

Bölüm 6

Tomografi Uygulamaları

Bu bölümde tomografi çekim işlemi ile elde edilen verilerden tomografi görüntüsü elde edilme süreci arasında kullanılan matematiksel yöntem ve teoriye değiniyoruz. Verilerde hata olması veya olmaması durumlarına göre tomografi görüntüsüne esas teşkil eden lineer atenuasyon sabitlerinin nasıl belirlendiğini inceliyoruz.

6.1 Beer-Lambert Yasası

Tomografi görüntüsü, tomografi cihazı kafes bölgesi içerisinde yer alan çembersel bölgeden vücudumuza gönderilen x ışınlarının şiddeti ile vücudu geçtikten sonraki şidetlerini içeren verilerin karşılaştırılması ve değerlendirilmesi sonucu elde edilir. Bunun için esas kabul edilen yasa Beer-Lambert yasasıdır:

Öncelikle $[a, b]$ aralığına yerleştirilen birim alanlı kesite homojen bir cisim gözöntüne alalım. Cismin x ışını (lineer) sönüm sabiti, cismin birim hacminde absorbe edilen veya saçılan x ışını miktarının, birim hacme gelen x ışını miktarına oranı olarak tanımlanmaktadır ve genelde μ ile gösterilir.

Beer-Lambert yasası bir noktadaki ışın şiddetinin yer değişkenine göre değişim oranının, mevcut ışın şiddetiyle orantılı olduğunu ifade eder. Cismin içerisinde ilerleyen ışın şiddeti gittikçe azalacağından dolayı, söz konusu oran negatif olmalıdır.

$I(x)$ ile x noktasındaki ışın şiddetini gösterelim. Bu durumda Beer-

Lambert yasasına göre

$$\frac{dI}{dx} = -\mu I \quad (6.1)$$

olarak ifade edilir.

6.1 ile ilgili farklı senaryolar ile uygun başlangıç veya sınır değer problemleri oluşturabilir ve çözümler araştırabiliriz:

μ sabit ve biliniyor olması durumunda cisme $x = a$ noktasında giren ışın şiddeti $I_a := I(a)$ bilindiğine göre (6.1) çözülerek,

$$\frac{dI}{I} = -\mu dx$$

den integral alarak

$$\ln(I) = -\mu x + c$$

veya

$$I = e^{-\mu x + c} = Ce^{-\mu x}, C = e^c$$

elde ederiz.

$$I(a) = Ce^{-\mu a} = I_a$$

yan şartından

$$C = I_a e^{\mu a}$$

elde ederiz. O halde

$$I(x; \mu) = I_a e^{\mu a} e^{-\mu x} = I_a e^{-\mu(x-a)}, x > a \quad (6.2)$$

elde ederiz. (6.2) bağıntısı, ışın sönmüş sabiti büyük olan cisimlerde ışın şiddetinin cisim boyunca daha hızlı biçimde azaldığını ifade eder. Teknik bir ifade ile, üstel fonksiyonun monoton azalan bir fonksiyon olmasının doğal bir sonucu olarak

$$\mu_1 > \mu_2 \implies I(x; \mu_1) < I(x; \mu_2)$$

elde ederiz.

6.2 Tomografi Uygulamaları

Bu bölümde Beer-Lambert yasasını esas alan tomografi uygulamalarını inceliyoruz. Öncelikle gerçekçi olmasa bile bir boyutlu bir cismin tek bir x ışını ile incelendiği özel durumu gözönüne alalım.

6.2.1 Homojen nesne için tipik bir tomografi uygulaması

Tomografi uygulamalarında görüntüsü çekilen nesneler şüphesiz ki homojen değildir. Ancak konuya bir basit başlangıç olması amacıyla $[a, b] \times [c, d]$ bölgesine yerleştirilmiş homojen bir cisim gözönüne alalım. Cismin ışın sönüm sabiti olan μ sabitinin bilinmediğini, ancak tomografi uygulamasında olduğu üzere cisme a noktasından giriş yapan ve b noktasından çıkan ışın şiddet değerlerinin ölçülerek belirlendiğini ve sırasıyla I_{g1} ve $I_{ç1}$ olarak adlandırıldığını kabul edelim:

$$I_{g1} \rightarrow \square \rightarrow I_{ç1}$$

Bu durumda Beer-Lambert yasasına göre, μ bilinmeyen sabitinin de belirlenmesini gerektiren

$$\frac{dI}{dx} = -\mu I \quad (6.3)$$

$$I_{g1} : = I(a), I_{ç1} := I(b) \quad (6.4)$$

sınır değer problemini elde ederiz. (6.3)-(6.4) iyi tanımlı bir problemidir: yani

- çözüm mevcuttur,
- tektir ve
- sınır değerlerdeki küçük değişim çözümde de küçük değişime neden olur.

