

Grafik yöntemi ile optimizasyon problemleri

Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Ocak, 2019

- Örnek-I

- Örnek-I
 - Bir elbise dikim firması, fabrika işçileri için iş elbisesi(üniforma) sparişi almaktadır ve bu spariş için $240m$ kumaşı mevcuttur. Üniformalar A ve B tipli model olarak hazırlanacaktır.

- Örnek-I
 - Bir elbise dikim firması, fabrika işçileri için iş elbisesi(üniformalar) siparişi almaktadır ve bu sipariş için 240m kumaşı mevcuttur. Üniformalar A ve B tipli model olarak hazırlanacaktır.
 - Her bir A tipli model yaklaşık 3 saat, B tipli model ise 1 saat işlem gerektirmekte ve bu üretim için günlük toplam 320 saatlik bir işgücü mevcut bulunmaktadır.

- Örnek-I
 - Bir elbise dikim firması, fabrika işçileri için iş elbisesi(üniformalar) siparişi almaktadır ve bu sipariş için $240m$ kumaş mevcuttur. Üniformalar A ve B tipli model olarak hazırlanacaktır.
 - Her bir A tipli model yaklaşık 3 saat, B tipli model ise 1 saat işlem gerektirmekte ve bu üretim için günlük toplam 320 saatlik bir işgücü mevcut bulunmaktadır.
 - A ve B tip her bir modelin gerektirdiği kumaş miktarları ise sırasıyla $1.2m$ ve $1m$ kadardır.

- Örnek-I
 - Bir elbise dikim firması, fabrika işçileri için iş elbisesi(üniformalar) siparişi almaktadır ve bu sipariş için $240m$ kumaş mevcuttur. Üniformalar A ve B tipli model olarak hazırlanacaktır.
 - Her bir A tipli model yaklaşık 3 saat, B tipli model ise 1 saat işlem gerektirmekte ve bu üretim için günlük toplam 320 saatlik bir işgücü mevcut bulunmaktadır.
 - A ve B tip her bir modelin gerektirdiği kumaş miktarları ise sırasıyla $1.2m$ ve $1m$ kadardır.
 - A ve B tip her bir modelin satışından elde edilecek kâr ise sırasıyla 25 ve 20 TL dir.

- Örnek-I
 - Bir elbise dikim firması, fabrika işçileri için iş elbisesi(üniforma) spariş almaktadır ve bu spariş için $240m$ kumaşı mevcuttur. Üniformalar A ve B tipli model olarak hazırlanacaktır.
 - Her bir A tipli model yaklaşık 3 saat, B tipli model ise 1 saat işlem gerektirmekte ve bu üretim için günlük toplam 320 saatlik bir işgücü mevcut bulunmaktadır.
 - A ve B tip her bir modelin gerektirdiği kumaş miktarları ise sırasıyla $1.2m$ ve $1m$ kadardır.
 - A ve B tip her bir modelin satışından elde edilecek kâr ise sırasıyla 25 ve 20 TL dir.
 - **Günlük üretimden elde edilecek olan kârın maksimum olması için hangi modelden ne kadar üretilmelidir?**

- Örnek-I

- Örnek-1
 - Probleme ait bilinmeyenler sırasıyla üretilmesi gereken A ve B model üniforma sayılarıdır ki bunları sırasıyla x ve y ile gösterelim.

- Örnek-I
 - Probleme ait bilinmeyenler sırasıyla üretilmesi gereken A ve B model üniforma sayılarıdır ki bunları sırasıyla x ve y ile gösterelim.
 - Bu durumda maximize etmek istediğimiz fonksiyon $25x + 20y$ dir.

- Örnek-I
 - Probleme ait bilinmeyenler sırasıyla üretilmesi gereken A ve B model üniforma sayılarıdır ki bunları sırasıyla x ve y ile gösterelim.
 - Bu durumda maximize etmek istediğimiz fonksiyon $25x + 20y$ dir.
 - Kaynak kısıtlaması: $1.2x + y \leq 240$

- Örnek-I
 - Probleme ait bilinmeyenler sırasıyla üretilmesi gereken A ve B model üniforma sayılarıdır ki bunları sırasıyla x ve y ile gösterelim.
 - Bu durumda maximize etmek istediğimiz fonksiyon $25x + 20y$ dir.
 - Kaynak kısıtlaması: $1.2x + y \leq 240$
 - İşgücü kısıtlaması $3x + y \leq 320$

- Örnek-I
 - Probleme ait bilinmeyenler sırasıyla üretilmesi gereken A ve B model üniforma sayılarıdır ki bunları sırasıyla x ve y ile gösterelim.
 - Bu durumda maximize etmek istediğimiz fonksiyon $25x + 20y$ dir.
 - Kaynak kısıtlaması: $1.2x + y \leq 240$
 - İşgücü kısıtlaması $3x + y \leq 320$
 - **Nonnegatiflik kısıtlamaları $x \geq 0, y \geq 0$.**

