

Bölüm 1

Endüstriyel ve Uygulamalı Matematik

Bu bölümde ana hatlarıyla

- Endüstriyel Matematik kavramı ve
- organizasyonlarını tanıtarak,
- Endüstriyel Matematik kapsamında değerlendirilen problemlerin ortak özelliklerini tipik bazı örnekler üzerinde sunuyoruz.

1.1 Endüstriyel ve Uygulamalı Matematik

Endüstriyel Matematik, endüstriyel alanda karşılaşılan ve çözümünü matematiksel yöntem veya araçların kullanımını gerektiren problemlerin analizini gerçekleştirir[1]. Burada “endüstri” kısaca mal veya hizmet üretimidir. O halde,

- kaliteli ürün için gerekli simülasyon modellerinin oluşturulması ve analizi,
- üretim maliyetinin düşürülmesi için gerekli işgücü organizasyonu,
- ürünlerin satış noktalarına minimum maliyetle ulaştırılması,
- tüketici eğilimlerinin belirlenmesi,
- kişisel tercihlere uygun esnek üretim geliştirilmesi sürecinde

karşılaşılan ve çözümünü matematiksel yöntemlerin kullanılmasını gerektiren her problem Endüstriyel Matematik kapsamında değerlendirilebilir.

Herhangi bir konunun Endüstriyel Matematik kapsamında değerlendirilip, değerlendirilemeyeceğini belirlerken kullanılan iki temel prensip

- problemin endüstriyel bir alanda ortaya çıkmış olması ve
- problem çözüm sürecinin matematiksel öğeler(araç, yöntem) kullanımını gerektirmesidir.

Endüstriyel Matematik, matematiğin daha gelişmiş bir alanı olarak bilinen Uygulamalı Matematikten biraz daha farklı değerlendirilir:

- Uygulamalı Matematik bir uygulama alanına sahip matematiksel teoriyi geliştirip, inceleyen ve uygulamalarını sunan bir anabilim dalı iken, Endüstriyel Matematik direk olarak endüstriyel problemlerin analizine odaklanır.
- Uygulamalı matematikçiler kendilerine önce bir alan seçer ve bu alandaki ilgi çekici problemlerle ilgilenirler. Endüstriyel matematikte ise bir alan seçiminden ziyade, odak noktası endüstriyel problemidir.
- Endüstriyel matematik problemleri için endüstri temsilcileri ve akademisyenlerin en azından ilgili problemin matematiksel formülasyon aşamasına kadar belirli bir süre beraber çalışması gerekir. Uygulamalı matematik problemleri için grup çalışma zorunluluğu yoktur.

Endüstriyel alanlar ile matematiksel alanlar arasında yakın ilişki sözkonusudur. Örneğin

- Şifreleme ve veri güvenliği problemleri için Cebir ve Sayılar Teorisi,
- Bilgisayar destekli tasarım problemleri için Geometri,
- Statik veya dinamik denge, geleceği tahmin ve finansman problemleri için Diferensiyel Denklemler,
- Sınırlı kaynaklarla maksimum kazanç problemleri için Optimizasyon,
- Hemen hemen her nonlinear problem için Sayısal Analiz ve
- Mekanik ve elektrik sistemler için Nonlinear kontrol gerekli teorik desteği sağlamaktadır.