(6.3) yı,

$$\frac{dI}{I} = -\mu dx$$

biçiminde değişkenlerine ayırdıktan sonra, sağ tarafın $[a, b]$ aralığı ve sol tarafın da bu noktalarındaki I değerlerine karşılık gelen $[I_{g1}, I_{ç1}]$ aralığı üzerinden integralini alarak,

$$\int_{I_{g1}}^{I_{ç1}} \frac{dI}{I} = \int_a^b -\mu dx$$

ve buradan

$$\ln \left(\frac{I_{\zeta 1}}{I_{g1}} \right) = -\mu(b-a)$$

elde ederiz. Dolayısıyla μ bilinmeyen değerini

$$\mu = -\frac{1}{(b-a)} \ln \left(\frac{I_{\zeta 1}}{I_{g1}} \right) \quad (6.5)$$

olarak elde ederiz.

Yukarıda elde ettiğimiz μ değerini kontrol etmek isteyelim. Bunun için düşey yönde $y = c$ noktasından giren I_{g2} şiddetindeki ışımın $y = d$ noktasında ölçülen $I_{\zeta 2}$ şiddetiyle cismin terki ettiğini kabul edelim.

$$I_{g1} \rightarrow \begin{array}{c} \uparrow I_{\zeta 2} \\ \square \\ \uparrow I_{g2} \end{array} \rightarrow I_{\zeta 1}$$

Yukarıdaki işlemlere benzer olarak

$$\mu = -\frac{1}{(d-c)} \ln \left(\frac{I_{\zeta 2}}{I_{g2}} \right) \quad (6.6)$$

elde ederiz.

Eğer ölçüm değerlerinde hata yoksa, (6.5) ve (6.6) de elde edilen değerler birbirine eşit olmalıdır.

Eğer ölçümlerde hata söz konusu ise, bu taktirde çelişkili bir durum elde ederiz.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \mu_1 & : = -\frac{1}{(b-a)} \ln \left(\frac{I_{\zeta 1}}{I_{g1}} \right) \\ \mu_2 & : = -\frac{1}{(d-c)} \ln \left(\frac{I_{\zeta 2}}{I_{g2}} \right) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mu & = \mu_1 \\ \mu & = \mu_2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

denklemlerden oluşan $\mu_1 \neq \mu_2$ olduğu için tek bilinmeyenli ve iki denklemden oluşan çözümü mevcut olmayan (6.7) sistemini elde ederiz. Bu durumda (6.7) sisteminin en yakın çözümünü **En Küçük Kareler Yöntemi** ile elde edebiliriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix},$$

olmak üzere

$$A\mu = F$$

sisteminin **En Küçük Kareler** çözümü

$$A^T A\mu = A^T F$$

normal denklemlerinin çözümü olarak elde edilir. Ancak

$$A^T A = 2, A^T F = \mu_1 + \mu_2$$

olup, buradan en yakın çözüm olarak elde edilen iki çözümün ortalaması olan

$$\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2$$

değerini elde ederiz.

ÖRNEK 6.1. *Bir birim uzunluklu homojen bir cisme sol kenarından yatay olarak gönderilen I_g şiddetine sahip x ışınının sağ kenardan cisimi $I_c = 0.9I_g$ şiddetiyle terk ettiği gözlemlenmektedir. Buna göre cismin μ ışın sönüm sabitini belirleyiniz.*

Çözüm. (6.5) den

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{1}{(b-a)} \ln\left(\frac{I_c}{I_g}\right) \\ &= -\ln(0.9I_g/I_g) \\ &= -\ln(0.9) = 0.10536 \end{aligned}$$

birim olarak elde ederiz.