- Örnek-1

- Örnek-I



$$\begin{aligned} \max \quad & 25x + 20y \\ & 1.2x + y \leq 240 \\ & 3x + y \leq 320 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

- Örnek-II(**Sınav için zaman planlama**)Final sınavlarına hazırlanan bir öğrencinin

- Örnek-II(**Sınav için zaman planlama**)Final sınavlarına hazırlanan bir öğrencinin
 - A ve B dersleri sınav hazırlığı için toplam 40 saat zamanı mevcuttur.

- Örnek-II(**Sınav için zaman planlama**)Final sınavlarına hazırlanan bir öğrencinin
 - A ve B dersleri sınav hazırlığı için toplam 40 saat zamanı mevcuttur.
 - Öğrenci önceki deneyimlerine göre, bir saatlik çalışmanın A dersi için yaklaşık yüz üzerinden 3, B için ise 5 puan getirisi olacağını tahmin etmektedir.

- Örnek-II(**Sınav için zaman planlama**)Final sınavlarına hazırlanan bir öğrencinin
 - A ve B dersleri sınav hazırlığı için toplam 40 saat zamanı mevcuttur.
 - Öğrenci önceki deneyimlerine göre, bir saatlik çalışmanın A dersi için yaklaşık yüz üzerinden 3, B için ise 5 puan getirisi olacağını tahmin etmektedir.
 - Ayrıca öğrenci, A dersi için gerekli çalışma zamanının B için gerekli olandan en az üç kat daha fazla olması gerektiğini tahmin ediyor.

- Örnek-II(**Sınav için zaman planlama**)Final sınavlarına hazırlanan bir öğrencinin
 - A ve B dersleri sınav hazırlığı için toplam 40 saat zamanı mevcuttur.
 - Öğrenci önceki deneyimlerine göre, bir saatlik çalışmanın A dersi için yaklaşık yüz üzerinden 3, B için ise 5 puan getirisi olacağını tahmin etmektedir.
 - Ayrıca öğrenci, A dersi için gerekli çalışma zamanının B için gerekli olandan en az üç kat daha fazla olması gerektiğini tahmin ediyor.
 - **Buna göre öğrenci yaklaşık olarak hangi ders için en az kaç saat çalışmalıdır?**

- Örnek-II(**Sınav için zaman planlama**) Model

- Örnek-II(**Sınav için zaman planlama**) Model
 - Probleme ait bilinmeyenler sırasıyla A ve B dersleri için gerekli çalışma süreleridir ki bunları sırasıyla x ve y ile gösterelim.

- Örnek-II(**Sınav için zaman planlama**) Model
 - Probleme ait bilinmeyenler sırasıyla A ve B dersleri için gerekli çalışma süreleridir ki bunları sırasıyla x ve y ile gösterelim.
 - **Bu durumda maximize etmek istediğimiz fonksiyon $3x + 5y$ dir.**

- Örnek-II(**Sınav için zaman planlama**) Model
 - Probleme ait bilinmeyenler sırasıyla A ve B dersleri için gerekli çalışma süreleridir ki bunları sırasıyla x ve y ile gösterelim.
 - Bu durumda maximize etmek istediğimiz fonksiyon $3x + 5y$ dir.
 - **Zaman kısıtlaması: $x + y \leq 40$**

- Örnek-II(**Sınav için zaman planlama**) Model
 - Probleme ait bilinmeyenler sırasıyla A ve B dersleri için gerekli çalışma süreleridir ki bunları sırasıyla x ve y ile gösterelim.
 - Bu durumda maximize etmek istediğimiz fonksiyon $3x + 5y$ dir.
 - Zaman kısıtlaması: $x + y \leq 40$
 - **Dersler için gerekli zaman dağılımı** $x - 3y \geq 0$

- Örnek-II(**Sınav için zaman planlama**) Model

- Probleme ait bilinmeyenler sırasıyla A ve B dersleri için gerekli çalışma süreleridir ki bunları sırasıyla x ve y ile gösterelim.
- Bu durumda maximize etmek istediğimiz fonksiyon $3x + 5y$ dir.
- Zaman kısıtlaması: $x + y \leq 40$
- Dersler için gerekli zaman dağılımı $x - 3y \geq 0$
- Ayrıca çalışma zaman süreleri negatif olamayacağı için $x \geq 0, y \geq 0$ olmalıdır.