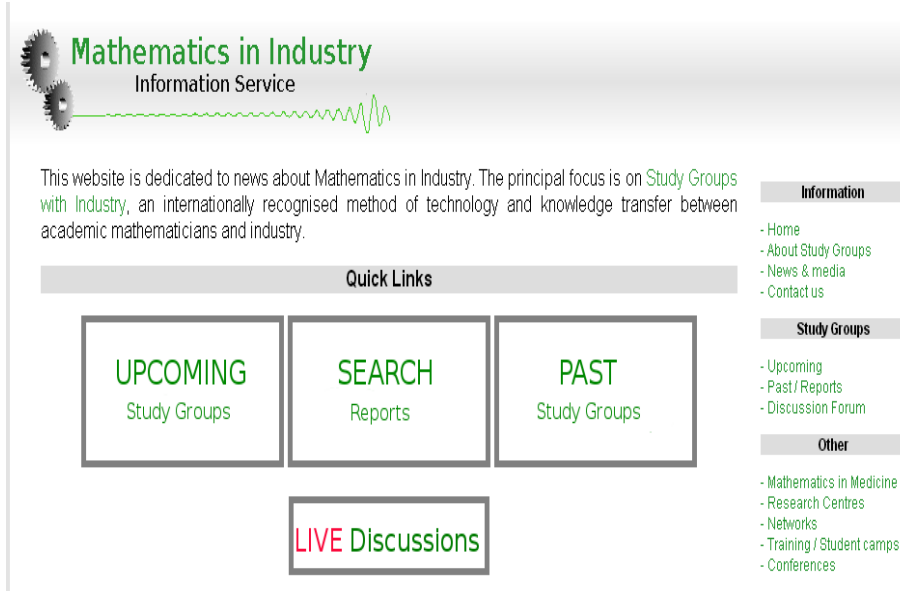
1.2 Uluslararası Endüstriyel ve Uygulamalı Matematik Organizasyonları

- Endüstriyel ve Uygulamalı Matematik çalışmalarını koordine eden değişik organizasyonlar mevcuttur. Bu organizasyonların bir kısmı ve yürüttükleri faaliyet türleri aşağıda özetlenmektedir[3]:
- SIAM(Society for Industrial and Applied Mathematics, Endüstriyel ve Uygulamalı matematik Topluluğu[9]) uluslararası endüstriyel ve uygulamalı matematik çalışmalarının organizasyonunda aktif rol alan ve çok sayıda üyesi bulunan geniş bir akademik topluluktur.
- Ayrıca çeşitli SIAM aktivite gruplarıyla(SIAM activity Groups), aşağıda belirtilen alanları da içeren bir çok alanın mühendislik ve diğer bilimlerdeki uygulamalarının geliştirilmesine çalışılmaktadır[9]:
 - Cebirsel Geometri
 - Kısmi Diferensiyel Denklemler Analizi
 - Hesaplamalı bilimler ve mühendislik
 - Kontrol ve sistemler teorisi
 - Veri madenciliği
 - Ayrık matematik
 - Dinamik sistemler
 - Finansal matematik ve mühendislik
 - Geometrik tasarım
 - Jeobilimler
 - Görüntü bilimi
 - Canlılar bilimi
 - Lineer cebir
 - Malzeme biliminin matematiksel yönleri
 - Lineer olmayan dalgalar
 - Optimizasyon
 - Ortogonal polinomlar ve özel fonksiyonlar

- Superhesaplama
- Belirsizlik analizi
- ECMI (**E**uropean **C**onsortium for **M**athematics in **I**ndustry, Avrupa Endüstride Matematik Konsorsiyumu) Avrupada değişik endüstriyel matematik organizasyonlarının düzenlenmesine katkı sağlamakta ve özellikle "Öğrenci Modelleme Haftaları" adı verilen çalıştaylar ile lisans ve lisansüstü matematik bölüm öğrencilerinin endüstriyel problem çözme yeteneklerinin geliştirilmesine katkı sağlamaktadır.
- Ayrıca Kanada'da MITACS:Mathematics of Information Technology and Complex Systems, Bilgi Teknolojileri ve Karmaşık Sistemlerin Matematiği; Almanya'da MATHEON, İngiltere'de KTN:Knowledge Transfer Network, Bilgi Transfer Ağı gibi kuruluşlar endüstriyel firmaların matematiksel problemlerine aktif katkı sağlamaktadırlar. Ülkemizde ise TÜBİTAK Santez Projeleri ile endüstriyel problemlere odaklanmayı teşvik etmektedir.