6.2.2 Homojen olmayan nesne için tipik bir tomografi uygulaması

Uygun bir $[a, b] \times [c, d]$ bölgesine yerleştirilen homojen olmayan bir nesne (örneğin vücut kesiti) göz önüne alarak, söz konusu nesneye ait $\mu = \mu(x, y)$ ışın sönüm fonksiyonunu yaklaşık olarak elde etmek isteyelim. Bu amaçla ışın sönüm değerlerinin aşağıda gösterildiği gibi kesitin dört ayrı alt bölgesinde yaklaşık olarak $\mu_i, i = 1, 2, 3, 4$. sabitleri ile gösterildiğini kabul edelim:

$$\begin{array}{cc} \mu_3 & \mu_4 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{array}$$

Vücut kesitine yatay yönde (soldan sağa) iki adet ve düşey yönde (aşağıdan yukarıya) doğru da iki adet ışın gönderildiğini kabul edelim. Nüfuz eden x ışınlarının bilinen giriş I_g ve ışın detektörü ile ölçülen I_c değerlerini aşağıdaki gibi gösterelim:

$$\begin{array}{ccccc} & & I_{3c} & I_{4c} & \\ & & \uparrow & \uparrow & \\ I_{2g} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline \mu_3 & \mu_4 \\ \hline \mu_1 & \mu_2 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & I_{2c} \\ I_{1g} & \rightarrow & & & \rightarrow I_{1c} \\ & & \uparrow & \uparrow & \\ & & I_{3g} & I_{4g} & \end{array}$$

$\Delta x = (b - a)/2$ ve $\Delta y = (d - c)/2$ olmak üzere, $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ görüntü bölgesi üzerinde aşağıdaki ağı tanımlayalım

$$\dot{\Omega} = \{(x_i, y_j) | i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3\} \quad (6.8)$$

Burada,

$$\begin{aligned} x_1 &= a, x_2 = a + \Delta x, x_3 = a + 2\Delta x = b; \\ y_1 &= c, y_2 = c + \Delta y, y_3 = c + 2\Delta y = d \end{aligned}$$

dir.

Ayrıca sırasıyla x ve y eksenini boyunca $\dot{\Omega}$ ağındaki orta noktalarını

$$x_{c1} = x_1 + \Delta x/2, x_{c2} = x_2 + \Delta x/2$$

ve

$$y_{c1} = y_1 + \Delta y/2, y_{c2} = y_2 + \Delta y/2,$$

ile gösterelim.

(a, y_{c1}) noktasından kesite girerek (b, y_{c1}) noktasından kesiti terk eden yatay yöndeki $I_{1g} \rightarrow I_{1ç}$ ışını boyunca

$$\frac{dI}{I} = -\mu(x, y_{1c})dx$$

denkleminin integralini alarak

$$-\ln\left(\frac{I_{1ç}}{I_{1g}}\right) = \int_a^b \mu(x, y_{1c})dx \quad (6.9)$$

elde ederiz.

Integraller için **Orta Nokta Kuralını** hatırlayalım:

$$\int_a^b f(x)dx \doteq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (6.10)$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} \mu_1 & : = \mu(x_{c1}, y_{c1}); \mu_2 := \mu(x_{c2}, y_{c1}); \\ \mu_3 & : = \mu(x_{c1}, y_{c2}); \mu_4 := \mu(x_{c2}, y_{c2}); \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.

(6.9) teki integrale orta nokta kuralı ile yaklaşarak,

$$\begin{aligned} -\ln\left(\frac{I_{1ç}}{I_{1g}}\right) & = \int_a^b \mu(x, y_{1c})dx \\ & = \int_{a=x_1}^{x_2} \mu(x, y_{1c})dx + \int_{x_2}^{x_3=b} \mu(x, y_{1c})dx \\ & \doteq \Delta x(\mu_1 + \mu_2) \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan integral yaklaşım hatasını ihmal ederek,

$$\mu_1 + \mu_2 = -\ln\left(\frac{I_{1ç}}{I_{1g}}\right) / \Delta x := b_1$$

elde ederiz.

Yukarıdaki işlemleri $I_{2g} \rightarrow I_{2\zeta}, I_{3g} \rightarrow I_{3\zeta}, I_{4g} \rightarrow I_{4\zeta}$ işinlari için de tekrarlayarak,

$$\begin{aligned}\mu_1 + \mu_2 &= b_1 \\ \mu_3 + \mu_4 &= b_2 \\ \mu_1 + \mu_3 &= b_3 \\ \mu_2 + \mu_4 &= b_4\end{aligned}\tag{6.11}$$

elde ederiz. Bu sistemi matris vektör formatında da ifade edebiliriz:

$$A\mu = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} = b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

(6.11) sistemini eşelon forma indirgemeye çalışalım:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_4 \end{array} \right] & \xrightarrow{-1 \times S_1 + S_3} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & b_3 - b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{S_2 < -} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{S_2 + S_3} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 - b_1 + b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-1 \times S_3 + S_4} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 - b_1 + b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 - b_3 - b_4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

elde ederiz. Son adımdan çözümün mevcut olması için

$$b_1 + b_2 = b_3 + b_4$$

sağlanmalıdır. Bu sonuç (6.11) dan da görülmektedir, çünkü hem $b_1 + b_2$ ve hem de $b_3 + b_4$ toplamı

$$\sum_{i=1}^4 \mu_i$$

toplamına eşittir.

