Bölüm 7

GPS Uygulamaları

Bu bölümde son yıllarda günlük yaşamımızın bir parçası haline gelen ve hayatımızı büyük ölçüde kolaylaştıran, araçlarımızda ve telefonlarımızda sıkça başvurduğumuz GPS sisteminin matematiğini kısaca ve basitleştirerek özetleyeceğiz. Gerçek mühendislik hesaplamaları teknik detayları dikkate alması gerektiği için daha karmaşıktır. Buradaki sunumumuz fenbilimleri ve özellikle matematik bölümü öğrencilerine yöneliktir.

Çeşitli amaçlarla dünya etrafında peryodik biçimde hareket eden uydular mevcuttur. Haberleşme uyduları televizyon yayınlarını bizlere ulaştırırlar. Hava araçları başta olmak üzere istenilen heryerde kullanılabilen konum belirleme uyduları ise yeryüzünden $20 - 30$ km metre yükseklikte belirli bir yörüngede hareket ederek devamlı bir biçimde yeryüzüne sinyaller gönderirler[1]. Gönderilen sinyal içerisinde, sinyalin nereden ve ne zaman gönderildiği bilgisi yer alır.

Öteyanda uydu sinyal alıcı sistemler bu bilgiyi alarak, sinyalin nekadar sürede kendilerine ulaştığını hesaplarlar. Eğer sinyal uydudan $t = t_1$ anında gönderilmiş ve uydu alıcısına $t = t_2$ anında ulaşmış ise, uydu saati ve sinyal alıcı saatinin senkron olması durumunda sinyalin alıcıya ulaşma süresi

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

dir. Öte yandan sinyalin sabit c ışık hızı ile hareket ettiği kabul edilirse uydu ile bulunduğumuz konum arasındaki uzaklık

$$d_1 = c\Delta t$$

olur.

7.1 Verilerde hata olmaması durumu

Öncelikle düzlemde bir $P(x,y)$ noktasında GPS alıcısı ile bulunduğumuzu kabul edelim. Alıcımıza ulaşan sinyalin ise $A(x_1,y_1)$ noktasında bulunduğunu kabul edelim. Bu durumda iki nokta arasındaki uzaklık formülünden

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=d_1^2$$

elde ederiz. Ancak bu bilgi $P(x,y)$ konumumuzu belirlemek için yeterli değildir. Öte yandan $B(x_2,y_2)$ konumunda bulunan uydudan aldığımız bilgi ile de bu uyduya olan uzaklığımızın d_2 olduğunu hesapladığımızı düşünelim. Bu durumda $P(x,y)$ ve $B(x_2,y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık bağıntısından

$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=d_2^2$$

elde ederiz. O halde bu iki çemberin arakesit noktası üzerinde bulunmalıyız: Yani $P(x,y)$ noktasını belirlemek için

$$\begin{aligned}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 &= d_1^2\\(x-x_2)^2+(y-y_2)^2 &= d_2^2\end{aligned}$$

sisteminin reel çözümünü veya çözümlerini belirlemeliyiz. Parantezli ifadeleri açarak, taraf tarafa fark almak suretiyle,

$$\begin{aligned}ax+by &= c,\\a &= 2(x_2-x_1),\\b &= 2(y_2-y_1),\\c &= d_1^2-d_2^2+x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2\end{aligned}$$

lineer bağıntısını elde ederiz. Buradan y veya x i çözerek, yukarıdaki denklemlerde yerine yazmak suretiyle istenilen çözümleri elde edebiliriz.

ÖRNEK 7.1. *$O(0,0)$ olarak belirtilen bir şehrin 5 birim kuzeyine olan uzaklığımız $\sqrt{17}$ birim ve aynı şehrin 5 birim doğusuna olan uzaklığımız ise $\sqrt{37}$ birim olarak tahmin edilmiştir. $O(0,0)$ konumlu şehrin batısında olduğumuzu bildiğimize göre, bulunduğumuz $P(x,y)$ konumunu belirleyiniz.*