Global Bilim Forumu(A Global Science Forum) adı verilen forum tarafından hazırlanan ve Endüstride Matematiğin gelişim hızını artırmaya yönelik 2009 yılı OECD raporunda endüstriyel matematiğin gelişimi önündeki engeller analiz edilerek, uluslararası faaliyetler özetlenmektedir.

- Endüstriyel Matematik Çalışma Grupları(Study Groups with Maths in Industry) ise 1970 li yıllarda Oxford üniversitesinde bir grup akademisyen ve endüstriyel kuruluşlar arasında başlatılan bir işbirliği formatıdır. Bu formata göre çalışma grupları haftanın ilk gününden başlamak üzere son gününe kadar 5-10 firma tarafından ilk gün sunulan problemler üzerinde çalışırlar. Her bir problem için tahsis edilen salonda probleme ilgi duyan araştırmacılar, problemi sunan firma Ar-Ge temsilcisinden probleme ait daha teferruatlı bilgiler alarak, problem üzerinde çalışırlar. Elde edilen sonuçlar haftanın son günü diğer gruplarla birlikte sunulur. Daha sonra elde edilen sonuçlar her bir grupta görevli birkaç araştırmacı tarafından yazılarak probleme ait rapor oluşturulur. İlgili çalışma grubu raporu aşağıda giriş arayüzü sunulan uluslararası endüstride matematik web sitesinde, www.maths-in-industry.org, yayımlanır.
- <http://www.maths-in-industry.org/miis/view/subjects/> adresinde yiyecek ve içecek, havacılık ve savunma, finans, malzeme, tıp ve ecza-



Mathematics in Industry
Information Service

This website is dedicated to news about Mathematics in Industry. The principal focus is on **Study Groups with Industry**, an internationally recognised method of technology and knowledge transfer between academic mathematicians and industry.

Quick Links

- UPCOMING Study Groups
- SEARCH Reports
- PAST Study Groups

LIVE Discussions

Information

- Home
- About Study Groups
- News & media
- Contact us

Study Groups

- Upcoming
- Past / Reports
- Discussion Forum

Other

- Mathematics in Medicine
- Research Centres
- Networks
- Training / Student camps
- Conferences

cılık, spor ve ulaşım gibi çok değişik alanlarda karşılaşılan matematiksel problemlere ait çok sayıda makale yer almaktadır. Üniversite-Sanayi işbirliğinin matematiksel boyutta somut örnekleri için [10] a bakınız.

1.3 Endüstriyel Problemlerin Ortak Özellikleri

Çok farklı uygulama alanlarından üretilmiş olsalar bile, endüstriyel problemler bazı ortak özelliklere sahiptirler[3].

- **Minimum Enerji ve Denge:**

Matematik, Fen bilimleri ve Mühendislik başta olmak üzere diğer bir çok alanda karşılaşılan çok sayıda problem uygun bir A matrisi ve b vektörü için

$$AX = b$$

lineer sisteminin çözümünü gerektirir.

Problem bazen bir kütle(veya miktar) korunumu, bazen lineer elektrik devrelerinde akım yasaları, bazen statikte iç ve dış kuvvetlerin dengesi ve hatta bazen de ekonomide belirtilen talebi karşılayan üretim miktarı olabilir. Biraz daha somutlaştırmak gerekirse,

- Bir trafik şebekesinde, dengeli trafik akışı için her bir kavşağa birim zamanda gelen araç sayısı kavşağı yine birim zamanda terkeden araç sayısına eşit olmalıdır (araç sayısının korunumu).
- Bir elektrik akım devresinde, her bir düğüm noktasına gelen akım, düğüm noktasını terkeden akıma eşit olmalıdır (Kirchoff Akım yasası).
- Denge halinde bulunan bir yapı elemanına etki eden yatay kuvvetler toplamı sifıra eşit olmalı ve benzer biçimde düşey kuvvetler toplamı da sifıra eşit olmalıdır. Benzer denge bir noktaya göre alınan moment (döndürme kuvveti) için de geçerlidir.
- Ekonominin farklı sektörlerinin kendi aralarındaki talepleri (ara talep) toplam üretim miktarından çıkarıldığında elde edilen miktar dış talebe eşit olmalıdır (Liontief girdi-çıktı modeli).

