıklı EKKY polinom grafikleri

5.3 İntegrallenebilir fonksiyona elemanter fonksiyonlarla yaklaşım

Önceki bölümümde incelenen ayrık veri kümesi yerine, bazen bir $[c, d]$ aralığı üzerinde integrallenebilir bir f fonksiyonuna yüksek dereceli bir interpolasyon polinomu yerine daha basit fonksiyon veya polinomlar yardımıyla yaklaşım elde edilmek istenebilir. Verilen fonksiyona

$$P_1(x) = a + bx$$

gibi *en küçük kareler yaklaşım polinomunu* belirlemek için bu defa (5.1) deki toplam yerine integral sembolü yardımıyla polinom ve fonksiyon arasındaki farkın bir ölçüsü olan (L_2 normunun karesi)

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \int_c^d (P_1(x) - f(x))^2 dx \\ &= \int_c^d (a + bx - f(x))^2 dx \end{aligned}$$

ifadesini minimum yapan a ve b değerlerini buluruz. Bu amaçla yine

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

sağlanmalıdır. Yani

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a} &= 2 \int_c^d (a + bx - f(x)) dx = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 2 \int_c^d (a + bx - f(x)) x dx = 0\end{aligned}$$

veya daha açık olarak ifade edilen

$$\begin{aligned}\left(\int_c^d dx\right) a + \left(\int_c^d x dx\right) b &= \int_c^d f(x) dx \\ \left(\int_c^d x dx\right) a + \left(\int_c^d x^2 dx\right) b &= \int_c^d x f(x) dx\end{aligned}\quad (5.12)$$

lineer denklem sistemini sağlayan a ve b değerleri verilen f fonksiyonuna $P_1(x)$ ile gösterilen en iyi yaklaşım polinomunu verir.

ÖRNEK 5.5. $f(x) = \sin(x)$ fonksiyonuna $[0, \pi/2]$ aralığında

$$P_1(x) = a + bx$$

biçimindeki en küçük kareler yaklaşım polinomunu belirleyiniz.

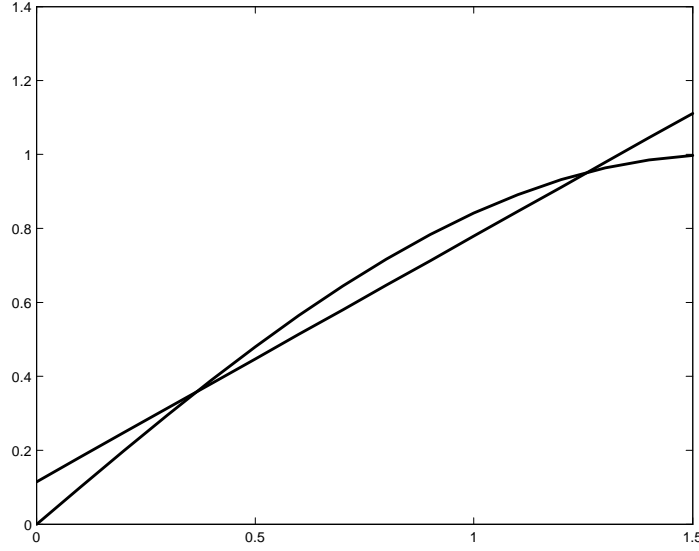
Çözüm.

$$E(a, b) = \int_0^{\pi/2} (a + bx - \sin(x))^2 dx$$

fonksiyoneli minimize eden a ve b değerleri (5.12) den

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{\pi/2} dx\right) a + \left(\int_0^{\pi/2} x dx\right) b &= \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx \\ \int_0^{\pi/2} (x dx) a + \left(\int_0^{\pi/2} x^2 dx\right) b &= \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = 1 \text{ ve } \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx = - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (-\cos x) dx = 1$$



Şekil 5.4: $\sin(x)$ fonksiyonu ve $[0, 1.5]$ aralığındaki en küçük kareler yaklaşımı.

integral değerleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}a + \frac{\pi^2}{8}b &= 1 \\ \frac{1}{8}\pi^2a + \frac{1}{24}\pi^3b &= 1\end{aligned}$$

lineer denklem sisteminden

$$a = \frac{1}{\pi^2}(8\pi - 24) = 0.11477$$

ve

$$b = -\frac{1}{\pi^3}(24\pi - 96) = 0.66444$$

elde ederiz. O halde aradığımız en iyi yaklaşım polinomu

$$P_1(x) = 0.11477 + 0.66444x$$

dir.

$\sin(x)$ fonksiyonu ve en küçük kareler anlamındaki en iyi

$$P_1(x) = 0.11477 + 0.66444x$$

yaklaşım polinomunun grafiği Şekil 5.4 te verilmektedir.

Alıştırmalar 5.1.