$O(0,0)$ ın 5 kilometre kuzeyinin koordinatları olan $A(0,5)$ noktası ile $P(x,y)$ noktası arasındaki uzaklıktan

$$(x-0)^2+(y-5)^2=17$$

elde ederiz. $O(0,0)$ ın 5 kilometre doğusunun koordinatları olan $B(5,0)$ noktası ile $P(x,y)$ noktası arasındaki uzaklıktan

$$(x-5)^2+y^2=37$$

elde ederiz. Daha açık olarak bununduğumuz konum (x,y) bu iki çemberin arakesiti üzerinde olmalıdır:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-10y &= -8 \\ x^2+y^2-10x &= 12 \end{aligned}$$

Taraf tarafa fark alarak

$$-10(y-x)=-20$$

veya

$$y=x+2$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz y değişken değerini birinci denklemde yerine yazarak,

$$x^2+(x+2)^2-10(x+2)=2x^2-6x-16=-8$$

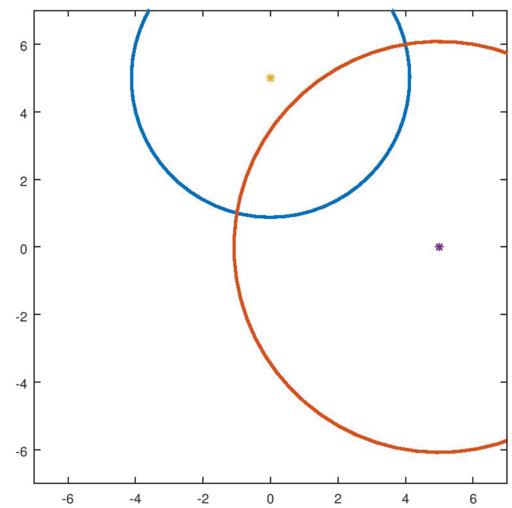
elde ederiz.

$$x^2-3x-4=0$$

denkleminin köklerinden $x_1=4, x_2=-1$ elde ederiz. Karşılık gelen y değerlerini ise

$$y_1=x_1+2=6, y_2=x_2+2=1$$

olarak elde ederiz. O halde $P(4,6), P(-1,1)$ olarak belirlenen iki konumumuz mevcuttur. Ancak $O(0,0)$ konumlu şehrin batısında olduğumuzu bildiğimize göre konumumuz $P(-1,1)$, yani $O(0,0)$ konumlu şehrin tam olarak kuzey batısında ve $\sqrt{2}$ birim uzakta bulunmaktayız.



Yukarıdaki örnekte olduğu üzere C(a,b) ve r yarıçaplı çember grafiğini

$$\begin{aligned} x(t) &= a + rcos(t), \\ y(t) &= b + rsin(t), 0 \le t \le 2\pi \end{aligned}$$

parametrik tanımı yardımıyla ve Program 7.1 ile çizdiriyoruz.

```
%---------------------------------------------------
function cember(a,b,r)
  t=linspace(0,2*pi,30);
  x=a+r*cos(t);
  y=b+r*sin(t);
  plot(x,y,'linewidth',2);
  plot(a,b,'*');
%---------------------------------------------------
```

Program 7.1: (a,b) merkezli ve r yarıçaplı çember grafiği

ÖRNEK 7.2. *A(1,1,1) konumuna olan uzaklığımız $\sqrt{2}$ birim; B(1,-1,1) konumuna olan uzaklığınız $\sqrt{2}$ birim ve C(-1,1,1) konumuna olan uzaklığınız $\sqrt{10}$ birim ise P(x,y,z) konumunuzu belirleyiniz.*

$P(x, y, z)$ konumumuzun sırasıyla A, B ve C noktasına olan uzaklıklarını

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2 \tag{7.1}$$
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2 \tag{7.2}$$
$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10 \tag{7.3}$$

olarak veya bu denklemleri açık yazarak

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = -1 \tag{7.4}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = -1 \tag{7.5}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2z = 7 \tag{7.6}$$

elde ederiz. (7.5) denklemini (-1) ile çarpıp (7.4) ile toplayarak

$$-4y = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$$

elde ederiz.