- Örnek-II(**Sınav için zaman planlama**) Model

- Örnek-II(**Sınav için zaman planlama**) Model



$$\begin{aligned} \max \quad & 3x + 5y \\ & x + y \leq 40 \\ & x - 3y \geq 0 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

- Örnek-III(üretim planlama)

- Örnek-III(üretim planlama)
 - Bir fabrikada yaz, kış ve mevsimlik olmak üzere üç farklı otomobil lastiği üretilmektedir.

- Örnek-III(üretim planlama)

- Bir fabrikada yaz, kış ve mevsimlik olmak üzere üç farklı otomobil lastiği üretilmektedir.
- Her bir lastik fabrikadaki üç farklı bölümde aşağıda belirtilen sürelerde işlem görmektedirler

- Örnek-III(üretim planlama)

- Bir fabrikada yaz, kış ve mevsimlik olmak üzere üç farklı otomobil lastiği üretilmektedir.
- Her bir lastik fabrikadaki üç farklı bölümde aşağıda belirtilen sürelerde işlem görmektedirler
- Üretilen her bir lastikten elde edilmesi düşünülen tahmini kâr aşağıda verilmektedir.

- Örnek-III(üretim planlama)

- Örnek-III(üretim planlama)



	Yaz	Kış	Mevsimlik	Toplam Zaman
Birinci Bölüm	1.5	1	2	90
İkinci Bölüm	1	2	2	70
Üçüncü Bölüm	2	1	1	80
Kâr	20	16	15	

- Örnek-III(üretim planlama)



	Yaz	Kış	Mevsimlik	Toplam Zaman
Birinci Bölüm	1.5	1	2	90
İkinci Bölüm	1	2	2	70
Üçüncü Bölüm	2	1	1	80
Kâr	20	16	15	

- Fabrika seçilen boyuttaki lastik üretiminden maksimum kâr elde edebilmek için hangi tipten ne kadar üretmelidir?

- Örnek-III(üretim planlama)

- Örnek-III(üretim planlama)
 - $x, y,$ ve z ile sırasıyla üretilmesi planlanan yazlık, kışlık ve mevsimlik lastik sayılarını gösterelim.

- Örnek-III(üretim planlama)
 - x, y , ve z ile sırasıyla üretilmesi planlanan yazlık, kışlık ve mevsimlik lastik sayılarını gösterelim.
 - O halde maksimize edilecek olan fonksiyon $20x + 16y + 15z$ dir

- Örnek-III(üretim planlama)

- $x, y,$ ve z ile sırasıyla üretilmesi planlanan yazlık, kışlık ve mevsimlik lastik sayılarını gösterelim.
- O halde maksimize edilecek olan fonksiyon $20x + 16y + 15z$ dir
- Birinci Bölüm kaynaklı kısıtlama: $1.5x + y + 2z \leq 90$

- Örnek-III(üretim planlama)

- $x, y,$ ve z ile sırasıyla üretilmesi planlanan yazlık, kışlık ve mevsimlik lastik sayılarını gösterelim.
- O halde maksimize edilecek olan fonksiyon $20x + 16y + 15z$ dir
- Birinci Bölüm kaynaklı kısıtlama: $1.5x + y + 2z \leq 90$
- İkinci Bölüm kaynaklı kısıtlama: $x + 2y + 2z \leq 70$

- Örnek-III(üretim planlama)

- $x, y,$ ve z ile sırasıyla üretilmesi planlanan yazlık, kışlık ve mevsimlik lastik sayılarını gösterelim.
- O halde maksimize edilecek olan fonksiyon $20x + 16y + 15z$ dir
- Birinci Bölüm kaynaklı kısıtlama: $1.5x + y + 2z \leq 90$
- İkinci Bölüm kaynaklı kısıtlama: $x + 2y + 2z \leq 70$
- Üçüncü Bölüm kaynaklı kısıtlama: $2x + y + z \leq 80$

• Örnek-III(üretim planlama)

- $x, y,$ ve z ile sırasıyla üretilmesi planlanan yazlık, kışlık ve mevsimlik lastik sayılarını gösterelim.
- O halde maksimize edilecek olan fonksiyon $20x + 16y + 15z$ dir
- Birinci Bölüm kaynaklı kısıtlama: $1.5x + y + 2z \leq 90$
- İkinci Bölüm kaynaklı kısıtlama: $x + 2y + 2z \leq 70$
- Üçüncü Bölüm kaynaklı kısıtlama: $2x + y + z \leq 80$
- Ayrıca üretilen lastik sayıları negatif olamayacağı için $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ olmalıdır.

- Örnek-III(üretim planlama)

- Örnek-III(üretim planlama)



$$\begin{aligned} \max \quad & 20x + 16y + 15z \\ & 1.5x + y + 2z \leq 90 \\ & x + 2y + 2z \leq 70 \\ & 2x + y + z \leq 80 \\ & x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned}$$

- Aşağıda verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinin grafiğini çiziniz ve köşe noktalarının koordinatlarını belirleyiniz.