Ancak bu durumda dört bilinmeyenli ve üç denklemden oluşan

$$\begin{aligned}\mu_1 + \mu_2 &= b_1 \\ \mu_2 + \mu_4 &= b_4 \\ \mu_3 + \mu_4 &= b_3 - b_1 + b_4\end{aligned}$$

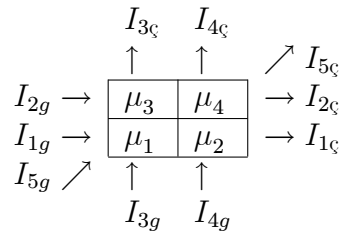
sistemini elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned}\mu_3 &= -\mu_4 + b_3 - b_1 + b_4 \\ \mu_2 &= -\mu_4 + b_4 \\ \mu_1 &= -\mu_2 + b_1 \\ &= \mu_4 + b_1 - b_4\end{aligned}$$

veya

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} = \mu_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - b_4 \\ b_4 \\ b_3 - b_1 + b_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \mu_4 \in R$$

ile verilebilen sonsuz sayıda çözüm mevcuttur. Bu durum görüntü kesitine gönderilen x ışın sayısının ilgili $\mu_i, i = 1, 2, 3, 4$ ışın sönüm değerlerini elde etmek için yeterli olmadığını ifade etmektedir. O halde ekstra x ışınına ihtiyaç vardır. Şekilde görülen $I_{5g} \nearrow I_{5c}$ ışını ile de görüntünün değerlendirildiğini kabul edelim.



Bu durumda (6.11) sistemi

$$\begin{aligned}\mu_1 + \mu_2 &= b_1 \\ \mu_3 + \mu_4 &= b_2 \\ \mu_1 + \mu_3 &= b_3 \\ \mu_2 + \mu_4 &= b_4 \\ \mu_1 + \mu_4 &= b_5\end{aligned}\tag{6.12}$$

olarak ifade edilir. 6.12 sistemine ait katsayı matrisinin sütunları lineer bağımsızdır. Gerçekten de elemanter satır işlemleri ile

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eşelon formunu elde ederiz. Buradan A nın sütunlarının lineer bağımsız olduğu görülmektedir.

Verilerde hata olmaması, yani $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$ olması durumunda sistem çözümlenerek bilinmeyen $\mu_i, i = 1, 2, 3, 4$ değerleri elde edilebilir.

Ancak verilerde hata olması durumunda ($b_1 + b_2 \neq b_3 + b_4$) (6.12) sisteminin çözümü mevcut değildir. Bu durumda da

$$A^T A \mu = A^T b$$

sistemi çözümlenerek (tek çözüm mevcut, çünkü A nın sütunları lineer bağımsız) en yakın çözüm elde edilir.

ÖRNEK 6.2. Aşağıdaki şekilde belirtilen görüntü kesitinin dört alt kesitine ait ışın sönmüm sabitlerinin $\mu_i, i = 1, 2, 3, 4$ ile gösterelim. Yatay yönde toplam ışın sönmüm değerleri

$$\begin{array}{cc} \mu_3 & \mu_4 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{array}$$

ile gösterilsin. Yatay yönde gönderilen ışınlardan toplam ışın sönmüm değerlerinin

$$\begin{aligned}\mu_1 + \mu_2 &= 0.7 \\ \mu_3 + \mu_4 &= 0.3\end{aligned}$$

olarak elde edildiğini ve düşey yönde gönderilen ışınlardan ise toplam ışın sönüm değerlerinin

$$\begin{aligned}\mu_1 + \mu_3 &= 0.4 \\ \mu_2 + \mu_4 &= 0.6\end{aligned}$$

olarak elde edildiğini kabul edelim. Bu verilerden hareketle $\mu_i, i = 1, 2, 3, 4$ değerlerinin tek türlü olarak belirlenemeyeceğini gösteriniz. Bu durumda görüntü kesitinin sol alt köşesinden sağ üst köşesine doğru gönderilen beşinci bir ışın ile de bu yödeki toplam sönüm değerinin

$$\mu_1 + \mu_4 = 0.5$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mu_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ değerlerini elde ediniz.

