

# Bölüm 3

## *Taylor* Serisi, Polinomu ve Polinomla Yaklaşım Hatası

Bu bölümde

- verilen bir  $a$  noktası komşuluğunda yakınsak bir kuvvet seri açılımı ile tanımlanan  $f$  fonksiyonu ve serinin sonlu sayıda teriminden oluşan Taylor polinomunu tanıtarak,
- söz konusu *Taylor* polinomunun  $a$  noktasının hangi komşuluğunda ilgili  $f$  fonksiyonuna yaklaşım için kullanılabileceğini,
- sonlu terimli *Taylor* yaklaşımı ile oluşan sonlandırma(truncation) hatasının verilen bir  $\epsilon > 0$  dan küçük olması için kullanılması gereken yaklaşım polinomunun derecesinin nasıl tahmin edilebileceğini,
- bilinen *Taylor* polinomu yardımıyla, verilen benzer fonksiyonlara ait *Taylor* polinomlarının nasıl türetilbileceğini,
- *Taylor* polinomu ile bir fonksiyona yaklaşımın neden gerekli olduğunu,
- Taylor polinomunun herhangi bir nokta veya nokta kümesi üzerindeki değer veya değerlerinin eş zamanlı olarak iç içe çarpım(Horner) yöntemi yardımıyla nasıl hesaplanabileceğini,
- iki değişkenli fonksiyonların *Taylor* polinomlarının nasıl hesaplandığını ve

- verilen fonksiyona ait *Taylor* polinomu yardımıyla bilgisayar ortamında yürütülen aritmetik işlemlerde oluşan yuvarlama hatalarının nasıl birikebileceğini inceliyoruz.

Konuyla ilgili detaylar için, bu bölümü hazırlarken faydalandığımız [1], [2], [6] ve [7] nolu temel referans kaynaklarını öneriyoruz.

### 3.1 *Taylor* serisi ve polinomu

$a, c_n \in R, n = 0, 1, \dots$  sabitleri ve keyfi  $x \in R$  için

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n := c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + \dots \quad (3.1)$$

toplama  $a$  merkezli ve sabit katsayılı bir kuvvet serisi adı verildiğini hatırlayalım. Eğer (3.1) serisi  $R > 0$  sabit olmak üzere, yalnız  $|x-a| < R$  aralığındaki  $x$  ler için sonlu değerlere sahipse, seriye  $(a-R, a+R)$  aralığında *yakınsaktır* denir ve bu aralığa serinin yakınsaklık aralığı ve  $R$  ye de yakınsaklık yarıçapı adı verilir. Bu aralığın dışındaki noktalar veya aralıklarda (3.1) toplamı sonlu bir değere sahip olmadığı için seriye bu tür nokta veya aralıklarda *ıraksak* seri adı verilir.

*Yakınsaklık aralığı içerisinde kuvvet serisi bir fonksiyon tanımlar:* Her bir noktadaki değeri (3.1) toplamına eşit olan  $f$  fonksiyonu

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, x \in (a-L, a+L) \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda (3.2) 'nin sağ tarafındaki seriye,  $f$  nin  $a$  noktası komşuluğundaki kuvvet serisi veya *Taylor serisi* adı verilir.

**Hatırlatma 3.1.** *Kuvvet serileri yakınsaklık bölgeleri içerisinde terim terime türevlenebilir ve integrallenebilirler. Türev ve integral işlemleri sonucunda elde edilen seriler de aynı aralıkta yakınsaktırlar.*

Serinin  $c_n$  katsayıları ile  $f$  nin ve türevlerinin  $a$  noktasındaki değerleri arasında aşağıda türetilen bir ilişki mevcuttur:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$$

ifadesinden yakınsaklık aralığı içerisinde terim terime türev alınabileceği kuralını kullanarak,

$$\begin{aligned} f(a) &= c_0, \\ f'(a) &= c_1, \\ f''(a) &= 2c_2 \\ &\dots \\ f^{(n)}(a) &= n!c_n \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. O halde  $f$  fonksiyonunun  $a$  noktası komşuluğundaki  $n$ -inci dereceden Taylor polinomu

$$\begin{aligned} P_n(x) &: = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

olarak tanımlanır ve yakınsaklık aralığı içerisindeki her  $x$  noktasında

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (3.3)$$

olarak ifade edilebilir.

**Uyarı.** Herhangi bir  $f$  fonksiyonunun bir  $a$  noktası komşuluğunda yakınsak Taylor serisine sahip olması için  $a$  noktasında fonksiyonun bütün basamaktan türevlerinin mevcut olması ve ayrıca oluşturulan kuvvet serisinin  $a$  noktası komşuluğundaki  $x$  noktaları için  $f(x)$  değerine yakınsak olması gerekir.

**TANIM 3.1.** Bir  $a$  noktası komşuluğunda (3.3) ile tanımlanan yakınsak kuvvet seri açılımına sahip fonksiyona  $a$  noktasında analitik fonksiyon adı verilmektedir.

Buna göre bir noktada sürekli olmayan veya herhangi bir basamaktan türevi olmayan fonksiyonun ilgili nokta komşuluğundaki Taylor seri açılımından bahsedemeyiz. Öte yandan çok özel durumlar olmasına rağmen, bir fonksiyonun bir noktada her basamaktan türevin mevcut olması da fonksiyonun o nokta komşuluğunda yakınsak kuvvet seri açılımına sahip olmasını garanti etmez (Alıştırma 9).

**ÖRNEK 3.1.**  $f(x) = \cos(x)$  fonksiyonunun  $a = 0$  noktası komşuluğundaki Taylor serisini ve serinin kısmi toplamlar dizisini belirleyiniz.

**Çözüm.**

$f$  nin  $a = 0$  noktasında sürekli ve her basamaktan türevinin mevcut olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, f'(x) = -\sin(x), f'(0) = 0, f''(x) = -\cos(x), f''(0) = -1, \\ f'''(x) &= \sin(x), f'''(0) = 0, f^{(4)}(x) = \cos(x), f^{(4)}(0) = 1, \dots \end{aligned}$$

değerlerini elde ederiz. O halde (3.3)'ten

$$\begin{aligned} \cos(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned}$$

ile ifade edilen Taylor seri açılımını belirleriz. Buna göre serinin kısmi toplamlar dizisi

$$\begin{aligned} P_0(x) &= P_1(x) = 1 \\ P_2(x) &= P_3(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 \\ P_4(x) &= P_5(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &\vdots \\ P_{2n}(x) &= P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

$P_n(x)$  Taylor polinomu  $f$  fonksiyonunun  $a$  noktası komşuluğundaki kuvvet serisinin kısmi toplamlar dizisinin bir elemanıdır.

Taylor teoremi olarak bilinen aşağıdaki sonuç,  $P_n(x)$  polinomunu yukarıda elde edilen yöntemden daha farklı bir yöntemle türetir ve  $f(x)$  yerine  $P_n(x)$  polinomunun kullanılması durumunda oluşacak olan hata için birbirine denk olan iki formülasyon önerir.

**TEOREM 3.1.** (Taylor teoremi)  $f \in C^{n+1}[a, b]$ , ve  $x, x_0 \in [a, b]$  seçilsin.

Bu taktirde

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n(x) \quad (3.4)$$

olarak ifade edilir. Burada

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(t-x_0)^n dt$$

kalan terimdir veya alternatif olarak

$$R_n(x) = (x-x_0)^{n+1}/(n+1)!f^{(n+1)}(c_x),$$

biçiminde de yazılabilir ve  $c_x$  ise  $x_0$  ile  $x$  arasında bir noktadır.