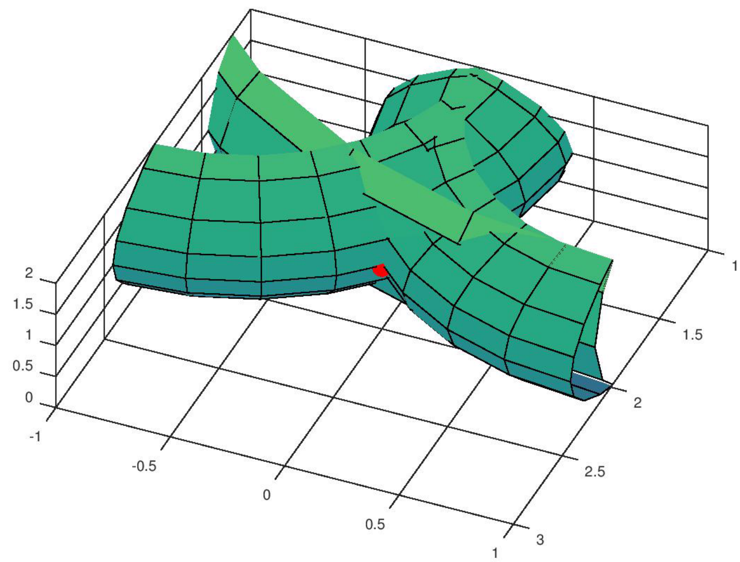
(7.6) denklemini (-1) ile çarpıp (7.4) ile toplayarak

$$-4x = -8 \Rightarrow x = 2$$

elde ederiz . Elde ettiğimiz x ve y değerlerini (7.6) denkleminde yerine yazarak,

$$z^2 - 2z + 1 = 0$$

elde ederiz. Buradan da $z = 1$ değerini elde ederiz. O halde konumunuz şekilde de görüldüğü üzere P$(2, 0, 1)$ noktası olmalıdır.



Yukarıdaki kürelerin grafiklerini, kürenin parametrik denklemi yardımıyla elde ediyoruz.

(a, b, c) merkezli ve r yarıçapılı kürenin parametrik denklemini hatırlayalım:

$$\begin{aligned} x &= a + r\cos(\theta)\sin(\phi), \\ y &= b + r\sin(\theta)\sin(\phi), \\ z &= c + r\cos(\phi), \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Buna göre (a, b, c) merkezli ve r yarıçapılı kürenin grafiğini çizdiren Program 7.2 aşağıda verilmektedir.

Alıştırmalar 7.1.

1. *Aşağıda verilen noktalar arasındaki uzaklıkları hesaplayınız*

   (a) $A(-1, 2)$, $B(3, 5)$;$d_1 =$

   (b) $A(-1, 2)$, $C(2, -4)$;$d_2 =$

2. *Soru 1 de elde ettiğiniz A ve B noktaları arasındaki d_1 uzaklığı ve A ve C noktaları arasındaki d_2 uzaklığını kullanarak, B noktasına olan uzaklığı d_1 ve C noktasına olan uzaklığı d_2 olan noktaları belirleyiniz. $A(-1, 2)$ noktası elde ettiğiniz noktalar içerisinde yer alıyor mu?*

```
%---------------------------------------
function kure(a,b,c,r);
    teta=linspace(0,2*pi, 30);
    fi=linspace(0,pi, 15);
    [Teta,Fi]=meshgrid(teta,fi);
    X=a+r*cos(Teta).*sin(Fi);
    Y=b+r*sin(Teta).*sin(Fi);
    Z=c+r*cos(Fi);
    surf(X,Y,Z);
%---------------------------------------
```

Program 7.2: (a,b,c) merkezli ve r yarıçaplı küre grafiği.

3. *Aşağıda verilen noktalar arasındaki uzaklıkları hesaplayınız*

   (a) $P(1,0,1)$,$A(1,3,1)- > d_1 =$

   (b) $P(1,0,1)$,$B(1,2,1)- > d_2 =$

   (c) $P(1,0,1)$,$C(2,1,1)- > d_3 =$

4. *Soru 3 de elde ettiğiniz d_1, d_2 ve d_3 uzaklıkları yardımıyla A noktasına olan uzaklığı d_1, B noktasına olan uzaklığı d_2 ve C noktasına olan uzaklığı d_3 olan noktaları belirleyiniz. P noktası elde ettiğiniz noktalar içerisinde yer alıyor mu?*

7.2 Verilerde Hata Olması Durumu

ÖRNEK 7.3. *Yukarıda verilen örnek 7.1 deki konumumuzu doğrulamak için O(0,0) konumlu şehrin 5 birim güneyinden gönderilen sinyal ile bu noktaya olan uzaklığımız 6 birim olarak belirlenmiş olsun. Bu durumda yukarıda belirlediğiniz konum doğru mudur? Değilse gerçek konumumuz nedir?*