Çözüm. Öncelikle ilk dört denkleme ait ekli sistemi gözönüne alalım:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0.3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0.6 \end{array} \right] \xrightarrow[-1 \times S_1 + S_3]{>} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -0.3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0.6 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[S_2 < - > S_4]{>} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0.6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0.3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[S_2 + S_3]{>} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0.3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[-1 \times S_3 + S_4]{>} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

veya

$$\begin{aligned}\mu_1 + \mu_2 &= 0.7 \\ \mu_2 + \mu_4 &= 0.6 \\ \mu_3 + \mu_4 &= 0.3\end{aligned} \tag{6.13}$$

olarak ifade edilebilen dört bilinmeyenli üç denklemden oluşan bir sistem elde ederiz. Örneğin μ_4 cinsinden (6.13) sisteminin genel çözümünü

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 + \mu_4 \\ 0.6 - \mu_4 \\ 0.3 - \mu_4 \end{bmatrix} = \mu_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \mu_4 \in R^+$$

olarak elde ederiz. O halde mevcut veriler ile $\mu_i, i = 1, 2, 3, 4$ değerlerini tek türlü olarak elde edememiş bulunmaktayız.

Bu durumda beşinci ışın verisi ile elde edilen

$$\mu_1 + \mu_4 = 0.5$$

denklemini de ilave ederek,

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= 0.7 \\ \mu_2 + \mu_4 &= 0.6 \\ \mu_3 + \mu_4 &= 0.3 \\ \mu_1 + \mu_4 &= 0.5 \end{aligned} \tag{6.14}$$

sistemini elde ederiz. Bu sistemi çözerek

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0.5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times S_1 + S_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0.3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0.3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & -0.2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 + S_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 0.4 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Elde edilen sistemi geriye doğru çözerek,

$$\mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.4, \mu_3 = 0.1, \mu_4 = 0.2$$

değerlerini tek türlü olarak elde ederiz. O halde kesit üzerindeki değerler

$$\begin{array}{cc} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \end{array}$$

olarak elde edilir.

6.2.2.0.1 Verilerde hata olması durumu Verilerde hata olması durumunda ilgili sisteminin çözümü mevcut değildir. Örneğin ölçüm sonucunda

$$\mu_1 + \mu_2 = 0.6$$

olarak elde ettiğimizi düşünelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= 0.6 \\ \mu_3 + \mu_4 &= 0.3 \\ \mu_1 + \mu_3 &= 0.4 \\ \mu_2 + \mu_4 &= 0.6 \\ \mu_1 + \mu_4 &= 0.5 \end{aligned} \quad (6.15)$$

elde ederiz ki bu sistem çözüme sahip değildir, çünkü ilk iki denklemi taraf tarafa toplayarak

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 0.9$$

elde ederken, üç ve dördüncü denklemleri taraf tarafa toplayarak

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1$$

elde ederiz. Bu durumda En Küçük Kareler çözümünü elde etmeliyiz: 6.15 sistemini,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix}$$

olmak üzere matris-vektör notasyonu ile

$$A\mu = b$$

biçiminde yazabiliriz. Bu sistemin En Küçük Kareler çözümü ise

$$A^T A \mu = A^T b$$

sisteminin çözümüdür.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, A^T b = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.2 \\ 0.7 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

olup söz konusu çözüm

$$\mu_1 = 0.275, \mu_2 = 0.35, \mu_3 = 0.1, \mu_4 = 0.225$$

dir ve kesit üzerindeki değerler

$$\begin{array}{cc} 0.1 & 0.225 \\ 0.275 & 0.35 \end{array}$$

olarak elde edilir.

6.2.3 Hounsfield Sayıları

Birbirine yakın olan söntüm sabitlerini birbirinden ayırt etmek amacıyla G. Hounsfield¹ tarafından tanımlanan ve Hounsfield ölçeği adı verilen ölçekle, orjinal söntüm sabitleri H_u sabitleri veya Bilgisayar Tomografi sabitleri adı verilen sabitlere aşağıdaki dönüşüm yardımıyla dönüştürülür:

$$Hu(\mu) = 1000 \times \frac{\mu - \mu_{su}}{\mu_{su} - \mu_{hava}}$$

Bu ölçeğe göre

$$\begin{aligned} Hu(\mu_{hava}) &= -1000, \\ Hu(\mu_{su}) &= 0 \end{aligned}$$

dır. Tomografi görüntüsünü oluşturan değerler, orjinal μ sabitleri yerine, bu sabitlere karşılık gelen H_u sabitleridir. Örneğin aşağıda verilen beyin tomografisi görüntüsünde fare (218,134) piksel koordinatına sahip noktanın H_u sayısının -986(yaklaşık hava değeri) olduğunu göstermektedir.