*İspat.* Analizin temel teoreminden

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt \quad (3.5)$$

olarak yazılır. Teoremin ispatı  $\int_{x_0}^x f'(t)dt$  integraline kısmi integrasyon yönteminin uygulanmasını esas almaktadır. Buna göre

$$u = f'(t), du = f''(t)dt$$

ile

$$dv = dt$$

den  $v = t$  yerine integral sabiti olarak  $-x$  seçimiyle  $v = t - x$  almak suretiyle

$$\int_{x_0}^x f'(t)dt = (t-x)f'(t)|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x (t-x)f''(t)dt \quad (3.6)$$

$$= (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt \quad (3.7)$$

elde ederiz. O halde (3.6) daki ifadeyi (3.5)'de yerine yazarak

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt \quad (3.8)$$

elde ederiz. (3.8) daki integral için de

$$u = f''(t), dv = (x - t)dt$$

ve

$$du = f'''(t)dt, v = -(x - t)^2/2$$

dönüşümleri ile

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x (x - t)f''(t)dt &= -f''(t)(x - t)^2/2|_{x_0}^x + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^x f'''(t)(x - t)^2 dt \\ &= \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^x f'''(t)(x - t)^2 dt \quad (3.9) \end{aligned}$$

elde ederiz. (3.9) ifadesini (3.8) da yazarak

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^x f'''(t)(x - t)^2 dt \quad (3.10)$$

olarak bir adım daha aranan gösterime yaklaşırız. Tümevarım adımı gereği  $n - 1$  için

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \quad (3.11) \\ &\quad \dots + \frac{1}{(n - 1)!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t)(x - t)^{n-1} dt \end{aligned}$$

olduğunu kabul ederek,

$$u = f^{(n)}(t), dv = (x - t)^{n-1} dt$$

ve

$$du = f^{(n+1)}(t)dt, v = -(x - t)^n/n$$

dönüşümleri ile elde edilen

$$\int_{x_0}^x f^{(n)}(t)(x - t)^{n-1} dt = -\frac{1}{n} f^{(n)}(t)(x - t)^n|_{x_0}^x + \frac{1}{n} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt$$

ifadesini (3.11) de yazarak aranan sonucu elde ederiz.

Öte yandan  $c_x$ ,  $x_0$  ile  $x$  arasında bir nokta olmak üzere integraller için ortalama değer teoreminin bir sonucu olarak

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(t - x_0)^n dt = (x - x_0)^{n+1}/(n+1)! f^{(n+1)}(c_x) \quad (3.12)$$

elde edilir.

### 3.2 Taylor serisi ve yakınsaklık bölgesi

$a = 0$  olması durumunda (3.4) gösterimine  $f$  fonksiyonunun *Maclaurin*<sup>1</sup> açılımı adı verilmektedir. Elemanter bazı fonksiyonların Maclaurin açılımları ve yakınsaklık bölgeleri aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)! \\ &= x - x^3/3! + x^5/5! - \dots + (-1)^n x^{(2n+1)}/(2n+1)! + \dots, \end{aligned} \quad (3.13)$$

Oran testi adı verilen test yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

kuvvet serisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right| = |x-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1$$

veya

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

olmak üzere

$$|x-a| < L$$

<sup>1</sup>Colin Maclaurin, 1698-1746, İskoçyalı matematikçi

eşitsizliğini sağlayan  $(a - L, a + L)$  aralığında yakınsaktır. O halde  $\sin(x)$  fonksiyonu için

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(2(n+1)+1)!}{1} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+2)(2n+3) = \infty \end{aligned}$$

olur, yani yukarıda (3.13) te verilen tanımlanan kuvvet serisi  $\sin(x)$  fonksiyonunu  $(-\infty, \infty)$  aralığında temsil eder.

Benzer biçimde

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} / (2n)! \\ &= 1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots + (-1)^n x^{(2n)} / (2n)! + \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

seri gösterimi  $\cos(x)$  fonksiyonunu  $(-\infty, \infty)$  aralığında temsil eder.

**Uyarı.** *Kuvvet serileri, temsil ettikleri fonksiyonları bu fonksiyonların tanım kümelerinde değil, sadece ilgili serilerin yakınsak oldukları bölgelerde temsil ederler.*

Örneğin,

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} x^n / n \\ &= (x - x^2/2 + x^3/3 - \dots + (-1)^{(n+1)} x^n / n + \dots), x \in (-1, 1] \end{aligned} \quad (3.15)$$

açılımı için oran testi  $|x| < 1$  için yakınsaklığı garanti eder.  $x = 1$  için de elde edilen serinin yakınsaklığı alterne sayı serileri için yakınsaklık kriteri yardımıyla kolayca görülebilir. O halde yukarıdaki açılım  $\ln(x+1)$  fonksiyonunu sadece  $(-1, 1]$  aralığında temsil eder. Örneğin  $x = 2$  için  $\ln(x+1) = \ln(3)$  tanımlı iken ilgili seri bu noktada sonlu bir değere sahip değildir.

Benzer problem

$$1/(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (3.16)$$



açılımı için de geçerlidir. Seri açılımı ve sol tarafındaki fonksiyon sadece  $(-1, 1)$  aralığında birbirine eşittir. Örneğin bu aralığın dışındaki  $x = 2$  noktası için  $1/(1 - x) = 1/(-1) = -1$  iken, sağ taraftaki toplam bu noktada sonlu bir değere sahip değildir.

Ancak

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = 1 + x/1! + x^2/2! + \cdots + x^n/n! + \cdots \quad (3.17)$$

açılımındaki  $e^x$  fonksiyonu ve sağ tarafındaki sonsuz toplam her  $x \in (-\infty, \infty)$  için aynı değere sahiptir, yani fonksiyon ve seri reel sayılar kümesi üzerinde birbirine eşittirler.

### 3.3 Yakınsaklık bölgesinde *Taylor* polinomları ile yaklaşım

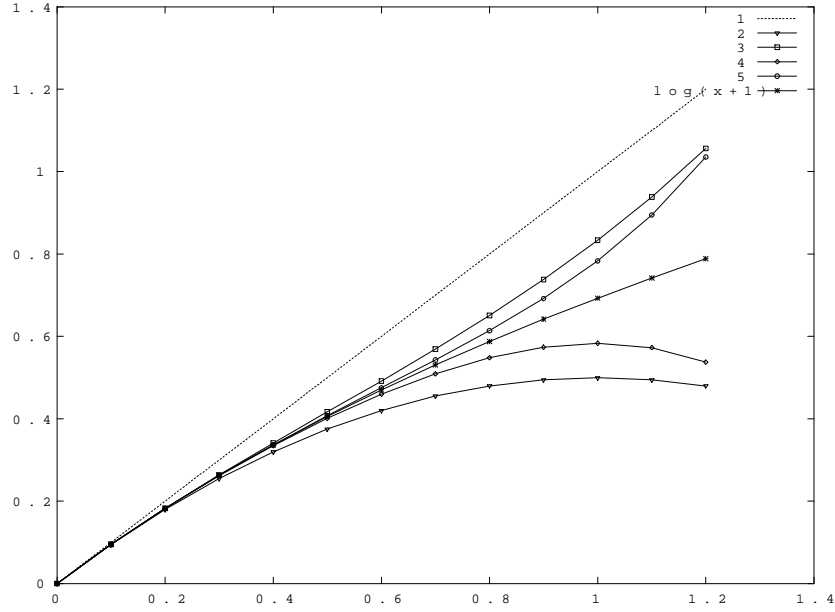
Bir fonksiyona yaklaşım için *Taylor* polinomu kullanılırken, yaklaşımın ilgili *Taylor* serisinin yakınsaklık bölgesinde geçerli olduğunu her zaman göz önünde bulundurmak gerekir. Aksi takdirde hangi dereceden polinom kullanılırsa kullanılsın, elde edilen yaklaşımlar olumlu sonuçlar vermezler. Bu durumu aşağıdaki örnekle inceleyelim:

**ÖRNEK 3.2.**  $f(x) = \ln(x + 1)$  fonksiyonunun  $a = 0$  noktası komşuluğunda ve  $[0, 1.2]$  aralığında *Taylor* polinomlarını belirleyerek belirtilen aralıkta artan  $n$  değerlerine rağmen yakınsamanın gerçekleşmediğini gözlemleyiniz.