Bu problemlerden Liontief modelini 2. Bölümde inceliyoruz.

• **Sınırlı kaynaklarla maksimum kazanç (veya minimum maliyet)**

Öte yandan sınırlı kaynaklarla maksimum kazancın veya minimum maliyetli bir çözümün elde edilmesi, toplumsal yaşamımızın her boyutunda karşılaştığımız bir problemdir ve bu durum bir çok endüstriyel uygulamanın ortak yönüdür. Biraz daha somutlaştırmak gerekirse

- Gelirimiz ve ihtiyaçlarımız arasında uygun bir denge kurarak, en yüksek refah seviyesinde bir yaşam sürdürmeyi isteriz.
- Sınırlı zamanımız içerisine çok şeyler sıkıştırarak, en yüksek başarıyı elde etmek isteriz.
- Profesyonel boyutta aynı hedef firmalar için de geçerlidir. Her firma elindeki kaynakları mevcut kısıtlamalarını da göz önünde bulundurmak suretiyle en iyi bir biçimde değerlendirerek, doğrudan kazancını maksimum düzeye ulaştırabileceği gibi, maliyetlerini minimize etmek suretiyle de kazancını artırabilir.
- Bu durumda çok bilinmeyenli ve çok sayıda kısıtlama içeren lineer veya nonlineer bir problemden bahsedilmektedir. Bu tür problemler **optimizasyon** problemi olarak adlandırılırlar. Uluslararası havayolu şirketleri, uçuş planlarını belirlerken optimizasyon modeli adı verilen bu tür modellerden elde ettikleri sonuçları kullanırlar[4].

- Standart bir lineer optimizasyon problemi matematiksel olarak

$$\begin{aligned} \min \quad & CX \\ \text{AX} &= b \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir.

3. Bölümde yukarıda bahsettiğimiz türden tipik bazı problemleri örneklerle birlikte inceliyoruz.

- **Diğer $AX = b$ (veya $F(X) = 0$) problemleri**

Teknolojik ürünler ile sağlanan verilerin yorumlanarak kullanışlı hale getirilmesi de matematiksel yöntemler gerektirir. Yükseklik farklarından hareketle, geometrik yükseklik belirleme problemi genelde iyi tanımlı olmayan bir lineer sisteminin çözümünü gerektirir.

4. bölümde, **geometrik yükseklik** belirlerken, ölçüm sonuçlarının hata içermesi durumunda çözümü mevcut olmayan lineer denklem sistemlerinin nasıl ortaya çıktığını ve en yakın çözümlerinin nasıl elde edildiğini inceliyoruz.

5. bölümde ise

$$F(X) = 0$$

biçimde ifade edilebilen çember veya kürelerin arakesini belirleme problemi olarak oluşan nonlinear cebirsel sistemlerin çözümünü gerektiren **GPS** Coğrafi Konumlama Sistemi (Geographic Positioning System) problemini inceliyoruz.

- **Veri güvenliği ve toplumsal asayiş**

Her üretim firması için veri güvenliği oldukça önemlidir. Özellikle elektronik ortamda iletilen verilerin güvenliği için çözülmesi oldukça zor olan çeşitli şifreleme tekniklerinin kullanılması gerekmektedir. Bu amaçla gelişen ve Latince gizli ve yazı sözcüklerinden türetilen ve gizli yazı anlamı taşıyan ve önemli bir araştırma alanı olan kriptografi, Cebir ve Sayılar Teorisi tabanlı endüstriyel bir uygulama alanıdır.

Öte yandan belirli bir resmin (imajın) bazı imaj işlemleri (image processing) uygulanmak suretiyle saklanması gerekebilir. Veya yıllar sonra elde edilen bir sanık parmak izinin veya resminin, yıllar öncesinden bir kişiye ait parmak izi veya resmi ile uyumlu olup olmadığının kontrol edilmesi

gerekebilir. Ayrıca veri güvenliği açısından bir görüntünün başka bir görüntü içerisinde saklanması(stegonografi) gerekebilir.