$O(0,0)$ ın 5 birim güneyinin koordinatları olan $C(0,-5)$ noktası ile $P(x,y)$ noktası arasındaki uzaklıktan

$$x^2 + (y+5)^2 = 36$$

elde ederiz. Örnek örnek 7.1 ile tahmin edilen $P(-1,1)$ konumu bu denklemi sağlamamaktadır, çünkü

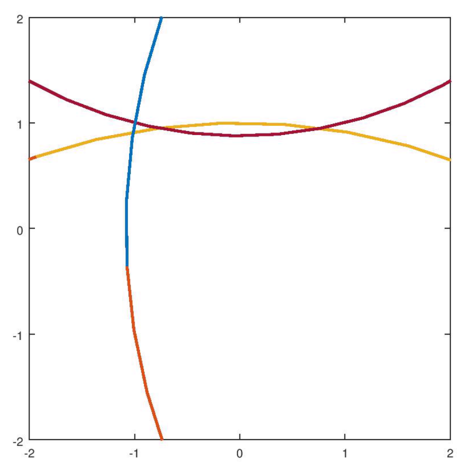
$$(-1)^2 + 6^2 = 37 \neq 36$$

dır.

Grafiksel olarak ta

$$\begin{aligned}(x-0)^2 + (y-5)^2 &= 17\\ (x-5)^2 + y^2 &= 37\\ x^2 + (y+5)^2 &= 36\end{aligned}$$

çemberlerinin ortak bir arakesit noktasına sahip olmadığını görebiliriz:



Bu durumda c sinyal yayılma ve dt ise sinyal gönderici ile sizin saatiniz arasındaki küçük te olsa saat senkronizasyon farkı(pozitif veya negatif) olmak üzere $z = cdt$ değerine eşit senkronizasyon kaynaklı mesafe hesaplama hatası mevcut olmalıdır. O halde $P(x,y)$ konumunuz

$$\sqrt{x^2 + (y-5)^2} + z = \sqrt{17} \tag{7.7}$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} + z = \sqrt{37} \tag{7.8}$$

$$\sqrt{x^2 + (y+5)^2} + z = 6 \tag{7.9}$$

sisteminin çözümüdür. Bu sistem aşağıdaki gibi de düzenlenebilir:

$$x^2 + (y-5)^2 - (z-\sqrt{17})^2 = 0 \quad (7.10)$$
$$(x-5)^2 + y^2 - (z-\sqrt{37})^2 = 0 \quad (7.11)$$
$$x^2 + (y+5)^2 - (z-6)^2 = 0 \quad (7.12)$$

(7.10)-(7.12) sistemi nonlineer cebirsel sistemdir. Sistem analitik olarak çözülebilir, ancak analitik çözüm çok sayıda köklü terimler içerir.

Alternatif olarak sayısal yöntemler, örneğin *Newton* yöntemi kullanılabilir:

$$f(x) = 0$$

denkleminin $x = p$ çözümünü belirlemek amacıyla geliştirilen Newton yöntemini hatırlayalım[2]:

x_0 başlangıç noktası p ye yeterince yakın seçilmek üzere

$$\begin{aligned} f'(x_n)\Delta x &= -f(x_n) \\ x_{n+1} &= x_n + \Delta x \end{aligned}$$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p$$

dir.

Şimdi de Nonlineer sistemler için Newton yöntemini hatırlayalım:

Bu amaçla

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 0 \\ g(x,y,z) &= 0 \\ h(x,y,z) &= 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

sistemini gözönüne alalım. Sisteme ait Jacobien matrisi

$$J(x,y,z) = \begin{bmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y & \partial g/\partial z \\ \partial h/\partial x & \partial h/\partial y & \partial h/\partial z \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmaktadır. $X = [x\ y\ z]^T, F = [f, g, h]^T$ olmak üzere (7.13) sistemi

$$F(X) = 0 \tag{7.14}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu durumda uygun bir $X^{(0)}$ ile Newton yöntemi

$$\begin{aligned} J(X^{(n)})\Delta X &= -F(X^{(n)}) \\ X^{(n+1)} &= X^{(n)} + \Delta X, n = 0, 1, ... \end{aligned} \tag{7.15}$$

olarak ifade edilir.