**Çözüm.**

$f(x) = \ln(x + 1)$  fonksiyonunun  $a = 0$  noktası komşuluğunda (3.15) ile verilen *Taylor* serisi  $(-1, 1]$  aralığında yakınsaktır. Şekil 3.1 de  $[0, 1.2]$  aralığında  $n = 2, 3, \dots, 6$  için  $P_n(x)$  yaklaşımları(noktalı) ve  $f$  fonksiyonunun grafiği(çizgi) gösterilmektedir.

$n$  nin tek değerleri için elde edilen yaklaşımlar  $x = 1.2$  noktasında  $f$  nin grafiğinin üst kısmında yer alırken, çift değerler için elde edilen yaklaşımlar ise grafikleri  $f$  nin grafiğinin aşağısında yer alan yaklaşımlardır. Artan  $n$  değerleri için elde edilen yaklaşımların  $x = 1.2$  noktasında  $f$  nin grafiğinden gittikçe uzaklaştıkları görülmektedir. Bu durum, Tablo 3.1 de verilen yaklaşım hataları için sonsuz normlarından da açıkça görülmektedir.



Şekil 3.1:  $[0, 1.2]$  aralığında  $\ln(x + 1)$  ve ilk beş Taylor yaklaşımının grafiği

Tablo 3.1 den *Taylor* polinomları ile elde edilen yaklaşımların, *Taylor* serisinin yakınsaklık aralığı içerisinde yer almayan  $x$  noktaları için iyi sonuç vermeyeceğini gözlemliyoruz.

**Uyarı.** Bir *Taylor* polinomunu bir nokta komşuluğunda ilgili fonksiyona yaklaşım amacıyla kullanmadan önce, polinomun ait olduğu *Taylor* serisinin yakınsaklık bölgesine dikkat edilmelidir.

### 3.4 Uygun dereceden *Taylor* yaklaşım polinomu

Bazı uygulamalarda belirtilen yakınsaklık aralığı içerisinde verilen bir maksimum hata ile yaklaşım sağlayan *Taylor* polinomunun derecesinin de tahmin edilebilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda (3.12) ile verilen hata tahmin formülünden faydalanabiliriz.

**ÖRNEK 3.3.**  $f(x) = \ln(x + 1)$  fonksiyonu için  $a = 0$  noktası komşuluğunda ve  $[0, 1]$  aralığında  $\epsilon = 0.1$  den küçük sonsuz normu hatası ile elde edilen *Taylor* polinomunun derecesini belirleyiniz.

$n$	$\ f(x) - P_n(x)\ _\infty$
2	0.30846
4	0.25086
6	0.25086
8	0.27645
10	0.32232
15	0.54321

Tablo 3.1: Yaklaşım hataları

**Çözüm.**

Öncelikle

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! / (1+x)^{(n+1)}$$

olarak elde edildiğine dikkat edelim. O halde herhangi  $c_x \in (0, 1)$  için

$$\begin{aligned} \|f - P_n\|_\infty &= \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x) \right| \\ &= \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{x^{(n+1)} (-1)^n n!}{(n+1)! (1+c_x)^{(n+1)}} \right| \\ &\leq 1/(n+1) < \epsilon = 0.1 \end{aligned}$$

için,  $n \geq 10$  olması gerektiği tahmin edilir. Ancak bu tahmin aşırı temkinli bir tahmindir ve gerçekte

$$\|f - P_5\|_\infty = 0.0902 < 0.1$$

olup  $n \geq 5$  olması yeterlidir.

### 3.5 Taylor açılımı bilinen bir fonksiyon yardımıyla benzer fonksiyonların açılımları

Taylor açılımı bilinen bir fonksiyon yardımıyla benzer fonksiyonların açılımları hesaplanabilir.

**ÖRNEK 3.4.**  $e^{-x^2}$  fonksiyonunun  $x = 0$  noktası komşuluğundaki Taylor açılımını  $e^x$  in Taylor açılımı cinsinden hesaplayınız. Farklı  $n$  değerleri için  $\|e^{-x^2} - P_n(x)\|_\infty$  normlarını hesaplayarak hatanın artan  $n$  değerleri için sıfıra nasıl yakınsadığını gözlemleyiniz.

### Çözüm.

Öncelikle  $e^{-x}$  in açılımını  $e^x$  in Taylor açılımında  $x$  yerine  $-x$  yazarak elde edebileceğimize dikkat edelim:

$$e^{-x} = 1 - x/1! + x^2/2! - \dots + (-1)^n x^n/n! + \dots$$

ve dolayısıyla  $x$  yerine  $x^2$  yazmak suretiyle

$$e^{-x^2} = 1 - x^2/1! + x^4/2! - \dots + (-1)^n x^{2n}/n! + \dots$$

elde ederiz. (3.17) serisinin yakınsaklık yarıçapının sonsuz olduğuna dikkat edelim.

$[-2, 2]$  aralığında hesaplanan

$$\|e^{-x^2} - P_n(x)\|_\infty$$

hatalar farklı  $n$  değerleri için aşağıdaki tabloda verilmektedir.

$n$	0	2	4	6	8	10	12	16	20
$\ f(x) - P_n(x)\ _\infty$	0.98	3.02	4.98	5.68	4.98	3.55	2.14	0.51	0.08

Tablodan hatanın  $n$  yaklaşım derecesinin fonksiyonu olarak monoton biçimde azalmadığını görüyoruz. Diğer bir deyimle  $P_{n+1}$  yaklaşımının  $P_n$  den daha iyi olması gerekmemektedir. Ancak ilgili Taylor serisinin yakınsaklık aralığı içerisinde

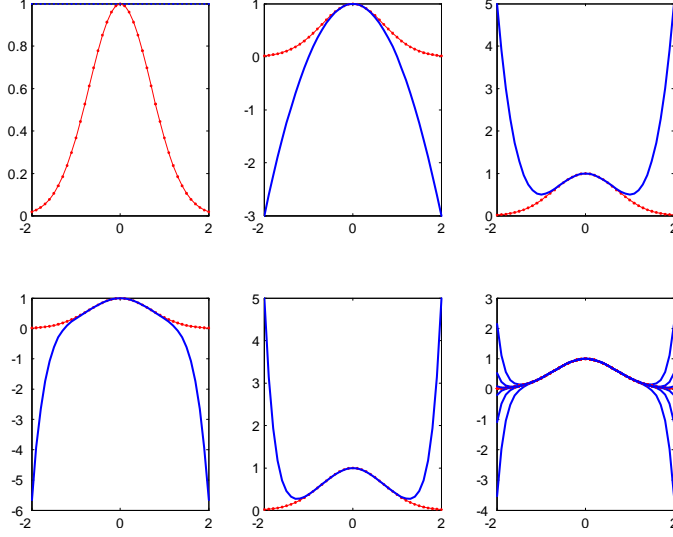
$$\|f(x) - P_n(x)\|_\infty \rightarrow 0$$

olduğunu örnek üzerinden de gözlemliyoruz.  $e^{-x^2}$  ve ilgili  $P_n(x)$  Taylor polinomlarının grafikleri ise Şekil (3.2) de verilmektedir.