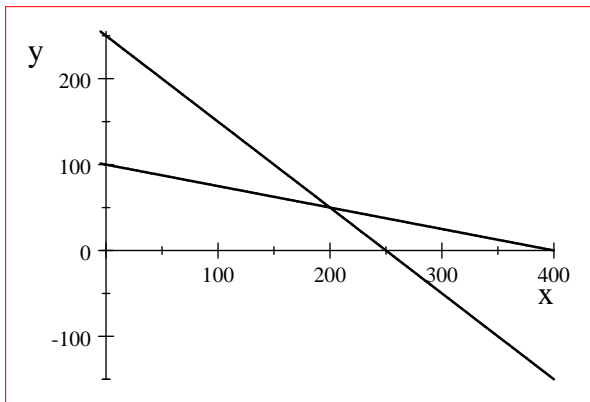
- Aşağıda verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinin grafiğini çiziniz ve köşe noktalarının koordinatlarını belirleyiniz.



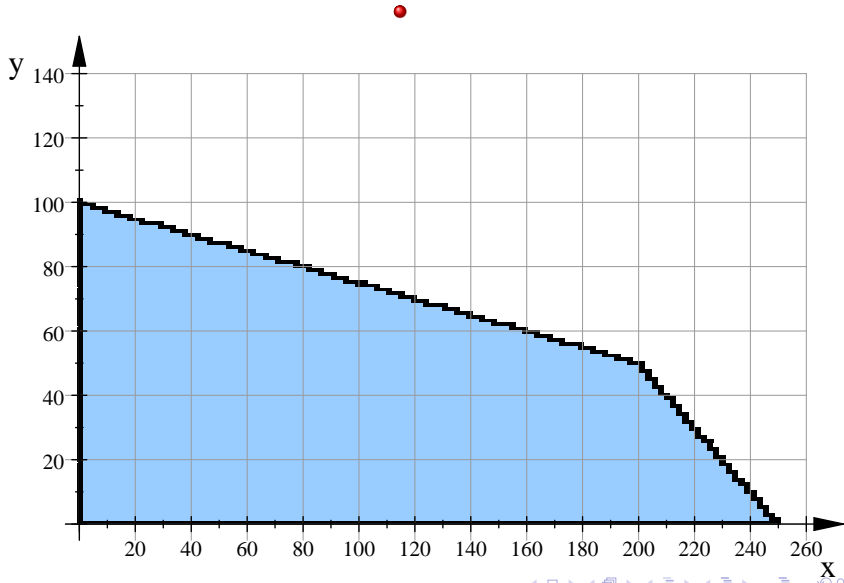
$$\begin{aligned}x + y &\leq 250, \\2x + 8y &\leq 800, \\x &\geq 0, y \geq 0\end{aligned}$$