(7.10)-(7.12) sistemini yukarıda özetlenen Newton yöntemi ile çözen Program 7.3 aşağıda verilmektedir.

```
%-----------------------------------------------------------
 function konum=konumikiboyut(a,b,c,x0)

  F=@(x) [(x(1)-a(1))^2+(x(2)-a(2))^2-(x(3)-a(3))^2;
          (x(1)-b(1))^2+(x(2)-b(2))^2-(x(3)-b(3))^2;
          (x(1)-c(1))^2+(x(2)-c(2))^2-(x(3)-c(3))^2 ];

  J=@(x) 2*[x(1)-a(1) x(2)-a(2) -x(3)+a(3) ;
            x(1)-b(1) x(2)-b(2) -x(3)+b(3) ;
            x(1)-c(1) x(2)-c(2) -x(3)+c(3)  ];

  konum=newton(F,J,x0');
%-----------------------------------------------------------------
```

Program 7.3: iki boyutta konum belirleme uygulaması.

Ölçüm hataları içeren (7.10)-(7.12) sistemini çözerek

>> a=[0 5 sqrt(17)];%sinyal göndericinin koordinatı ve bilinmeyen konum ile arasındaki uzaklık

>> b=[5 0 sqrt(37)];

>> c=[0 -5 6];

>> x0=[1 1 0.5]; %tahmini konum(1 1) ve mesafe hatası (0.5)

>> konumikiboyut(a,b,c,x0)

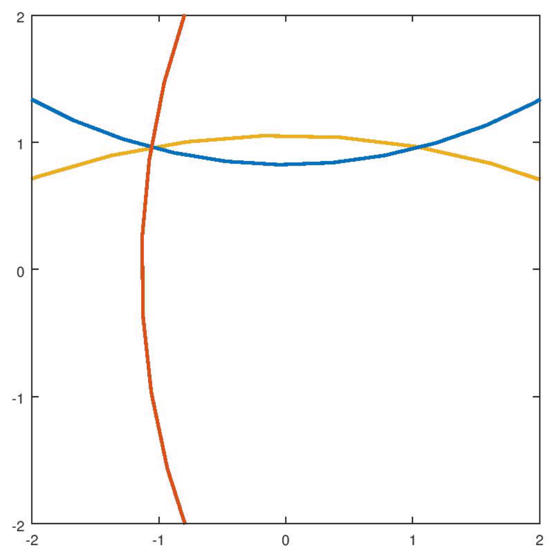
komutu ile

$$[x = -1.060987, y = 0.960097, z = -0.053796]$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\begin{aligned}
x^2 + (y-5)^2 &= (-0.053796 - \sqrt{17})^2 = 17.447 \\
(x-5)^2 + y^2 &= \left(-0.053796 - \sqrt{37}\right)^2 = 37.657 \\
x^2 + (y+5)^2 &= (-0.0537967 - 6)^2 = 36.648
\end{aligned}$$

elde ederiz. Yukarıda verilen çemberlerin grafikleri aşağıda gösterilmektedir:



Şekilden görüldüğü üzere çemberler tek bir noktada kesişmektedirler ve bu nokta gerçek konumu veren

$$P(-1.060987, 0.960097)$$

noktasıdır.$z = -0.053796$ değeri ise senkronizasyon kaynaklı mesafe hatasıdır.

Program 7.3 de kullandığımız Newton yöntemine ait Program 7.4 aşağıda verilmektedir:

Yukarıda kısaca özetlenen GPS konum belirleme problemi teknik detaylar içermektedir ve harita mühendisleri tarafından hala aktif araştırma konusu

```
%-------------------------------------------------------
function x1=newton(f,fp,x0)
  min_tol=1e-5;max_tol=1e5;test=1;sayac=0;max_sayac=50;
  while test
    sayac=sayac+1;
    dx=-fp(x0)\ f(x0);
    x1=x0+dx;
    fark=norm(x1-x0,inf);
    x1norm=norm(x1,inf);
    test=(fark>min_tol)&(x1norm<max_tol);
    x0=x1;
    if (sayac==max_sayac)|| ( x1norm>=max_tol)
      disp('iterasyon iraksak');
      x1=[];
   end
  end
%-------------------------------------------------------------
```

Program 7.4: f(x)=0 denklem veya denklem sistemi için Newton uygulaması.

olarak çalışılmaktadır. Buradaki sunumumuz sadece basitleştirilmiş bir matematiksel modeldir. Konuyla ilgili detaylı bilgiler için aşağıda sunulan referanslara başvurabilirsiniz.