6 ve 7. Bölümlerde veri güvenliği amacına yönelik olan bu tür problemlere kısaca yer veriyoruz.

• Geleceği tahmin

- Ülke ekonomisinde kişisel ve kamu harcama oranlarının uzun vadede nasıl değişeceğinin tahmini ve ulaşılabilecek olan denge durumunun kararlı olup olmadığı problemini ulusal ekonomi modeli adı verilen bir diferensiyel denklem sistemi ile 8. Bölümde inceliyoruz.
- Canlı Nüfusu

Geçmiş bir zaman diliminden alınan verileri kullanarak geleceğe dair tahminde bulunmak, geleceğe yönelik planlar açısından oldukça önemlidir. Bu bağlamda lojistik nüfus modeli, nüfus artış eğilimi ve bir ortamın besleyebileceği maksimum nüfus verilerine bağlı olarak bir canlı nüfusunun(örneğin ülke nüfusu) gelecekteki değerini tahmin etmek amacıyla kullanılmaktadır[5] Bu bağlamda

$$N_t = rN + DN_{xx}$$

veya

$$N_t = rN(1 - N/K) + DN_{xx}$$

gibi ifade edilen reaksiyon-difüzyon modelleri kullanılır[6].

9. Bölümde yukarıda bahsettiğimiz canlı nüfus modellerini inceliyoruz.

- Hava Tahmini

Yukarıda bahsettiğimiz canlı nüfusu tahmin modellerinde olduğu gibi, geleceğe yönelik planlarımız için doğru hava tahmini oldukça önemlidir. Meteorolojide kullanılan hava tahmin modellerin bir çoğu ancak çok Tipik bir meteoroloji modeli rüzgar hız bileşenleri, sıcaklık ve basınç gibi bilinmeyen fonksiyonları içeren kısmi diferensiyel denklem sistemidir, ve sistemin temel bileşeni konveksiyon-difüzyon denklemdir.

10. Bölümde atmosfer modellerinin temel bileşeni olan tek boyutlu konveksiyon ve difüzyon modelini inceliyoruz.

– **Hareket halindeki cisimlerin hareket karakteristiklerinin tahmini**

Bir başlangıç konumu, açısı ve hızı ile harekete başlayan cismin, sonraki bir t -anında bulunacağı pozisyonun veya hızının ne olacağı veya belirlenen bir konuma ne zaman ulaşabileceğinin belirlenmesi teknolojik açıdan oldukça önemlidir. Hedefini vurmak isteyen bir top mermisi, sorunsuz bir şekilde yörüngesine oturtulmak istenen uzay aracına ait uçuş planı, değişik fiziksel yasaları esas alan matematiksel modeller ile tahmin edilmektedir. Belirli bir yükseklikten, belirli bir açı ve başlangıç hızı ile bırakılan bir patlayıcıyı, yerden fırlatılan ve belirli bir yükseklikte imha etmesi planlanan imha sisteminin(basitçe füzenin) üç boyutlu uzayda takip ettiği yolun, zaman değişkeninin fonksiyonuna bağlı olarak çok hassas bir biçimde tahmin edilmesi gerekmektedir.

- Kendi iç dinamikleri ile hareket eden bir sistemin davranışının dış etkenler altında nasıl değiştiği diğer önemli bir araştırma konusudur. Asma köprülerin rüzgar etkisi altındaki salınımlarının incelenmesi bu açıdan ilginç bir mühendislik ve matematik problemidir. Eğer söz konusu davranış önceden belirlenemez ise, ya sağlam olması için gereğinden çok fazla masraf yapılarak köprüleri inşaa etmek gerekecek, ya da dış etkenlerin gücünün tahmin edilemediği durumlarda inşa edilen sistemlerin çok kısa ömürlü olması durumu söz konusu olacaktır. Nitekim, Amerika Birleşik Devletleri Washington Eyaletinde 1000 metre uzunluğunda ve 12 metre genişliğinde zarif bir biçimde inşa edilen Tacoma Narrows köprüsü 1940 yılında rüzgar etkisi altında çökmüştür[7]. Bu olaydaki sorun dış etkenlerin köprü sisteminin dinamikleri üzerindeki etkisinin iyi tahmin edilememesinden veya diğer bir deyimle iyi bir teorik modelleme ve analiz yapılamamasından kaynaklanmıştır.