Eşitsizlikler sisteminin çözüm kümesi

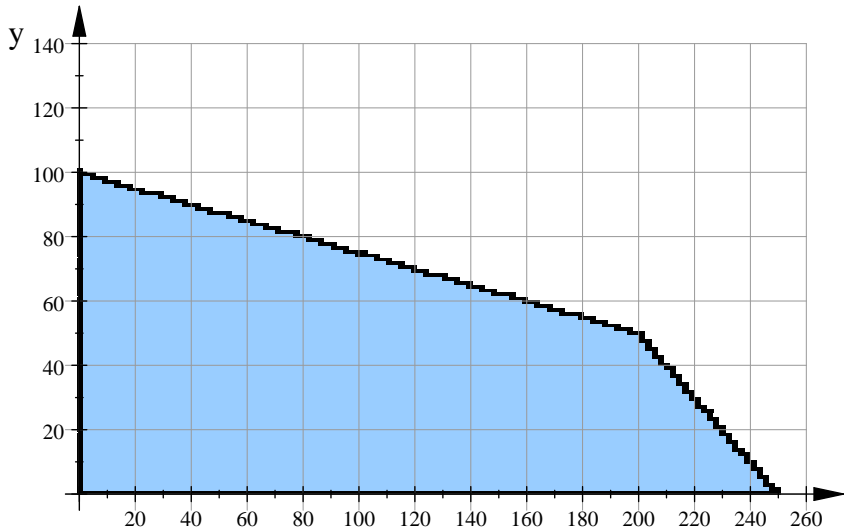
- $y = -x + 250$, $y = -x/4 + 400$



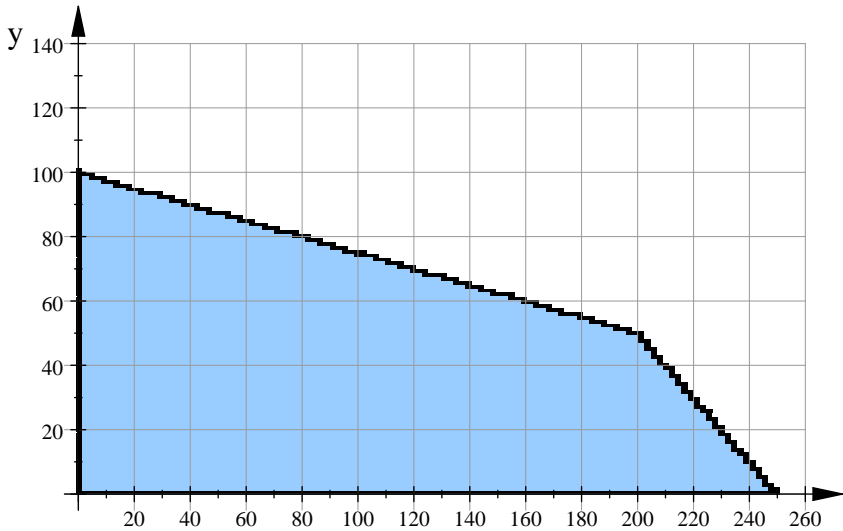
Eşitsizlikler sisteminin çözüm kümesi



Eşitsizlikler sisteminin çözüm kümesi



Eşitsizlikler sisteminin çözüm kümesi



- Aşağıda verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinin grafiğini çizin ve köşe noktalarının koordinatlarını belirleyiniz.

Eşitsizlikler sisteminin çözüm kümesi

- Aşağıda verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinin grafiğini çiziniz ve köşe noktalarının koordinatlarını belirleyiniz.



$$x + y \leq 65$$

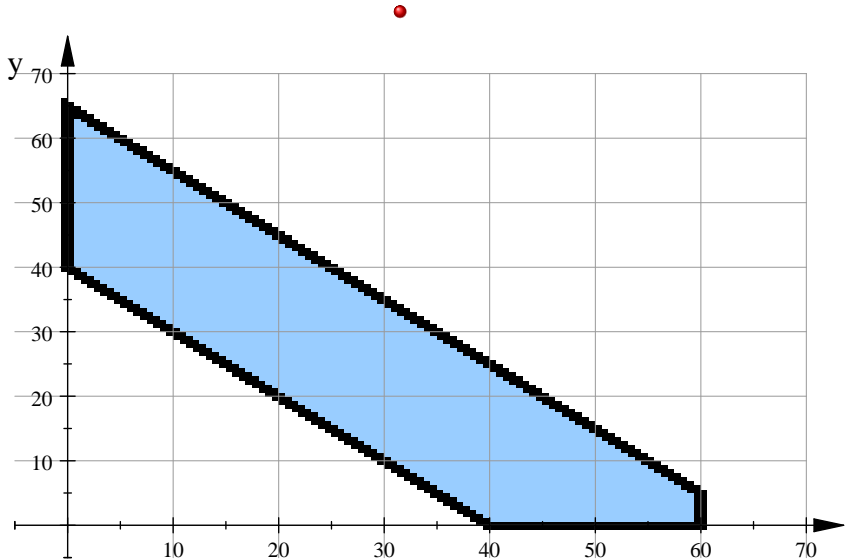
$$x + y \geq 40$$

$$x \geq 0$$

$$x \leq 60$$

$$y \geq 0$$

Eşitsizlikler sisteminin çözüm kümesi



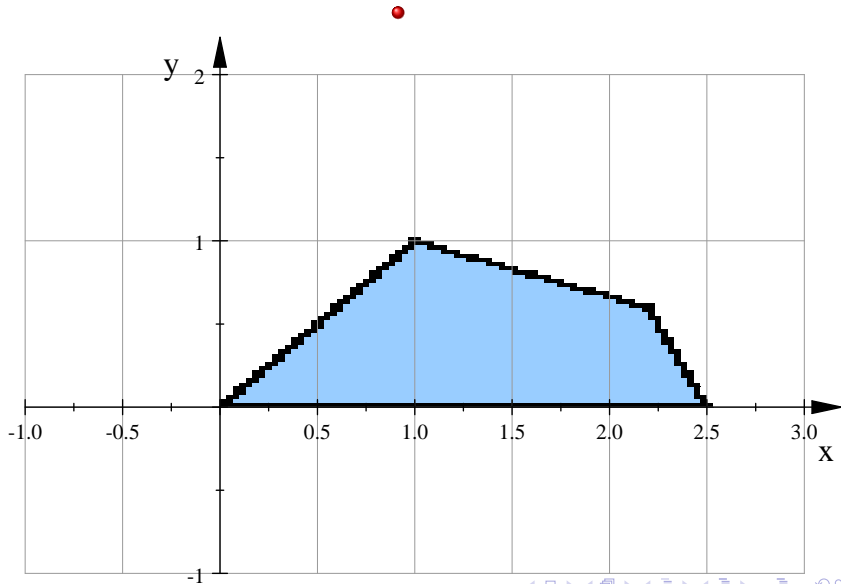
- Aşağıda verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinin grafiğini çizin ve köşe noktalarının koordinatlarını belirleyiniz.

