Bölüm 2

Ekonomide Denge(Leontief Modeli)

Bu bölümde Wassily Leontief[1] tarafından geliştirilen ve Leontief tüketim-üretim modeli olarak bilinen modeli inceliyoruz[1]. Wassily Leontief bir ülke veya bölge ekonomisinin farklı sektörlerini göz önüne alarak, üretim sürecinde her bir sektörün birim değer üretimi için diğer sektörlerden kullandığı üretim değerlerini dikkate alarak, herhangi bir dış ülke talebini karşılamak için her bir sektörün toplam üretiminin nekadar olması gerektiğini belirleyen bir model önermiştir. Girdi(input)-çıktı(output) modeli olarak adlandırılan bu modelde girdi harcama veya tüketimi ve çıktı ise üretimi temsil ettiği için modeli kısaca *tüketim-üretim* modeli olarak adlandırılacaktır.

Modeli basit bir örnek üzerinde inceleyelim: Tarım ve sanayiden oluşan ve sadece iki sektörden oluşan bir ekonomiyi göz önüne alalım.

Tarım sektörünün 1 birim değerindeki üretiminin, tarım sektöründen 0.2 birim ve sanayi sektöründen ise 0.3 birim değerinde ürüne ihtiyaç duyduğunu kabul edelim.

Ayrıca sanayi sektörünün 1 birim değerindeki üretimin ise tarım sektöründen 0.3 ve sanayi sektöründen ise 0.4 birim değerindeki ürüne ihtiyaç duyduğunu kabul edelim.

Bu verileri aşağıdaki Tabloda sunalım:

[1](1906-1999) Rus asıllı Nobel Ekonomi Ödül(1973) sahibi Amerikalı ekonomist(https://tr.wikipedia.org/wiki/Wassily_Leontief)

1 birim değerindeki tarımsal(T) üretim(output) için

		T
Gerekli(input) Tarım→	T	0.2
Gerekli(input) Sanayi	S	0.3

1 birim değerindeki sanayi(S) üretim için

		S
Gerekli Tarım→	T	0.3
Gerekli Sanayi	S	0.4

Bu iki tabloyu birleştirerek

1 birim değerindeki üretim için

		T	S
Gerekli Tarım	T	0.2	0.3
Gerekli Sanayi	S	0.3	0.4

elde ederiz. Tablodaki verileri içeren

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

matrisine **tüketim-üretim matrisi** adı verilmektedir.

Şimdi 20 birim değerindeki tarım ve 15 birim değerindeki sanayi dış ürün talebinin olduğunu kabul edelim. Bu verileri içeren

$$D = \begin{bmatrix} 46 \\ 12 \end{bmatrix}$$

vektörüne **dış talep vektörü** adı verilmektedir.

Problemimiz, iç tüketimi karşıladıktan sonra dış talebi de karşılayacak olan tarım ve sanayi üretim miktarlarını belirlemektir.

Problemi matematiksel platforma taşımaya çalışalım: $x-$ile üretilmesi gereken tarımsal ürün değerini ve $y-$ile de sanayi ürün değerini gösterelim. Belirtilen değerlerdeki üretimlerin öncelikle tarım sektöründen ne kadar bir ürün talep ettiğini belirleyelim:

1 birim değerindeki tarımsal üretim, 0.2 birim değerinde tarımsal ürüne ihtiyaç duyduğuna göre x birim değerindeki tarımsal üretim $0.2x$ birim değerinde tarımsal ürüne ihtiyaç duyar.

Benzer biçimde, 1 birim değerindeki sanayi üretimi 0.3 birim değerinde tarımsal ürüne ihtiyaç duyduğuna göre, y birim değerindeki sanayi üretimi $0.3y$ birim değerinde tarım ürününe ihtiyaç duyar.

O halde bu üretim için gerekli tarımsal ürünün değeri

$$0.2x + 0.3y \tag{2.1}$$

kadardır.

Benzer biçimde söz konusu üretim için gerekli sanayi ürününün değeri

$$0.3x + 0.4y \tag{2.2}$$

kadardır.