11. Bölümde asma köprü salınım modeli ile köprü salınımını dış etkenler etkisi altında inceliyoruz.

– **Borsada opsiyon değer tahmini**

İleri bir tarihte sabit fiyatla bir hissenin alınması veya satılması hakkı ekonomide maddi bir değere sahiptir. Bu değer söz konusu hissenin değerinin değişimine paralel olarak değişir. Bir hissenin alınıp satılması işlemine benzer olarak, hisseyi alma veya satma hakkının belirli

bir değerle devredilmesi mümkündür. Mevcut verilerden hareketle bu değer tahmini borsa oyuncuları için oldukça önemlidir. Söz konusu tahmin sürecinde matematiksel modeller kullanılmaktadır. En popüler olan model ise Black-Scholes modeli[8] olarak bilinen ve Fischer Black ve Myron Scholes tarafından geliştirilerek 1973 yılında tanıtılan modeldir. Model üzerindeki kısıtlamalar daha sonra değişik araştırmacılar tarafından kaldırılmak suretiyle modelin kullanım alanı artırılmış ve doğal olarak da popüleritesi artmıştır. Esas itibariyle günümüzde kullanılan biçimiyle model değişik yan şartlara ve random dış etkenlere izin verebilen parabolik bir kısmi diferensiyel denklemdir.

$$V_t + 1/2\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0 \quad (1.1)$$

Burada $V(S, t)$, t anında değeri $S(t)$ ile verilen bir malın (hisse, vs) alış veya satış opsiyon değeri, σ ilgili varlığın fiyat değişiminin ölçüsü (volatility), r faiz oranıdır.

Endüstriyel matematiğe giriş ismi altında hazırladığımız bu kaynak, özellikle üst düzey lisans öğrencileri veya başlangıç lisansüstü öğrenciler düzeyinde hazırlanmış olup, endüstriyel problemlerin matematiksel formülasyonunun nasıl gerçekleştirildiğini ve çözüm sürecinde kullanılan matematiksel araçları tanıtmayı amaçlamaktadır.

12. Bölümde 1.1 modelini inceliyoruz.

• Dış etkenler ve Geometrik Tasarım

Dış etkenlerin hareket halindeki sistemler veya cisimler üzerindeki etkisi, doğal olarak bu sistemlerin belirtilen dış etkenlerin etkisini minimize etmek amacıyla sahip olması gereken geometrik şeklin de belirlenmesine katkı sağlamıştır:

Kullanım amaçları gibi bir çok etkenin yanında bir otomobil tasarımında önemli hususlardan birisi hareket halinde iken aracın hareketi ile oluşan dış hava akımının veya değişik yönlerden aracın maruz kalabileceği rüzgarın araç hareketini minimum düzeyde etkilemesi için sahip olması gereken geometrinin belirlenmesidir.

Havayolu araçları için aerodinamik etkenlerin, deniz yolu araçları için hidrodinamik etkenlerin ve kara yolu araçları için ise ağırlıklı olarak

sürtünme ve aerodinamik etkenlerin fiziksel yasalar çerçevesinde tahmin edilebilmesi ve gerekli tasarımların söz konusu etkenler çerçevesinde gerçekleştirilmesi gerekmektedir.

Geometrik şekilleri gereği farklı drag katsayılarına sahip küçük cisimlerin buldukları ortam içerisindeki davranışlarını 13. Bölümde ince liyoruz.