- Aşağıda verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinin grafiğini çizin ve köşe noktalarının koordinatlarını belirleyiniz.

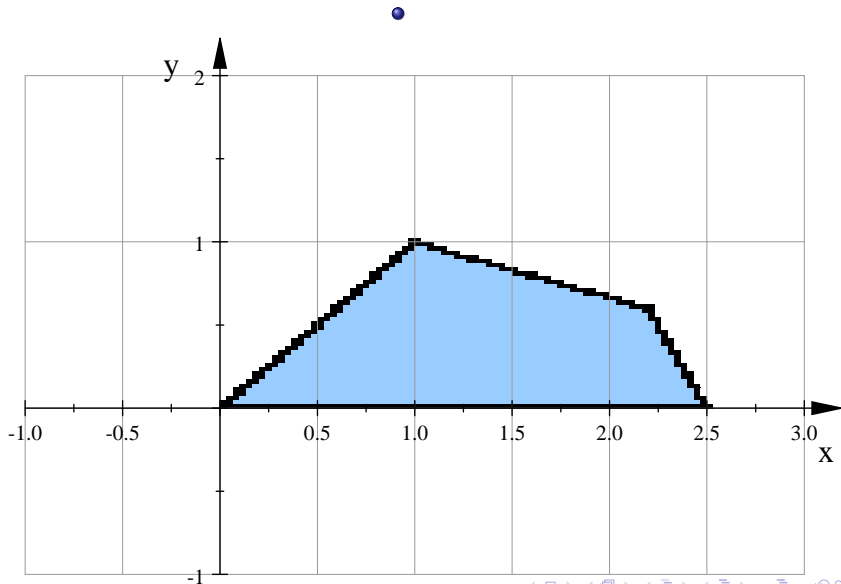


$$\begin{aligned}x + 3y &\leq 4 \\2x + y &\leq 5 \\x - y &\geq 0 \\x \geq 0, y &\geq 0\end{aligned}$$

Eşitsizlikler sisteminin çözüm kümesi



Eşitsizlikler sisteminin çözüm kümesi



İki değişkenli Problemler için Grafik Yöntemi

- Bu bölümde $X = [x \ y]^T$, $C = [c_1 \ c_2]$, $A_{2 \times 2} = [A_1; A_2]$ matris ve $b = [b_1 \ b_2]^T$ olmak üzere **Lineer optimizasyon problemi** olarak adlandırılan

$$\max CX$$

$$AX \leq b \quad \text{veya}$$

$$X \geq 0$$

$$\min CX$$

$$AX \geq b$$

$$X \geq 0$$

veya ' \leq ' ve ' \geq ' kısıtlamalarının her ikisini de içeren iki bilinmeyenli problemlerinin grafik yöntemi yardımıyla çözümünü inceliyoruz.

İki değişkenli Problemler için Grafik Yöntemi

- Bu bölümde $X = [x \ y]^T$, $C = [c_1 \ c_2]$, $A_{2 \times 2} = [A_1; A_2]$ matris ve $b = [b_1 \ b_2]^T$ olmak üzere **Lineer optimizasyon problemi** olarak adlandırılan

$$\max CX$$

$$AX \leq b \quad \text{veya}$$

$$X \geq 0$$

$$\min CX$$

$$AX \geq b$$

$$X \geq 0$$

veya ' \leq ' ve ' \geq ' kısıtlamalarının her ikisini de içeren iki bilinmeyenli problemlerinin grafik yöntemi yardımıyla çözümünü inceliyoruz.

- Burada maksimize veya minimize edilecek olan $CX = c_1x + c_2y$ fonksiyonuna **objektif** veya **hedef fonksiyon** adı verilir.

İki değişkenli Problemler için Grafik Yöntemi

- Bu bölümde $X = [x \ y]^T$, $C = [c_1 \ c_2]$, $A_{2 \times 2} = [A_1; A_2]$ matris ve $b = [b_1 \ b_2]^T$ olmak üzere **Lineer optimizasyon problemi** olarak adlandırılan

$$\max CX$$

$$AX \leq b \quad \text{veya}$$

$$X \geq 0$$

$$\min CX$$

$$AX \geq b$$

$$X \geq 0$$

veya ' \leq ' ve ' \geq ' kısıtlamalarının her ikisini de içeren iki bilinmeyenli problemlerinin grafik yöntemi yardımıyla çözümünü inceliyoruz.