Alıştırmalar 7.2.

1. *$A(0,4)$ noktasına olan uzaklığınız $\sqrt{5}$ birim, $B(-1,1)$ noktasına olan uzaklığınız ise $\sqrt{13}$ birim olarak ölçülmüş olsun. Bu durumda mümkün olabilecek konumlarınız nelerdir?*

2. *Soru 1 deki konumunuzu doğrulamak için $C(1,-1)$ noktasına olan uzaklığınızın da gönderilen sinyal yardımıyla 4 birim olduğunu öğrendiğinizi kabul edelim. Bu durumda oluşacak üç çemberin tek bir noktada kesişmeyeceğini, yani konumunuzu saat senkronizasyon hatası sonucu olarak oluşan mesafe ölçüm hataları nedeniyle belirleyemeyeceğinizi gösteriniz.*

3. *Soru 3 deki mesafelerin herbirinde oluşan hatayı z ile göstererek, ilgili nonlineer sistemi (7.7)-(7.9) e benzer biçimde yeniden yazarak ve Program 7.3 i kullanarak çözünüz.*

4. *$A(2,3,2)$, $B(1,-2,-1)$ ve $C(-2,-3,-2)$ konumlarına olan uzaklıklarınız sırasıyla $\sqrt{14}, \sqrt{17}$ ve $\sqrt{26}$ olarak ölçülmüş olsun. $P(x,y,z)$ konumunuzu Nonlineer sistemler için Newton yöntemi yardımıyla belirleyiniz.*

5. *Soru 4 te elde ettiğiniz konumunuzu doğrulatmak amacıyla $D(-4,2,1)$ konumuna olan uzaklığınızın da $\sqrt{19}$ olduğunu belirlediğinizi kabul edelim. Bu durumda konumunuzu belirlemek için oluşturacağınız kürelerin ortak bir kesişim noktasına sahip olamayacağını gösteriniz.(Yardım: Soru 4 te elde ettiğiniz $P(x,y,z)$ koordinatı ile D arasındaki mesafenin $\sqrt{19}$ olmadığını gösteriniz.)*

6. *Program 7.3 ile verilen konumikiboyut isimli kodu*

   $$konum = konumucboyut(a,b,c,d,x0)$$

   komutuyla ve

   >> a=[a1 a2 a3 a4];

   >>b=[b1 b2 b3 b4];

   >> c=[c1 c2 c3 c4];

   >> d=[d1 d2 d3 d4] ;

   >> x0=[x01 x02 x03 x04] ;

   verleri ile çalışacak biçimde geliştiriniz. Burada a,b,c,d verilerinin ilk üç bileşeni ilgili uydunun koordinatı, dördüncü bileşeni ise koordinatı belirlenmek istenen nesne veya kişinin bu koordinata olan uzaklık bilgisi olmalıdır. x0 verisinin ilk üç bileşeni tahmini konum ve dördüncü bileşen ise tahmini senkronizasyon hatası olmalıdır.Konumikiboyut isimli kodda yer alan Newton programı bu veriler için de çalışacaktır, ayrıca bir düzenleme yapılmasına gerek yoktur.

7. *Soru 5 teki sorunun mesafe ölçümlerinde oluşan hatadan kaynaklandığını kabul ederek, hatalı veriler için nonlineer sistemi (7.7)-(7.9) e benzer sistemi üç boyutlu veriler için yeniden yazarak Soru 6 da geliştireceğiniz konumucboyut programıyla belirleyiniz.*

Kaynaklar ve ilgili literatür

[1] Strang, G., Borre, K., Linear Algebra, Geodesy, and GPS, Wellesley Cambridge, 1997.

[2] Langley, B., R., The mathematics of GPS, Innovation, 1991.

[3] Thompson, R. B., Global Positioning System: The mathematics of GPS receivers, Mathematics Magazine, pp. 260-269.

[4] Coşkun, E. Octave Uygulamalı Sayısal Analiz(URL:aves.ktu.edu.tr)