Benzer biçimde  $\sin x$  fonksiyonunun Taylor açılımını kullanarak  $x \neq 0$  için

$$\sin(x)/x = 1 - x^2/3! + x^4/5! - x^6/7! + x^8/9! + \dots$$

elde edebiliriz.

Şekil 3.2:  $e^{-x^2}$  ve Taylor yaklaşımları

### 3.6 Neden *Taylor* polinomları?

Bilinen analitik yöntemlerle bir  $a$  noktasının komşuluğunda yakınsak bir kuvvet serisi ile ifade edilebilen bir fonksiyonla çalışmanın zor veya mümkün olmadığı durumlarda bu noktanın komşuluğunda fonksiyonu temsilen kuvvet serisinin açılımın belirli sayıda teriminden oluşan *Taylor* yaklaşımı kullanılabilir. Örneğin analitik yöntemlerle hesaplanamayan

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$$

integrali için bir sayısal yaklaşımı *MATLAB* *quadl* fonksiyonu yardımıyla **1.493648265624569** olarak elde ederiz.  $e^{-x^2}$  için sıfır noktası komşuluğunda yaklaşım olarak  $P_{20}$  *Taylor* polinomunun integralini hesaplamak suretiyle ise **1.493648267647435** elde ederiz. Sonuçların virgülden sonra *sekiz* basamağa kadar aynı olduklarını gözlemliyoruz.

- $a$  noktasını içeren yeterince küçük bir  $[a - L, a + L]$  *Taylor* serisi yakınsaklık aralığında

$$\int_{a-L}^{a+L} f(x) dx \cong \int_{a-L}^{a+L} P_n(x) dx$$

yaklaşımı alınabilir. Ancak integral aralığının büyük olması durumunda daha yüksek dereceden polinomun kullanılması gerekeceği için *Taylor* polinomu yerine daha uygun polinomlar kullanılmalıdır. Bu konuyu sayısal integrasyon yöntemleri bölümünde inceleyeceğiz.

- Verilen bir fonksiyonun uygun bir  $a$  noktası komşuluğundaki birinci dereceden *Taylor* polinomu,  $a$  noktası komşuluğunda fonksiyon için belki de en fazla kullanılan bir yaklaşımdır:
  - Bölüm 6 da inceleyeceğimiz fonksiyon sıfır yeri belirleme problemlerinde güncel olarak kullanılan *Newton* yöntemi, her noktada fonksiyonun birinci dereceden *Taylor* polinomu yaklaşımını kullanır ve bu polinomun sıfır yerini, kendi sıfır yeri için bir yaklaşım olarak kabul eder.
  - Bazı sayısal türev yöntemleri, fonksiyon türevi için ilgili *Taylor* polinomunun türevini yaklaşım olarak kabul eder.
- Diferensiyel denklemler için sayısal yöntemlerin hata analizinin gerçekleştirilmesinde *Taylor* yaklaşımları sıkça kullanılır.

### 3.7 Horner yöntemi ile polinom değer veya değerlerinin hesabı

$$P_n(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1}$$

olarak ifade edilen polinomun  $x_0$  noktasındaki değeri

$$P_n(x_0) = a_1x_0^n + a_2x_0^{n-1} + \cdots + a_nx_0 + a_{n+1} \quad (3.18)$$

formülünün kodlanması suretiyle hesaplanmaz. Çünkü bu şekliyle  $n^2$  ile orantılı sayıda çarpma işlemi gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Örneğin

$$\begin{aligned} P_3(x) &= a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \\ &= a_1 \times x \times x \times x + a_2 \times x \times x + a_3 \times x + a_4 \end{aligned}$$

polinomu için  $P_3(x_0)$  değerinin hesaplanması 6 adet çarpma işlemi ve 3 adet toplama işlemi gerektirir. Oysa aynı işlem

$$P_3(x) = ((a_1x + a_2)x + a_3)x + a_4$$

örneğinde olduğu üzere iç içe çarpım formatında yazılmak suretiyle 3 adet çarpma ve 3 adet toplama işlemi ile gerçekleştirilebilir. Böylece hem hesaplama işlem zamanında tasarruf sağlanmış olur ve hem de gereksiz aritmetik işlem gerçekleştirmek suretiyle oluşacak yuvarlama hataları engellenmiş olur. Bu durumda

$$b_1 = a_1$$

olarak tanımlanmak üzere

$$b_2 = b_1x_0 + a_2 = a_1x_0 + a_2(\text{en içteki toplam})$$

$$b_3 = b_2x_0 + a_3 = (a_1x_0 + a_2)x_0 + a_3(\text{en içten ikinci toplam})$$

$$b_4 = b_3x_0 + a_4 = ((a_1x_0 + a_2)x_0 + a_3)x_0 + a_4(\text{istenen toplam})$$

elde edilmiş olur. Bu işlemi sistematik olarak (3.18) polinomuna genelleştirecek olursak,

$$b_1 = a_1$$

olmak üzere

$$b_k = a_k + x_0b_{k-1}, k = 2, 3, \dots, n$$

ile tanımlanan  $\{b_k\}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  dizisi için yukarıdaki örneğimize paralel olarak

$$b_n = P_n(x_0)$$

olarak elde ederiz. Horner yöntemine ait Algoritma 3.1 aşağıda verilmektedir:

Düşük dereceli polinomların herhangi bir noktadaki değeri aşağıda belirtilen Tablo yardımıyla daha pratik olarak gerçekleştirilebilir: Örneğin yukarıda tanımlanan  $P_3(x)$  polinomunun  $x_0$  noktasındaki değerini hesaplayalım. Yukarıda belirtilen işlemler *Horner*<sup>2</sup> tabosu adı verilen tablo üzerinden kolayca gerçekleştirilebilir.

**ÖRNEK 3.5.**  $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$  polinomunun  $x_0 = 1$  noktasındaki değerini Horner yöntemi yardımıyla belirleyiniz.

**Çözüm.**

**Algoritma 3.1** Horner yöntemi

1. Girdi  $a, x_0$ , burada  $a$  polinom katsayılarını içeren vektördür.

2.  $n \leftarrow a$  nin eleman sayısı

3.  $b_1 = a_1$

4.  $k = 2, 3, \dots, n$  için

$$b_k = a_k + x_0 * b_{k-1};$$

5. Çıktı  $b_n$

$x_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
		$x_0 b_1$	$x_0 b_2$	$x_0 b_3$
	$b_1 = a_1$	$b_2 = a_2 + x_0 b_1$	$b_3 = a_3 + x_0 b_2$	$b_4 = a_4 + x_0 b_3$

Horner tablosu

olup,  $P(1) = -4$  olarak elde edilir.

Diğer bir bakış açısı ile yukarıda tanımlanan  $\{b_k\}, k = 1, 2, 3, \dots, n$  dizisi için

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_1 x^n + a_2 x^{(n-1)} + \dots + a_n x + a_{n+1} \\ &= (b_1 x^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} x + b_n)(x - x_0) + b_{n+1} \end{aligned}$$

özdeşliği sağlar ve dolayısıyla  $b_{n+1} = P_n(x_0)$  olduğu açıktır.

Her bir  $b_k$  nin hesaplanması bir adet çarpma ve bir adet de toplama işlemi gerektirdiğinden Horner yöntemi adı verilen bu yöntemle  $n$ -inci dereceden bir polinomun herhangi bir noktadaki değerinin hesaplanması  $n$  adet çarpma ve  $n$  adet toplama işlemi gerektirir. Böylece (3.18) biçiminde  $P_n(x_0)$  ın hesaplanması durumunda gereken  $O(n^2)$  mertebesindeki işlem, *Horner* yöntemi yardımıyla alternatif olarak  $n$  adet çarpma ve  $n$  adet toplama işlemi ile gerçekleştirilmiş olmaktadır.