- Burada maksimize veya minimize edilecek olan $CX = c_1x + c_2y$ fonksiyonuna **objektif** veya **hedef fonksiyon** adı verilir.
- **Problemde verilen eşitsizlikler sisteminin çözüm kümesine ise problemin uygun çözüm kümesi** adı verilir.

İki değişkenli Problemler için Grafik Yöntemi

- Bu bölümde $X = [x \ y]^T$, $C = [c_1 \ c_2]$, $A_{2 \times 2} = [A_1; A_2]$ matris ve $b = [b_1 \ b_2]^T$ olmak üzere **Lineer optimizasyon problemi** olarak adlandırılan

$$\max CX$$

$$AX \leq b \quad \text{veya}$$

$$X \geq 0$$

$$\min CX$$

$$AX \geq b$$

$$X \geq 0$$

veya ' \leq ' ve ' \geq ' kısıtlamalarının her ikisini de içeren iki bilinmeyenli problemlerinin grafik yöntemi yardımıyla çözümünü inceliyoruz.

- Burada maksimize veya minimize edilecek olan $CX = c_1x + c_2y$ fonksiyonuna **objektif** veya **hedef fonksiyon** adı verilir.
- Problemde verilen eşitsizlikler sisteminin çözüm kümesine ise problemin **uygun çözüm kümesi** adı verilir.
- Uygun çözüm kümesi içerisinde verilen problemi maksimize(veya minimize) eden çözüme **optimum çözüm** adı verilir.

Theorem

Bir lineer optimizasyon probleminin çözümü mevcutsa, bu çözüm uygun çözüm kümesinin köşe noktalarından birisidir. Eğer herhangi iki komşu köşe noktada objektif fonksiyon aynı değere sahipse, bu iki noktayı birleştiren doğru üzerindeki her nokta da problemin bir çözümüdür ve bu durumda problem sonsuz sayıda çözüme sahiptir[1].

Örnek

Verilen optimizasyon probleminin çözümünü belirleyiniz.

$$\max 3x + y$$

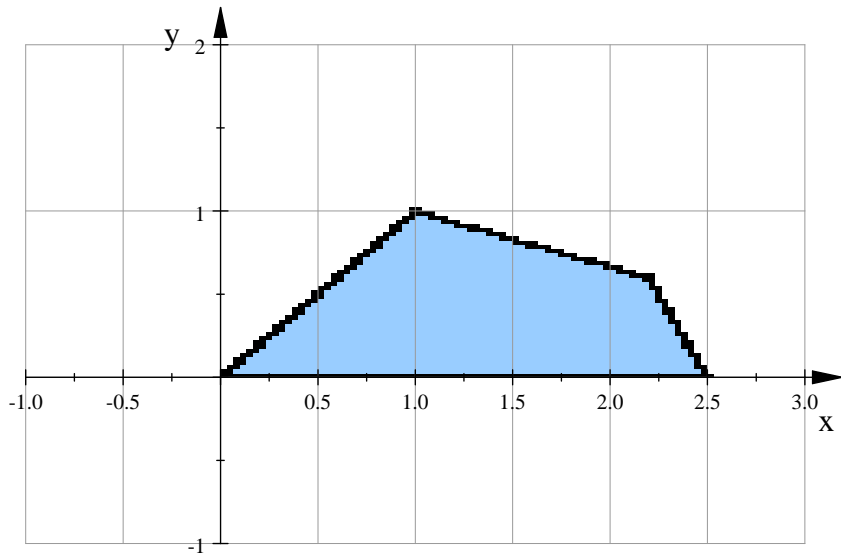
$$x + 3y \leq 4$$

$$2x + y \leq 5$$

$$x - y \geq 0$$

$$x, y \geq 0$$

İki değişkenli Problemler için Grafik Yöntemi



İki değişkenli Problemler için Grafik Yöntemi

- O halde köşe noktalarında objektif fonksiyonunun değerini hesaplayıp en büyük değere sahip olan noktayı belirlemektir.

(x, y)	$3x + y$
$(0, 0)$	0
$(5/2, 0)$	$15/2$
$(11/5, 3/5)$	$36/5$
$(1, 1)$	4

O halde optimum çözüm $(5/2, 0)$ dır.

Örnek

Verilen optimizasyon probleminin çözümünü belirleyiniz.