O halde (2.1) toplam tarımsal iç tüketim ve (2.2) ise toplam sanayi iç tüketim değerleridir.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

üretim vektörü olmak üzere, toplam tarımsal ve sanayi iç tüketimini vektörel formatta

$$\begin{bmatrix} 0.2x + 0.3y \\ 0.3x + 0.4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = AX$$

biçiminde ifade edebiliriz.

Üretilen miktardan iç tüketimi çıkardıktan sonra geriye kalan kısım dış talebe eşit olmalıdır:

$$X - AX = D$$

veya

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

birim matrisi ile,

$$(I - A)X = D$$

elde ederiz.

Örneğimiz için

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

olup, çözülmesi gereken sistem

$$\begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 \\ 12 \end{bmatrix}$$

veya sistemin her iki yanını da 10 ile çarparak,

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 460 \\ 120 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

En genel $AX = b(A_{n\times n}, X_{n\times 1}, b_{n\times 1})$ lineer denklem sistemi için Gauss eliminasyon yöntemini hatırlayalım:

Elemanter satır operasyonları ile bu sistem, U bir üst üçgensel matris olmak üzere,

$$UX = c$$

biçiminde bir lineer sistemine dönüştürülebilir.

Üç adet elemanter elemanter satır işlemi ise aşağıdaki gibidir:

- herhangi bir satır sıfırdan farklı bir sabitle çarpılabilir.
- herhangi iki satır yer değiştirebilir.
- herhangi bir satır sıfırdan farklı bir sabitle çarpılarak diğer satıra ilave edilebilir.

Elemanter satır işlemleri altında denklem sisteminin çözümü değişmez!
Elde edilen üst üçgensel sistem ise geriye çözüm yöntemi ile çözülebilir.
Buna göre ekli matris

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -3 & 460 \\ -3 & 6 & 120 \end{array}\right] \quad 3/8 \times S_1 + S_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 8 & -3 & 460 \\ 0 & 39/8 & 585/2 \end{array}\right]$$

O halde üst üçgensel sistem

$$\begin{aligned} 8x - 3y &= 460 \\ 39/8y &= 585/2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir ve bu sistem çözülerek

$$x = 80, y = 60$$

elde ederiz ki bu değerler belirtilen dış talebi karşılayabilmek için sırasıyla üretilmesi gereken tarım ve sanayi ürün değerleridir. Bu üretim sürecindeki iç türekimin ise

$$AX = X - D = \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 46 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 48 \end{bmatrix}$$

birim değerinde olduğunu elde ederiz.

Bu örnekte pozitif bileşenlere sahip bir D dış talep vektörü için yine pozitif bileşenlere sahip tek bir X üretim vektörü belirlemiş bulunmaktayız. Bu özellik her zaman doğru olmayabilir. Aşağıdaki teorem ile üretim-tüketim matrisinin bazı özellikleri sağlaması durumunda bileşenleri negatif olmayan herhangi bir dış talep vektörü için yine bileşenleri negatif olmayan bir üretim vektörünün bulunabileceği ifade edilmektedir.

TEOREM 2.1. *Bileşenleri nonnegatif* $(a, b, c, d \geq 0)$ *olan*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrisi için eğer $a+c < 1$ *ve* $b+d < 1$ *ise bu taktirde herhangi* $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \geq 0$ *için*

$$(I - A)X = D$$

sistemini çözümü mevcut ve tektir; ayrıca çözüm nonnegatif bileşenlere sahiptir, yani $X \geq 0$ *dır. Burada* $X \geq 0$ *notasyonu ile* X *vektörünün bütün bileşenlerinin nonnegatif olduğunu ifade ediyoruz.*

İspat.

$$I - A = \begin{bmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1-d \end{bmatrix}$$

için

$$\det(I - A) = (1-a)(1-d) - bc$$

dir. Öte yandan

$$\begin{aligned} a + c &< 1 \\ b + d &< 1 \end{aligned}$$

için

$$\begin{array}{l} 1-a > c \\ 1-d > b \end{array} \Rightarrow (1-a)(1-d) > bc \Longrightarrow \det(I-A) > 0$$

elde ederiz. Buradan

$$X = (I-A)^{-1}D = \frac{1}{\det(I-A)} \begin{bmatrix} 1-d & b \\ c & 1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

elde ederiz.