Yüksek dereceli polinomların herhangi bir noktadaki değeri aşağıda verilen ve *horner.m* isimli bir dosyaya kaydedilen Program 3.1 yardımıyla gerçekleştirilebilir.

<sup>2</sup>William George Horner (1786 – 1837, İngiliz matematikçi)



$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & -2 & 1 & -4 \\
 & 1 \times 1 & -1 \times 1 & 0 \times 1 & \\
 \hline
 & 1 & -1 & 0 & -4
 \end{array}$$

```

%-----
function sonuc=horner(a,x0);
%x0 skaler
n=length(a);
b=zeros(n,1);
b(1)=a(1);
for k=2:n
    b(k)=a(k)+x0*b(k-1);
end
sonuc=b(n);
%-----

```

Program 3.1: Horner yöntemi(skaler versiyon)

Örneğin  $P_2(x) = x^2 - 2x + 3$  polinomunun  $x_0$  noktasındaki değerini hesaplamak için komut ortamından girilen polinom katsayıları ve  $x_0$  noktası için

```

>> a=[1 -2 3]; x0=1;
>> horner(a,x0)
ans =
2

```

elde ederiz.

Tek bir nokta yerine birden fazla noktada verilen bir polinomun değerinin aynı anda hesaplanması istenirse, bu taktirde Program 3.1 ile verilen klasik *Horner* yöntemi geliştirilerek birden fazla noktada polinom değerini hesaplayan Algoritma geliştirilmelidir. Birden fazla noktada verilen polinomun değerini hesaplayan algoritma 3.2 aşağıda verilmektedir.

Algoritma 3.2'ye ait Program 3.2 aşağıda verilmektedir.

Örneğin  $P_2(x) = x^2 - 2x + 3$  polinomunun  $x_0 = [1 \ 2 \ -1]$  vektöründeki değerlerini Program 3.2 ile verilen *vektörel Horner* yöntemi yardımıyla kolayca hesaplayabiliriz:

```

>> a=[1 -2 3];
>> x0=[1 2 -1;]

```

---

**Algoritma 3.2** Horner yöntemi algoritması(vektörel versiyon)

---

1. Girdi  $a, x$ , burada  $a$  polinom katsayılarını içeren vektör ve  $x$  ise hesaplama noktalarını içeren vektördür
2.  $n$  :  $a$  nin eleman sayısı;  $m \leftarrow x$  in eleman sayısı;
3.  $b$  :  $n \times m$  boyutlu sıfır matrisi
4.  $b_{1,:} = [a(1)a(1)...a(1)]$  m bileşenli vektör
5.  $k = 2, 3, \dots, n$  için

$$b_{k,:} = a_k + x_0 \cdot * b_{k-1,:};$$

6. Çıktı  $b_{n,:}$
- 

```
>> hornerler(a,x0)
ans =
2 3 6
```

### 3.8 İki değişkenli fonksiyonların *Taylor* açılımları

Tek değişkenli fonksiyonlardakine benzer olarak, iki veya daha çok değişkenli fonksiyonların bir nokta komşuluğundaki *Taylor* açılımları elde edilebilir. Örneğin iki değişkenli ve  $(a,b)$  noktası komşuluğunda *Taylor* açılımı mevcut olan bir  $f(x, y)$  fonksiyonunun bu nokta komşuluğundaki *Taylor* açılımı

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b)} + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b)} \\ & + \frac{1}{2!} \left[ (x - a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(a,b)} + 2(x - a)(y - b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(a,b)} + (y - b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(a,b)} \right] \\ & + \dots \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada

$$P(x, y) = f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b)} + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b)}$$

```

%-----
function sonuc=hornerler(a,x0);
%x0 vektör
%P(x)=a(1)x^n+a(2)x^(n-1)+...+a(n)x+a(n+1)
%sonuc=P(x0)

n=length(a);m=length(x0);
b=zeros(n,m);
b(1,:)=a(1)*ones(1,m);
for k=2:n
    b(k,:)=a(k)+x0.*b(k-1,:);
end
sonuc=b(n,:);
%-----

```

Program 3.2: Horner yöntemi(vektörel versiyon)

*Taylor* polinomunun geometrik yeri  $z = f(x, y)$  yüzeyine  $(a, b)$  noktasında çizilen teęet düzlemdir.  $h = x - a$ ,  $k = y - b$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) & : = h \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b)} + k \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b)} \\ \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) & : = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(a,b)} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(a,b)} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(a,b)} \end{aligned}$$

notasyonu ile  $f$  nin  $(a, b)$  noktası komşuluğundaki *Taylor* serisi

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a, b) \quad (3.19)$$

olarak ifade edilir.

**ÖRNEK 3.6.**  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  fonksiyonunun  $(0, 0)$  noktası komşuluğundaki, ilk dört *Taylor* yaklaşım polinomunu bularak fonksiyonla birlikte aynı eksenle grafiklerini çiziniz.

**Çözüm.**

$$\begin{aligned}
f(0, 0) &= 1 \\
f_x(0, 0) &= (-2xe^{-(x^2+y^2)})(0, 0) = 0 \\
f_y(0, 0) &= (-2ye^{-(x^2+y^2)})(0, 0) = 0 \\
f_{xx}(0, 0) &= e^{-(x^2+y^2)}(4x^2 - 2)(0, 0) = -2 \\
f_{yy}(0, 0) &= e^{-(x^2+y^2)}(4y^2 - 2)(0, 0) = -2 \\
f_{xy}(0, 0) &= e^{-(x^2+y^2)}(4xy)(0, 0) = 0
\end{aligned}$$

değerlerini elde ederiz. Benzer biçimde (3.19)'daki diğer gerekli terimleri ve  $(0, 0)$  daki değerlerini hesaplayarak

$$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2) + \frac{1}{2!}(x^2 + y^2)^2 - \frac{1}{3!}(x^2 + y^2)^3 + \dots$$

açılımını elde ederiz. (Bu açılımı yukarıda verilen  $e^{-x^2}$  açılımı ile karşılaştırmamız).

$f(x, y)$  fonksiyonu ve sırasıyla

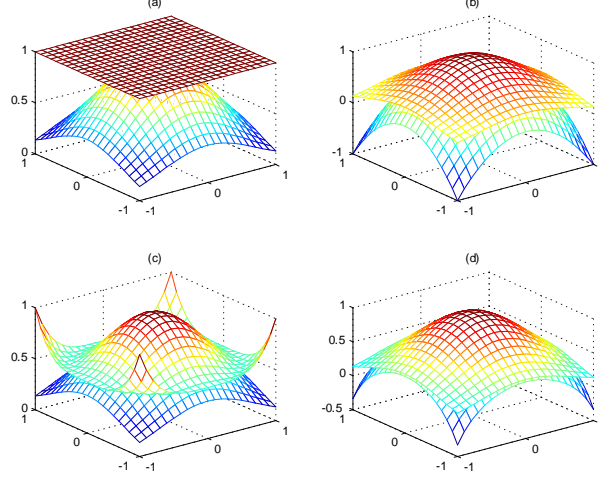
$$\begin{aligned}
P_0(x, y) &= 1, \\
P_2(x, y) &= 1 - (x^2 + y^2), \\
P_4(x, y) &= 1 - (x^2 + y^2) + \frac{1}{2!}(x^2 + y^2)^2 \\
P_6(x, y) &= 1 - (x^2 + y^2) + \frac{1}{2!}(x^2 + y^2)^2 - \frac{1}{3!}(x^2 + y^2)^3 + \dots
\end{aligned}$$

kısmi toplamlarını (iki değişkenli *Taylor* polinomlarının) grafikleri Şekil 3.3'te sunulmaktadır.