1. $(0, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 6)$ veri kümesi için EKKY ile aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım polinomlarını belirleyiniz.

$$(a) P_0(x) = a$$

$$(b) P_1(x) = a + bx$$

$$(c) P_2(x) = a + bx + cx^2$$

$$(d) P_3(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

2. Soru 1 için verilen nokta kümesi ile elde ettiğiniz polinom grafiklerini aynı eksen de gösteriniz.
3. Soru 1 için elde ettiğiniz her bir yaklaşım için (5.1) ile verilen hatayı hesaplayınız. Hata hangi yaklaşım için daha küçüktür?
4. Soru 1 i sırasıyla $w_1 = 1/16, w_2 = 1/16, w_3 = 1/8, w_4 = 3/4$ ağırlıkları ile ve Ağırlıklı EKKY ile tekrar ediniz.
5. Soru 1 de verilen nokta kümesi ve soru 4 te elde ettiğiniz polinom grafiklerini aynı eksen de gösteriniz.
6. Soru 2 ve soru 5 te elde ettiğiniz grafikleri inceleyerek, $w_i, i = 1, 2, 3, 4$ ağırlıklarının, yaklaşım polinomları üzerindeki etkisini inceleyiniz.
7. Grafiği Soru 1 de verilen noktalardan geçen $Q_3(x)$ interpolasyon polinomu belirleyiniz. $Q_3(x)$ ile Soru 1(d) de elde ettiğiniz $P_3(x)$ i karşılaştırınız. Ne gözlemliyorsunuz?
8. $(0, 1), (1, 2), (2, 2.5), (3, 2.8)$ veri kümesi için EKKY e göre en iyi

$$f(x) = \sqrt{a + bx}$$

yaklaşım fonksiyonunu belirleyiniz ve oluşan $E(a, b)$ hatasını hesaplayınız. Fonksiyon ve veri kümesinin grafiğini aynı eksen de çizdiriniz.

9. Soru 8 de verilen veri kümesi için en iyi

$$g(x) = \ln(a + bx)$$

fonksiyonunu ve oluşan $E(a, b)$ hatasını hesaplayınız. Elde ettiğiniz hatayı soru 8 deki değer ile karşılaştırınız. Belirtilen veri kümesi için f ve g fonksiyonlarından hangisi daha uygundur?

10. $(0, 1/2), (2, 3), (3, 8)$ veri kümesi için EKKY e göre en iyi

$$f(x) = ae^{bx}$$

yaklaşım fonksiyonunu belirleyiniz.

11. $f(x) = \cos(x)$ fonksiyonu için $[-1, 1]$ aralığında EKKY göre aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım fonksiyonlarını ve oluşan

$$E = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x))^2 dx$$

hatalarını belirleyiniz.

(a) $g(x) = a$

(b) $g(x) = a + bx$

(c) $g(x) = a + bx + cx^2$

12. Soru 11 de elde verilen f için $x = 0$ noktasında sırasıyla sıfırıncı ve ikinci dereceden Taylor yaklaşımları sonucunda oluşan

(a) $E = \int_{-1}^1 (\cos(x) - 1)^2 dx,$

(b) $E = \int_{-1}^1 (\cos(x) - (1 - x^2/2))^2 dx$

hatalarını elde ediniz. (a) ve (b) de elde ettiğiniz sonuçları sırasıyla, soru 11(a) ve soru 11(c) ile karşılaştırınız. Taylor mu yoksa EKKY yaklaşımı mı daha küçük hata üretmektedir?

13. Soru 11 ve 12 deki işlemleri Maxima ortamında da gerçekleştiriniz.

14. (x, y) veri kümesi için en iyi n -inci dereceden polinomu hesaplayarak katsayılarını geri gönderen ve

$$katsayi = ekkypol(x, y, n)$$

yazılımı ile çalışan bir MATLAB/Octave programı hazırlayınız. n sayısının veri kümesindeki nokta sayısından büyük olmamasına dikkat ediniz. Hazırladığınız program (x, y) nokta çiftlerinin ve elde edilen polinomun grafiğini de aynı eksen de çizmelidir.

15. (x, y) veri kümesi için en iyi

$$y = ae^{bx}$$

fonksiyonunu hesaplayarak a ve b değerlerini geri gönderen ve

$$[a, b] = \text{ekkyustel}(x, y)$$

yazılımı ile çalışan bir MATLAB/Octave programı hazırlayınız. Hazırladığınız program (x, y) nokta çiftlerini ve elde edilen

$$y = ae^{bx}$$

fonksiyonunun grafiğini aynı ekseninde göstermelidir.

Kaynaklar

- [1] Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1988.
- [2] Coşkun, E. OCTAVE ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama([URL:aves.ktu.edu.tr/erhan/dokumanlar](http://aves.ktu.edu.tr/erhan/dokumanlar)).
- [3] Coşkun, E. Maxima ile Sembolik Hesaplama ve Kodlama([URL:aves.ktu.edu.tr/erhan/dokumanlar](http://aves.ktu.edu.tr/erhan/dokumanlar)).
- [4] Kincaid, D., Cheney, W., Numerical Analysis, Brooks/Cole, 1991.
- [5] Mathews, J., Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering, Prentice-Hall, 1997.
- [6] MATLAB, Mathworks([URL:mathworks.com](http://mathworks.com)).
- [7] Maxima, GNU özgür yazılım([URL:maxima.sourceforge.net](http://maxima.sourceforge.net)).
- [8] OCTAVE, GNU özgür yazılım([URL:OCTAVE.sourceforge.net](http://OCTAVE.sourceforge.net)).
- [9] Stoer, J., Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1976.
- [10] S. W., Warren, Zill, D. G., Calculus: Early Transcendentals, Çeviri: Matematik Cilt I, II(Çeviri editörü İsmail Naci Cangül), Nobel Akademik Yayıncılık, 2010.