Yukarıdaki sonuçtan, 2×2 lik Leontief matrisinin her bir elemanı nonnegatif ve sütun toplamları 1 den küçük olması durumunda nonnegatif üretim vektörü elde edilebilmektedir, ancak bu şartlar yeterli olmasına rağmen gerekli değildir. Bu durum aşağıdaki örnekte incelenmektedir.

ÖRNEK 2.1. *$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$ input-output matrisi ile $D = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$ dış talebini karşılayan üretimi belirleyiniz.*

Çözüm.

A matrisi teorem 2.1 in hipotezlerini sağlamamaktadır. Çünkü ikinci sütun toplamı birden büyüktür. Buna rağmen

$$B = I - A = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.8 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$BX = D$$

sisteminin çözümü olarak

$$X = \begin{bmatrix} 84.6154 \\ 61.5385 \end{bmatrix}$$

pozitif üretim vektörünü elde ederiz.

ÖRNEK 2.2. *Tarım, Enerji ve Otomotiv sektöründen oluşan bir ekonomide, her bir sektörün birim değer üretimi için diğer sektörlerden ihtiyaç duyduğu birim değerler aşağıda ifade edilmiştir.*

- *1 birim değerindeki tarımsal üretim 1/8 birim değerinde tarım, 1/4 birim değerinde enerji ve 1/4 birim değerinde otomotiv ürününe,*
- *1 birim değerindeki enerji üretimi 1/4 birim değerinde tarım, 1/5 birim değerinde enerji ve 1/8 birim değerinde otomotiv ürününe ve*
- *1 birim değerindeki otomotiv üretimi 1/4 birim değerinde tarım, 1/4 birim değerinde enerji ve 1/4 birim değerinde otomotiv ürününe ihtiyaç duymaktadır. Buna göre iç talebi karşıladıktan sonra 400 birim değerinde tarım, 250 birim değer enerji ve 300 birim değerinde otomotiv üretim dış talebini karşılayabilmek için her bir sektörün üretim miktarını belirleyiniz.*

Çözüm.

Verilen bilgileri aşağıdaki tabloda özetleyebiliriz:

		Birim değer üretim için		
		T	E	O
Gerekli üretim değeri	T	1/8	1/4	1/4
	E	1/4	1/5	1/4
	O	1/4	1/8	1/4

O halde tüketim-üretim matrisimiz

$$A = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/5 & 1/4 \\ 1/4 & 1/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

dir.

$$\begin{aligned} B &= I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 400 \\ 250 \\ 300 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

için

$$BX = D$$

lineer cebirsel sistemini çözmeliyiz.

Şimdi Gauss eliminasyon yöntemi ile yukarıda verilen $BX = D$ sisteminine denk olan aşağıdaki sistemi çözelim:

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \vert & 400 \\ -\frac{1}{4} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{4} & \vert & 250 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \vert & 300 \end{bmatrix} \begin{matrix} 8 \times S_1 \to S_1 \\ 4 \times S_1 \to S_1 \\ 4 \times S_1 \to S_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 & \vert & 3200 \\ -1 & \frac{16}{5} & -1 & \vert & 1000 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 3 & \vert & 1200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{7} \times S_1 + S_2 \\ \frac{1}{7} \times S_1 + S_3 \to S_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -3 & \vert & -1200 \\ 0 & \frac{102}{35} & -\frac{9}{7} & \vert & \frac{10200}{7} \\ 0 & -\frac{11}{14} & \frac{19}{7} & \vert & \frac{11600}{7} \end{bmatrix}$$

$$\frac{11}{14} \times \frac{35}{102} \times S_2 + S_3 \to S_3 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -3 & \vert & -1200 \\ 0 & \frac{102}{35} & -\frac{9}{7} & \vert & \frac{10200}{7} \\ 0 & 0 & \frac{161}{68} & \vert & 2050 \end{bmatrix}$$

Bu sistemi en son denklemden başlayarak geriye doğru çözerek, gerekli tarım, enerji ve otomotiv üretim değerlerini sırasıyla

$$\begin{aligned} x_1 &= 956.5217 \\ x_2 &= 881.9876 \\ x_3 &= 865.8385 \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Bu durumda iç tüketim değerini ise

$$X - D = AX = \begin{bmatrix} 956.5217 \\ 881.9876 \\ 865.8385 \end{bmatrix} - \begin{matrix} 400 \\ 250 \\ 300 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 556.5217 \\ 631.9876 \\ 565.8385 \end{bmatrix}$$

olarak elde ederiz.