Artan  $n$  değerleri için  $P_0(x, y), P_2(x, y), P_4(x, y)$  ve  $P_6(x, y)$  polinomlarının grafiklerinin  $f$  fonksiyonunun grafiğine yaklaştığı grafiksel olarak görülmektedir.

### 3.9 Taylor açılımı ile aritmetik işlemlerde yuvarlama hatası birikim analizi

$x_f$  değeri  $x$  için bir yaklaşım olsun ve  $y = f(x)$  fonksiyonu verilsin.  $x$  yerine  $x_f$  yaklaşımının kullanılması durumunda oluşacak olan  $\Delta y = y_f - y$  mutlak hatası ve  $\varepsilon_b(y)$  bağıl hatasını tahmin etmek istiyoruz.



Şekil 3.3:  $e^{-(x^2+y^2)}$  fonksiyonu ve artan  $n$  değerleri için Taylor polinom yaklaşımları

*Taylor* açılımı yardımıyla  $\Delta y \cong f'(x)\Delta x$  olarak yazarız. Burada  $\cong$  yaklaşımı birinci mertebeden türevelere kadar ilgili terimlerin eşitliğini ifade etmektedir.  $y \neq 0$  için her iki tarafı  $y$  ye bölmek suretiyle

$$\varepsilon_b(y) = \frac{\Delta y}{y} \cong \frac{f'(x)}{f(x)} \Delta x = \frac{f'(x)}{f(x)} x \varepsilon_b(x)$$

elde ederiz. Yukarıdaki son eşitlikte mutlak hata ile bağıl hata arasındaki  $\Delta x = x \varepsilon_b(x)$  bağıntısını kullandık.

**ÖRNEK 3.7.**  $x$  yerine  $x_f$  yaklaşımı alınması durumunda,  $y = f(x) = x^n$  fonksiyonunda oluşan mutlak ve bağıl hataları  $x$  deki mutlak ve bağıl hatalar cinsinden hesaplayınız.

**Çözüm.**

Mutlak hata

$$\Delta y \cong f'(x)\Delta x = nx^{n-1}\Delta x$$

olur. Bağıl hata ise

$$\varepsilon_b(y) \cong \frac{f'(x)}{f(x)} x \varepsilon_b(x) = \frac{nx^{n-1}}{x^n} x \varepsilon_b(x) = n \varepsilon_b(x)$$

olarak elde edilir.

**ÖRNEK 3.8.**  $x$  yerine  $x_f$  yaklaşımı alınması durumunda,  $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$  fonksiyonunda oluşan mutlak ve bağıl hataları  $x$  deki mutlak ve bağıl hatalar cinsinden hesaplayınız.

**Çözüm.**

Mutlak hata

$$\Delta y \cong f'(x)\Delta x = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\Delta x$$

olur. Bağıl hata ise

$$\varepsilon_b(y) \cong \frac{f'(x)}{f(x)}x\varepsilon_b(x) = \frac{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}{x^{1/n}}x\varepsilon_b(x) = \frac{1}{n}\varepsilon_b(x)$$

olarak elde edilir.

Benzer biçimde iki değişkenli bir  $z = f(x, y)$  fonksiyonu için  $x_f, y_f$  değerleri  $x$  ve  $y$  için birer yaklaşım olsunlar. Bu durumda

$$\Delta z \cong \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

ve

$$\varepsilon_b(z) \cong \frac{x}{f(x, y)}\frac{\partial f}{\partial x}\varepsilon_b(x) + \frac{y}{f(x, y)}\frac{\partial f}{\partial y}\varepsilon_b(y)$$

elde ederiz. Yüksek mertebeden kısmi türevlerin özdeş olarak sıfıra eşit olduğu durumlarda yukarıda verilen mutlak ve bağıl hata bağıntılarında  $\cong$  yerine  $\approx$  alınmalıdır.

Buna göre özel olarak toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri için sırasıyla  $z = f(x, y)$  fonksiyonunu

$$f(x, y) = x + y, x - y, x \times y, x/y$$

almak suretiyle

toplama/çıkarma	$z = f(x, y) = x \pm y$
	$\Delta z = \Delta x \pm \Delta y$
	$\varepsilon_b(z) = \frac{1}{x \pm y}(x\varepsilon_b(x) \pm y\varepsilon_b(y), x \pm y \neq 0)$

elde ederiz. Fark için elde edilen yukarıdaki bağıntıdan, birbirine yakın sayıların farkının alınması sonucu oluşan bağıl hatanın  $x_f$  ve  $y_f$  yaklaşımlarında oluşan bağıl hatalardan çok daha büyük olduğunu görmekteyiz. Benzer biçimde çarpma ve bölme için aşağıda verilen mutlak ve bağıl hata ifadelerini elde ederiz:

çarpma	$z = f(x, y) = x \times y$
	$\Delta z = y\Delta x + x\Delta y$
	$\varepsilon_b(z) = \varepsilon_b(x) + \varepsilon_b(y)$

bölme	$z = f(x, y) = x/y$
	$\Delta z \cong \frac{1}{y}\Delta x - \frac{x}{y^2}\Delta y$
	$\varepsilon_b(z) \cong \varepsilon_b(x) - \varepsilon_b(y)$

**ÖRNEK 3.9.** Karesel bir ofisin bir kenarı, maksimum 0.1m hata ile  $x = 3m$  olarak ölçülmüş olsun. Bu değer ile ofis alanının hesaplanmasında oluşacak olan mutlak ve bağıl hata yaklaşık olarak ne kadardır?

**Çözüm.**

$y = f(x) = x^2$  alınırsa

$$\Delta y \cong f'(x)\Delta x = 2x\Delta x = 2 \times 3 \times (0.1) = 0.6$$

elde ederiz.

Bağıl hatayı ise yaklaşık olarak

$$\varepsilon_b(y) = \frac{\Delta y}{y} = 0.6/9 \doteq 0.0667$$

olarak elde ederiz.

**ÖRNEK 3.10.** Dikdörtgensel bir ofisin taban boyutları sırasıyla maksimum 0.1m ve 0.2m hata ile  $x = 3m$  ve  $y = 5m$  olarak ölçülmüş olsun. Bu değerlerle ofis alanının hesaplanmasında oluşacak olan mutlak ve bağıl hata yaklaşık olarak ne kadardır?

**Çözüm.**

$$z = f(x, y) = x \times y$$

alınırsa

$$\Delta z = y\Delta x + x\Delta y = 5 \times (0.1) + 3 \times (0.2) = 1.1$$

elde ederiz.

Bağıl hatayı ise

$$\varepsilon_b(z) = \frac{\Delta z}{z} = 1.1/15 = 0.0733$$

olarak elde ederiz. Elde edilen bu sonucun  $x$  ve  $y$  de oluşan bağıl hataların toplamına, yani

$$\varepsilon_b(x) + \varepsilon_b(y) = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} = 0.1/3 + 0.2/5 = 1.1/15$$

eşit olduğuna dikkat edelim.

**ÖRNEK 3.11.** *Sürtünmesiz ortamda hareket eden bir cismin kütlesinin maksimum 0.1 kg hata ile  $m = 2$  kg ve cisme  $t$  anında etki eden kuvvetin ise maksimum  $0.2 \text{ kg} \times \text{m/s}^2$  hata ile  $F = 5 (\text{kg} \times \text{m/s}^2)$  olarak ölçüldüğünü kabul edelim. Bu değerleri kullanmak suretiyle cismin ivmesinin hesaplanmasında oluşacak olan mutlak ve bağıl hata yaklaşık olarak ne kadardır?*

**Çözüm.**

$\Delta m = 0.1$  ve  $\Delta F = 0.2$  mutlak hataları ve *II. Newton yasası gereği*  $a = F/m = 2.5 (\text{m/s}^2)$  ivmesinde oluşan mutlak hata

$$\Delta a \cong \frac{1}{m} \Delta F - \frac{F}{m^2} \Delta m = \frac{1}{2}(0.2) - \frac{5}{2^2}(0.1) = -0.0250$$

dir. Ayrıca

$$\varepsilon_b(m) = \Delta m/m = 0.1/2 = 0.05$$

ve

$$\varepsilon_b(F) = \Delta F/F = 0.2/5 = 0.04$$

olup,

$$\varepsilon_b(a) \cong \varepsilon_b(F) - \varepsilon_b(m) = 0.04 - 0.05 = -0.01$$

olarak elde edilir. Öte yandan

$$\varepsilon_b(a) = \frac{\Delta a}{a} \cong \frac{-0.0250}{2.5} = -0.01$$

olarak aynı sonuç elde edilir.