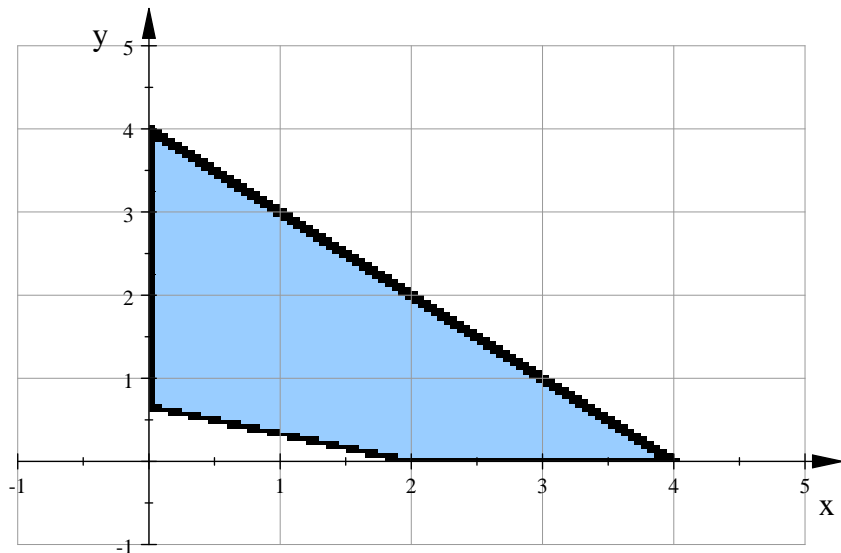
$$\min 3x + 4y$$

$$x + y \leq 4$$

$$x + 3y \geq 2$$

$$x, y \geq 0$$

İki değişkenli Problemler için Grafik Yöntemi



İki değişkenli Problemler için Grafik Yöntemi

- Çözüm kümesinin köşe noktalarının koordinatları ve bu noktadaki objektif fonksiyonun değerleri aşağıda verilmektedir.

(x, y)	$3x + 4y$
$(0, 2/3)$	$8/3$
$(2, 0)$	6
$(4, 0)$	12
$(0, 4)$	16

O halde objektif fonksiyonun minimumuna karşılık gelen $(x, y) = (0, 2/3)$ noktası optimal çözümdür.

- Alıştırmalar

- Alıştırmalar

- Bir otomotiv üretim firması A ve B tip ekonomik otomobil modelleri üretmektedir ve firmanın bir sezonluk üretim için toplam 14750 saatlik işgücü ve bu üretim için 725000 TL finansman kaynağı mevcuttur. A ve B tip modellerin her biri sırasıyla 400 ve 350 saatlik işgücü kaynağı gerektirmekte ve üretici bu modellerin herbirinden 3500 ve 3400 TL kâr elde edeceğini tahmin etmektedir. A ve B tipli her bir modelin maliyeti sırasıyla 15000 TL ve 20000 TL dir. Bir sezonluk üretimden maksimum kâr elde edebilmek için hangi modelden ne kadar üretilmelidir?

- Alıştırmalar

- Alıştırmalar
- Bir diyetisyen iki ürünün(*Ürün_I*, *Ürün_II*) uygun miktardaki karışımı ile bir bitkisel ilaç hazırlamak istemektedir. *Ürün_I* in her bir gramı $3mg$ demir, $4mg$ C vitamini ve $2mg$ da kolestrol içermektedir. *Ürün_II* nin her bir gramı ise $6mg$ demir, $2mg$ C vitamini ve $3mg$ da kolestrol içermektedir. Hazırlanacak olan ilacın en az $1500 mg$ demir ve $800 mg$ da C vitamini içermesi istenmektedir. Minimum kolestrol içeren bitkisel ilaç hangi tip üründen ne kadar içermelidir?

- Alıştırmalar

• Alıştırmalar

- Bir pastahane kilogramı sırasıyla 3 TL ve 5 TL olan portakal ve kivi karışımından bir içecek hazırlamak istemektedir. Her bir meyve çeşidinin her bir 100 gramındaki kalori ve karbonhidrat miktarları aşağıdaki tabloda verilmektedir. Ayrıca karışımın sahip olması gereken minimal besin değerleri de yine tablonun son satırında verilmektedir.

100 gramda	Kalori(kcal)	Karbonhidrat(gr)
portakal	39	12
kivi	62	15
Minimal Gereksinim	62900	16500

Bu veriler ışığı altında minimum maliyetli karışım, hangi meyve türünden kaç gram içermelidir?

- Kaynak

- Kaynak
- S. T. Tan, Applied Finite Mathematics, Kent Publishing, USA.

- Kaynak
- S. T. Tan, Applied Finite Mathematics, Kent Publishing, USA.
- Coşkun, E., Endüstriyel ve Uygulamalı Matematiğe Giriş,
URL:<http://erhancoskun.com.tr>