Yukarıdaki işlemler MATLAB veya OCTAVE ortamında da gerçekleştirilebilir. Aşağıdaki MATLAB/OCTAVE komutlarını inceleyelim:

```
>> A=[1/8 1/4 1/4;1/4 1/5 1/4;1/4 1/8 1/4]; % A matrisi
>> I=eye(3);                                 % 3 × 3 lük birim matris
>> B=I-A;                                    % I − A matrisi
>> D=[400 250 300]';                         % D dış talep vektörü
>> X=B\D                                     % BX = D denklem
```

sisteminin çözümünü

X = 956.5217 881.9876 865.8385
olarak elde ederiz.

MATLAB/OCTAVE ın matematiksel amaçlarla kullanımı için [2] ye başvurunuz.

Alıştırmalar 2.1.

1. *Aşağıda verilen üretim matrisleri ve dış talep vektörleri için talebi karşılayacak üretim değerlerini belirleyiniz. Her bir durum için iç tüketimi Gauss eliminasyon yöntemi yardımıyla belirleyiniz.*

   (a)
   $$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \end{bmatrix}$$

   (b)
   $$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix}$$

   (c)
   $$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 70 \\ 60 \end{bmatrix}$$

   (d)
   $$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 120 \end{bmatrix}$$

2. *Tarım ve hayvancılık sektöründen oluşan bir ekonomide*

   - 1 *birim değerindeki tarımsal üretim* 0.2 *birim tarım ve* 0.4 *birim değerinde hayvancılık sektörü ürününün kullanılmasını*
   - 1 *birim değerindeki hayvancılık sektörü üretimi* 0.3 *birim tarım ve* 0.2 *birim değerinde hayvancılık sektörü ürününün kullanılmasını gerektirmektedir.*

   120 *birim tarım ve* 100 *birimlik hayvancılık sektörü dış talebini karşılayacak sektörel üretim değerleri ne olmalıdır. İç tüketim ne kadardır?*

3. *Tekstil ve gıda sektöründen oluşan bir ekonomide*

   - 1 *birim değerindeki tekstil üretimi* 0.3 *birim tekstil ve* 0.4 *birim değerinde gıda sektörü ürünü,*
   - 1 *birim değerindeki gıda sektörü üretimi* 0.2 *birim tekstil ve* 0.5 *birim değerinde gıda sektörü ürününün kullanılmasını gerektirmektedir.*

     90 *birim tekstil ve* 80 *birim değerindeki gıda sektörü dış talebini karşılayacak sektörel üretim değerleri ne olmalıdır. İç tüketim ne kadardır?*

4. *Gıda, tekstil ve enerji sektöründen oluşan bir ekonomide*

   - 1 *birim değerindeki gıda sektörü üretimi sırasıyla* $0.1, 0.3, 0.4$ *birim değerinde gıda, tekstil ve enerji ürününe;*
   - 1 *birim değerindeki tekstil sektörü üretimi sırasıyla* $0.2, 0.3, 0.2$ *birim değerinde gıda, tekstil ve enerji ürününe;*
   - 1 *birim değerindeki enerji sektörü üretimi sırasıyla* $0.2, 0.1, 0.4$ *birim değerinde gıda, tekstil ve enerji ürününe ihtiyaç duymaktadır.*

     300 *birim değerinde gıda,* 150 *birim değerinde tekstil ve* 200 *birim değerinde enerji sektörü dış talebini karşılayacak sektörel üretim değerleri ne olmalıdır. İç tüketim ne kadardır?*

5. *Soru* $1-4$ *ü MATLAB/OCTAVE ortamında da çözerek, sonuçlarınızın doğruluğunu kontrol ediniz.*

6. *Teorem 2.1 i* 3×3 *lük bir matris için ifade ve ispat ediniz.*

Kaynaklar ve ilgili literatür

[1] Tan, S. T., Applied Finite Mathematics, PWS Kent Publication Company, Boston, US, 1990.

[2] Coşkun, E., MATLAB veya OCTAVE ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama, URL:erhancoskun.com.tr.