**ÖRNEK 3.12.**

$$f(a, b, c) = -b + \sqrt{b^2 - 4ac}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 0.001$  için, mutlak hata değerlerinin en fazla  $\Delta a = 0.1$ ,  $\Delta b = 0.1$ ,  $\Delta c = 0.001$  olduğunu kabul edelim.  $f$  nin  $(a, b, c)$  noktasındaki değerinin hesaplanmasında oluşacak olan mutlak ve bağıl hata yaklaşık olarak ne kadardır?

**Çözüm.**

$$\begin{aligned} \Delta f &\cong \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial f}{\partial c} \Delta c \\ &= \frac{-2c}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \Delta a + \left(-1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right) \Delta b + \frac{-2a}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \Delta c \\ &= (-0.0010) \times 0.1 + (5.0038e - 004) \times 0.1 + (-1.0005) \times 0.001 \\ &= -0.00105046 \end{aligned}$$

elde ederiz. Öte yandan

$$f(a, b, c) = f(1, 2, 0.001) = -0.00100025$$

olup,

$$\varepsilon_b(f) \cong \frac{\Delta f}{f} = \frac{0.00105046}{-0.00100025} = 1.05019745$$

elde ederiz. Bağıl hatanın mutlak hataya kıyasla daha büyük olduğuna dikkat edelim. Bunun nedeni verilen  $a, b$  ve  $c$  değerleri için  $f(a, b, c)$  nin birbirine yakın iki sayının farkını alan bir işlem olmasıdır. Daha önceden de tahmin ettiğimiz gibi birbirine yakın iki sayının farkının hesaplanmasında bağıl hata büyük olmaktadır.

**Alıştırmalar 3.1.**

1. Aşağıda verilen fonksiyonların  $a = 0$  noktasında hesaplanan Taylor açılımlarının doğruluğunu kontrol ediniz.

•

$$\sinh(x) = x + x^3/6 + x^5/120 + x^7/5040 + \dots$$

- $$\cosh(x) = 1 + x^2/2 + x^4/24 + x^6/720 + \dots$$

- $$\tan(x) = x + x^3/3 + 2x^5/15 + 17x^7/315 + \dots$$

- $$\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16 - 5x^4/128 + \dots$$

2. Aşağıda verilen fonksiyonların  $a = 1$  noktasında hesaplanan Taylor açılımlarının doğruluğunu kontrol ediniz.

- $$x^5 = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + \dots$$

- $$\begin{aligned} \sin(x) = & \sin(1) + \cos(1)(x-1) - \sin(1)(x-1)^2/2 \\ & - \cos(1)(x-1)^3/6 + \sin(1)(x-1)^4/24 \\ & + \cos(1)(x-1)^5/120 + \dots \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \sin(5x) = & \sin(5) + 5\cos(5)(x-1) - 25\sin(5)(x-1)^2/2 \\ & - 125\cos(5)(x-1)^3/6 + 625\sin(5)(x-1)^4/24 + \dots \end{aligned}$$

- $$\ln(x) = x - 1 - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 - (x-1)^4/4 + (x-1)^5/5 + \dots$$

3. Terim terime türev veya integral almak suretiyle veya trigonometrik özdeşliklerden faydalanarak aşağıda sol sütunda yer alan fonksiyonların  $a = 0$  noktasındaki Taylor açılımlarını, sağ sütunda yer alan fonksiyonların aynı noktadaki açılımları yardımıyla hesaplayınız ve aynı yakınsaklık yarıçaplarına sahip olduklarını gösteriniz.

- $\sin(x), \cos(x)$
- $\tan^2(x), \tan(x)$
- $\cos^2(x), \cos(2x)$

- $1/(1+x), \ln(1+x), \log(1+x)$
- $\cosh(x), e^x$

4. Sıfır noktası komşuluğunda bilinen açılımlar yardımıyla aşağıdaki açılımların doğruluğunu kontrol ediniz.

- $$x \sin(x) = x^2 - x^4/6 + x^6/120 + \dots$$

- $$\ln(1+x^2) = x^2 - x^4/2 + x^6/3 + \dots$$

- $$\tan(x)/x = 1 + 1/3x^2 + 2/15x^4 + 17/315x^6 + \dots$$

- $$(1+x)/(1-x) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + \dots$$

5. Taylor polinom yaklaşımı için verilen hata formülünü kullanarak aşağıda verilen  $f$  fonksiyonlarına,  $a = 0$  noktasındaki  $P_n$  Taylor polinomları ile  $[-1, 1]$  aralığında yaklaşıldığını kabul edelim.  $\|f - P_n\|_\infty < \epsilon = 0.1$  eşitsizliği sağlanacak biçimdeki en küçük  $n$  tamsayıları sırasıyla ne olmalıdır?

- $\sin(x)$
- $\cos(x)$
- $\exp(-x)$

6. Soru 5 i  $[-2, 2]$  aralığı için tekrarlayınız. Elde ettiğiniz sonucu Soru 5 teki cevabınızla karşılaştırınız. Ne gözlemliyorsunuz?

7.

$$\int_{-1}^1 \sin(x^2) dx \cong 0.6205$$

integralini hesaplamak istediğimizi düşünelim.  $P_n$  polinomu  $a = 0$  noktası komşuluğunda fonksiyonun  $n$ -inci dereceden Taylor polinomu olmak üzere  $n = 0, 1, 2, \dots$  için

$$I_n = \int_{-1}^1 P_n(x) dx$$

integraller dizisini hesaplayalım.  $I_n$  dizisinin yakınsadığı noktayı belirleyiniz. Elde ettiğiniz limit verilen integral için iyi bir yaklaşım mıdır?

8.  $f(x) = \cos(x)$  fonksiyonu için  $a = 0$  noktası komşuluğunda elde edilen  $P_n$  Taylor polinomlarını göz önüne alalım.  $n = 0, 2, 4$  için  $[-\pi, \pi]$  aralığında  $E_n = \|f - P_n\|_\infty$  normlarını hesaplayınız.  $E_n$  değerleri nasıl değişmektedir?
9.  $f(t) = e^{-1/t^2}$ ,  $t \neq 0$ ,  $f(0) = 0$  ile tanımlanan fonksiyonun  $t = 0$  noktasında bütün basamaktan türevlerinin mevcut ve sıfıra eşit olduğunu sıfır noktasındaki türevin tanımını kullanmak suretiyle gösteriniz.  $f$ 'nin sıfır noktasındaki Taylor seri açılımı, sıfır noktasının komşuluğunda  $f$ 'yi temsil eder mi?

10. İntegraller için ortalama değer teoremi yardımıyla

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(t - x_0)^n dt = (x - x_0)^{n+1}/(n+1)! f^{(n+1)}(c_x)$$

sağlanacak biçim de  $x$  ile  $x_0$  arasında  $c_x$  olduğunu gösteriniz.

11.  $P_n(x)$  polinomu  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = a$  noktasındaki  $n$ -inci dereceden Taylor polinomu olsun.