- **Enerji(Isı transferi)**

Isı transfer mekanizmaları uygun matematiksel modeller ve başlangıç-sınır koşulları yardımıyla formüle edilirler. En basitleştirilmiş şekli ile problem Newton soğuma yasasının matematiksel modeli olarak adi diferensiyel denklem ve uygun başlangıç şartı ile ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} dT/dt &= -h(T - A) \\ T(0) &= T_0 \end{aligned}$$

Burada $T(t)$, t anında cismin sıcaklığı, A ortam sıcaklığı ve $h > 0$ orantı sabitidir.

Difüzyon faktörünün de ilavesiyle parabolik bir kısmi diferensiyel denkleme eşlik eden uygun başlangıç-sınır şartları ile ifade edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t), a < x < b \\ k \frac{\partial T}{\partial x}(a, t) &= h(T - A), k \frac{\partial T}{\partial x}(b, t) = -h(T - A) \\ T(x, 0) &= T_0(x) \end{aligned}$$

Eğer rüzgar vs gibi konvektif etkenler de söz konusu ise olay bizleri Navier-Stokes modeli olarak bilinen ve hala en genel halde çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanamamış bir matematiksel probleme taşır. Elde edilen modelin çözülmesi için matematiksel yöntemlerin geliştirilmesi, uygulanması ve elde edilen çözümlerin problem kapsamında değerlendirilmesi oldukça önemlidir.

Bu problem üzerinde Termodinamik alanındaki mühendisler yoğun olarak çalışmakta ve çeşitli elektronik cihazların veya kurutma sistemlerinin ısı transfer karakteristiklerini belirlemeye çalışmaktadırlar. Elde edilen sonuçlar ısı transferini gerektiren mutfak malzemelerinin bir kısmı veya

engellemesi gereken bina ısı yalıtım sistemleri gibi sistemlerin tasarım ve imalatı için son derece önemlidir.

Enerji transferini minimize etmeyi amaçlayan ısıcam problemini 14. Bölümde inceliyoruz.

Alıştırmalar 1.1.

1. <http://www.maths-in-industry.org/miis/view/subjects/> web sitesini ziyaret ederek,

- *taşımacılık ve otomotiv*
- *spor*
- *tıp ve eczacılık*
- *malzeme*
- *yiyecek ve içecek*
- *çevre veya*
- *havacılık ve savunma*

sektörüne ait matematiksel problemlerden bir tanesinin özetini kendi cümlelerinizle ifade ediniz.

2. Google'da "*industrial mathematics*" kelimeleri ile tarama yaparak karşınıza çıkan

- *lisansüstü programların yer aldığı üniversiteleri*
- *temel ders kaynaklarını ve*
- *sempozyumları inceleyiniz.*

Kaynaklar ve ilgili literatür

- [1] Friedman Avner, Littman Walter, Industrial Mathematics, A course in Solving Real World Problems, SIAM.
- [2] MacCluer, R. Charles, Industrial Mathematics, Modelling in Industry, Science and Government, Prentice Hall.
- [3] OECD Endüstride Matematik Raporu:
<http://www.oecd.org/science/sci-tech/41019441.pdf>
- [4] STOJKOVIC Goran ; SOUMIS Francois ; DESROSIERS Jacques ; SOLOMON Marius M , An optimization model for a real-time flight scheduling problem , Transportation research. Part A, Policy and practice ISSN 0965-8564 .
- [5] Robert Schoen, Dynamic Population Models, Springer, 2006.
- [6] Allen J.S., Linda, An introduction to mathematical Biology.
- [7] P. J. Meckenna and W. Walter, Travelling Waves in a Suspension Bridge.SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 50., No.3, 1990.
- [8] Wilmott P., Howison, S., Dewynne J., The Mathematics of Financial Derivatives, Cambridge Univ.
- [9] SIAM: <http://siam.org.tr>
- [10] Coşkun, Erhan, Endüstriyel Matematik ve Somut Örneklerle Üniversite-Sanayi İşbirliği, Dünyada ve Türkiye’de Üniversite, Bayburt Üniversitesi Yayını, 2016.