Yukarıda özetlenen lineer cebirsel yöntem ile μ_i değerlerinin elde edilmesi, pratikte tercih edilmez, çünkü her bir bilinmeyen için en az bir lineer denklem gerekmektedir. Bu durumda 600×600 boyutundaki tipik bir tomografi görüntüsü için yaklaşık 400000×400000 boyutunda büyük bir lineer sistemin çözülmesi gereklidir.

Güncel yöntemler, Fourier Dilimleme teoremi[2] ve Radon dönüşümü[3] gibi ileri düzey teorik alt yapı gerektirdikleri için bu yöntemlere lisans düzeyi ile uyumlu olarak hazırladığımız bu kaynakta yer veremiyoruz.

¹1919-2004(İngiliz elektrik mühendisi)



Alıştırmalar 6.1.

1. Bir birim uzunluğundaki bir cisme I_g şiddetinde bir x ışını gönderilmekte ve çıkış değerinin ise $I_c = 0.9 \times I_g$ olduğu ölçülmektedir. Buna göre cismin ışın sönüm sabiti nedir?
2. Bir birim uzunluğunda ve ışın sönüm sabiti $\mu = 0.2 \text{ cm}^{-1}$ olan cisme gönderilen I_g ışın şiddetinin cismi terkediş değeri olan I_c değeri, I_g nin yüzde kaçı kadardır?
3. 2×2 lik alt kesitlerde farklı bileşenlere sahip ve şekilde belirtilen

$$\begin{array}{cc} \mu_3 & \mu_4 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{array}$$

ışın sönüm sabiti bir cisim gözönüne alalım. Yatay, dişey ve yönlerden gönderilen ışınlardan,

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= 0.7 \\ \mu_3 + \mu_4 &= 0.3 \\ \mu_1 + \mu_3 &= 0.4 \\ \mu_2 + \mu_4 &= 0.6 \end{aligned}$$

elde edilmiştir. Buna göre $\mu_i, i = 1, 2, 3, 4$ değerlerini tek türlü olarak elde edemeyeceğinizi gösteriniz. Sistemin genel çözümüni yazınız.

4. Soru 3 deki verilere ilaveten cismin sol üst köşesinden sağ alt köşesine doğru gönderilen bir diğer ışın ile $\mu_3 + \mu_2 = 0.9$ verisini elde ettiğimizi düşünelim. Bu durumda $\mu_i, i = 1, 2, 3, 4$ değerleri ne olur?

5. Soru 3 ü

$$\mu_1 + \mu_2 = 0.7$$

$$\mu_3 + \mu_4 = 0.3$$

$$\mu_1 + \mu_3 = 0.4$$

$$\mu_2 + \mu_4 = 0.6$$

için tekrar ediniz. $\mu_3 + \mu_2 = 0.5$ verisini de ilave ederek tek çözüm belirleyiniz.

6. Soru 5 teki sistemde ilk denklemin sağ yanı 0.8 olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mu_3 + \mu_2 = 0.5$ verisinin de ilavesiyle söz konusu sistemin çözümünün mevcut olmayacağını göstererek, En Küçük Kareler yöntemi çözümünü belirleyiniz.
7. Su ve havanın sönüm değerlerini araştırarak, soru 6 da elde ettiğiniz $\mu_i, i = 1, 2, 3, 4$ değerlerine karşılık gelen Hu sayılarını belirleyiniz.

Kaynaklar ve ilgili literatür

- [1] Coşkun, E. Octave Uygulamalı Sayısal Analiz(URL:aves.ktu.edu.tr)
- [2] Alexander D. Poularikas, Editor-in-Chief, Transforms and applications handbook, CRC press, 2010.
- [3] Eric Todd Quinto, An introduction to X-ray tomography and Radon-Transforms, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, AMS, 2005.
- [4] Sigurd Angenent et al, Mathematical methods in medical image processing, Bulletin of the American Mathematical Society,