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), k = 0, 1, \dots, n$$

olduğunu gösteriniz.

12. Aşağıda verilen iki değişkenli fonksiyonların  $(0, 0)$  noktasındaki Taylor açılımlarının doğruluğunu kontrol ediniz

•

$$\cos(xy) = 1 - (xy)^2/2 + (xy)^4/24 + \dots$$

•

$$\cos(x + y) = 1 - (x + y)^2/2 + (x + y)^4/24 + \dots$$

•

$$\log(x + y + 1) = x + y - (x + y)^2/2 + (x + y)^3/3 - (x + y)^4/4 + \dots$$

13. Kağıt-kalem ve Horner programı yardımıyla aşağıda verilen polinomların belirtilen noktalardaki değerlerini hesaplayınız

•

$$P(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27, x_0 = -1$$

•

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1, x_0 = 1$$

•

$$P(x) = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32, x_0 = 3$$

•

$$P(x) = x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720, x_0 = 1$$

14. Vektör tabanlı Horner yöntemi yardımıyla aşağıda verilen polinomların ve rilen noktalardaki değerlerini eş zamanlı olarak belirleyiniz.

•

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 8x, x_0 = [1245];$$

•

$$P(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24; x_0 = [1.22.53.4];$$

15. Horner programı ile aynı formatta çalışan Octave **polyval** komutu ile soru 12 ve 13'teki polinom değerlerini hesaplayınız.

16.  $g = 9.8, v_0 = 4, x_0 = 2$  olmak üzere  $y = 1/2gt^2 + v_0t + x_0$  değerinin en fazla  $\Delta t = 0.1$  hatasına sahip  $t = 1$  ölçüm anındaki değerinin hesaplanmasında oluşacak olan mutlak ve bağıl hata yaklaşık olarak ne kadardır?

17.  $a = 2, b = 4$  ve  $c = 1$  değerleri için maksimum mutlak hatalar sırasıyla 0.1, 0.2 ve 0.3 olmak üzere olmak üzere

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

değerlerinin hesaplanmasında oluşacak olan mutlak ve bağıl hata yaklaşık olarak ne kadardır?

### Projeler 3.1.

1. *Maxima veya ticari Maple, Mathematica ve MATLAB sembolik araç kutusu gibi sembolik cebir programları yardımıyla Taylor polinomları hesaplanabilir. Maxima programını bilgisayarınıza kurarak, aşağıdaki komutlar yardımıyla Taylor polinomlarının hesaplandığını ve grafiklerinin çizdirildiğini gözlemleyiniz.*

- `taylor(sin(x), x, 0, 5);`
- `(%o5)/T/ x-x^3/6+x^5/120+...`
- `/* [wxMaxima: input start ] */`
- `wxplot2d([x, x - x^3/6, x - x^3/6 + x^5/120, sin(x)], [x, -4, 4])$`
- `/* [wxMaxima: input end ] */`

2.

$$P_2(a) = f(a), P_2'(a) = f'(a), P_2''(a) = f''(a)$$

özelliğini sağlayan ve  $x$  in kuvvetleri cinsinden yazılan

$$P_2(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$$

polinomunun katsayılarının

$$c_0 = (a^2 f''(a) - 2af'(a) + 2f(a))/2, c_1 = f'(a) - af''(a), c_2 = f''(a)/2$$

olduğunu gösteriniz.  $a = 0$  olması durumunda katsayıların bilinen değerler olduğunu, yani

$$P_2(x) = 1/2f''(0)x^2 + f'(0)x + f(0)$$

olduğunu gözlemleyiniz.

3. *Proje 2 den biraz farklı olarak,  $[a, b]$  aralığında  $f$  fonksiyonuna daha iyi bir yaklaşım olacağı düşünülerek*

$$Q_2(a) = f(a), Q_2'(a) = f'(a), Q_2(b) = f(b)$$

özelliklerini sağlayan

$$Q_2(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$$

polinomunun katsayılarının

$$c_0 = -\frac{ab(b-a)f'(a) - a^2f(b) + (2a-b)bf(a)}{(b-a)^2}$$

$$c_1 = \frac{(b^2 - a^2)f'(a) + 2a(f(a) - f(b))}{(b-a)^2}$$

$$c_2 = -\frac{(b-a)f'(a) - f(b) + f(a)}{(b-a)^2}$$

olduğunu gösteriniz. Özel olarak  $a = 0$  için

$$Q_2(x) = -\frac{(b)f'(0) - f(b) + f(0)}{b^2}x^2 + f'(0)x + f(0)$$

olduğunu gözlemleyiniz.

4.  $f(x) = \sin(x)$  fonksiyonuna  $[0, 1]$  aralığında yaklaşım için kullanılmak üzere Proje 2'deki  $P_2(x)$  ve Proje 3'teki  $Q_2(x)$  polinomlarını belirleyerek her bir polinom için

$$E_1(x) = \sin(x) - P_2(x),$$

$$E_2(x) = \sin(x) - Q_2(x)$$

hatasının grafiğini  $0.1$  aralıklı noktalar için çizdiriniz. Her bir yaklaşım için  $\|E_1(x)\|_\infty$  ve  $\|E_2(x)\|_\infty$  hatalarını tahmin ediniz. Hangi yaklaşım daha iyidir?

5.  $Q_3(x)$  polinomu,  $[0, 1]$  aralığında bir  $f$  fonksiyonuna yaklaşım için oluşturulan ve

$$Q_3(0) = f(0), Q_3'(0) = f'(0), Q_3(1) = f(1), Q_3'(1) = f'(1)$$

özelliklerini sağlayan

$$Q_3(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

polinomunun katsayıları ile  $f$  ve türevinin  $x = 0$  ve  $x = 1$  noktasındaki değerleri cinsinden hesaplayınız.  $Q_3(x)$  polinomunu

$$P_3^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), k = 0, 1, 2, 3$$

özelliklerini sağlayan  $a = 0$  noktası komşuluğundaki 3-üncü dereceden Taylor polinomuna alternatif bir polinom veya iki noktalı Taylor polinom açılımı olarak düşünebiliriz. Proje 4'ü,  $P_3(x)$  ve  $Q_3(x)$  için tekrarlayınız.

6. MATLAB GUI adı verilen arayüzler geliştirmek suretiyle arka planda MATLAB komutlarını çalıştıran etkileşimli programlar hazırlanabilir. Kullanıcı tarafından girilen fonksiyon, açılımın etrafında gerçekleşeceği nokta ve bu noktayı içeren aralık ile istenilen Taylor polinomunun derecesini alarak, Taylor polinomunun ve fonksiyonun grafiğini aynı ekseninde çizdiren bir GUI hazırlayınız. Ayrıca hazırlayacağınız arayüzde Taylor polinomunun yaklaşım davranışını belirleyen

$$\|f - P_n\|_\infty$$

normu da göstermelidir.



# Kaynaklar

- [1] Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1988.
- [2] Boas, M. L., Mathematical Methods in the Physical Sciences, John Wiley & Sons, 1983.
- [3] Coşkun, E. OCTAVE ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:erhancoskun.com.tr).
- [4] Coşkun, E. Maxima ile Sembolik Hesaplama ve Kodlama(URL:erhancoskun.com.tr).
- [5] Davis, J. P. ve Rabinowitz, P., Methods of Numerical Integration, Academic Press, 1983.
- [6] Kincaid, D., Cheney, W., Numerical Analysis, Brooks/Cole, 1991.
- [7] Stoer, J., Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1976.
- [8] S. W., Warren, Zill, D. G., Calculus: Early Transcendentals, Çeviri: Matematik Cilt I, II(Çeviri editörü İsmail Naci Cangül), Nobel Akademik Yayıncılık, 2010.