Bölüm 5

Elemanter Fonksiyonlarla Yaklaşım ve Hata

Bu bölümde öncelikle verilen ayrık veri kümesi için

- standart ve
- ağırlıklı en küçük kareler yöntemi ile en uygun yaklaşım fonksiyonunun nasıl belirleneceğini inceliyoruz. Ayrıca
- bir aralık üzerinde verilen herhangi bir integrallenebilir fonksiyona daha basit fonksiyonlarla uygun yaklaşımların nasıl geliştirilebileceğini inceliyoruz.

Konuyla ilgili detaylar için, bu bölümü hazırlarken faydalandığımız [1],[4],[5] ve [9] temel referans kaynaklarını öneriyoruz.

5.1 Giriş

Herhangi bir araştırma sonucunda belirli bir amaca yönelik olarak elde edilmiş olan ve apsisleri birbirlerinden farklı olan

$$A = \{(x_i, y_i) | i = 0, 1, ..., n\}$$

veri kümesini göz önüne alalım. Önceki bölümde

$$P(x_i) = y_i, i = 0, 1, ..., n$$

özelliğini sağlayan ve derecesi n' den küçük veya n' ye eşit olan interpolasyon polinomunun nasıl elde edildiğini öğrendik. Yine önceki bölümde gözlemlediğiniz üzere, verilerde hata olması durumunda söz konusu hata interpolasyon polinomunun yüksek dereceli terimlerinin katsayılarını etkilemekte ve böylece hatalı verilerle elde edilen interpolasyon polinomu ile gerçekleştirilen interpolasyon işlemi de güvenilirliğini kaybetmektedir. Bu bölümde yüksek dereceli interpolasyon polinomu yerine, verilere uygun yaklaşım fonksiyonunu belirleyerek, bilinmeyen noktadaki değerin tahminini elde edilen yaklaşım fonksiyonu yardımıyla nasıl gerçekleştirebileceğimizi inceleyeceğiz.

5.2 Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yaklaşım

Öncelikle standart En Küçük Kareler Yöntemi olarak bilinen yöntem ile verilen bir veri kümesi için en uygun yaklaşım polinomunu nasıl belirleyebileceğimizi inceleyelim.

Standart En Küçük Kareler Yöntemi ile Yaklaşım

Veri kümemizin

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$$

nokta çiftlerinden oluştuğunu ve bu nokta çiftlerine en yakın

$$P_1(x) = a + bx$$

polinomunu belirlemek istediğimizi kabul edelim. Burada a ve b bilinmeyenlerini, veri kümesinin $P_1(x)$ polinomuna yakınlığının "*uygun bir ölçüsünü*" minimize edecek biçimde belirlemek istiyoruz. Bu durumda en uygun ölçü iki normu yardımıyla

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{m} (P_1(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} (a + bx_i - y_i)^2 \tag{5.1}$$

ile tanımlanmaktadır. Amacımız $E(a,b)$ yi minimum yapan a ve b değerlerini belirlemektir. Söz konusu minimum nokta için gerek(ve bu durum için aynı zamanda yeter, alıştırma) şart

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \frac{\partial E}{\partial b} = 0 \tag{5.2}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Fakat

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial a} &= 2\sum_{i=1}^{m}(a+bx_i-y_i)=0 \\
&\Rightarrow ma+\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)b=\sum_{i=1}^{m}y_i
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial b} &= 2\sum_{i=1}^{m}(a+bx_i-y_i)x_i=0 \\
&\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)a+\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2\right)b=\sum_{i=1}^{m}x_iy_i
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

elde ederiz. (5.3) ve (5.4) sistemini çözerek a ve b değerleri ve dolayısıyla da istenilen $P_1(x)$ polinomunu elde ederiz. (5.1) deki karelerin toplamını minimize etmek(en küçük yapmak) için kullanılan bu yönteme, En Küçük Kareler Yöntemi(EKKY) adı verilir.

(5.3) ve (5.4 sistemi matris-vektör notasyonu yardımıyla da ifade edilebilir: Öncelikle

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1} &= [1,1,\cdots,1]^T, \\
\mathbf{x} &= [x_1,x_2,\cdots,x_m]^T, \\
\mathbf{y} &= [y_1,y_2,\cdots,y_m]^T, \\
\mathbf{u} &= [a,b]^T
\end{aligned}
$$

sütun vektörlerini ve

$$A=[\mathbf{1}\ \mathbf{x}]_{m\times 2}$$

matrisini tanımlayalım. Bu durumda

$$A^TA=\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{bmatrix},\ A^T\mathbf{y}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_iy_i \end{bmatrix}$$

olup, (5.3) ve (5.4) sistemini

$$A^TA\mathbf{u}=A^T\mathbf{y} \tag{5.5}$$

olarak ta ifade edibiliriz.

ÖRNEK 5.1. $(0,0),(1,3/2),(2,1/2),(3,4)$ *noktaları için*

$$P_1(x) = a + bx$$

biçimindeki birinci dereceden en iyi yaklaşım polinomunu En Küçük Kareler Yöntemini kullanarak belirleyiniz.

Çözüm.

Örneğimiz için

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ile

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}, A^T y = \begin{bmatrix} 10 \\ 53/2 \end{bmatrix}$$

olup, bilinmeyen vektörü $u = [a\ b]^T$ olmak üzere, (5.5)'ten

$$\begin{aligned} 5a + 10b &= 10 \\ 10a + 30b &= 53/2 \end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemi çözerek,

$$a = 1/10; b = 17/20$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz

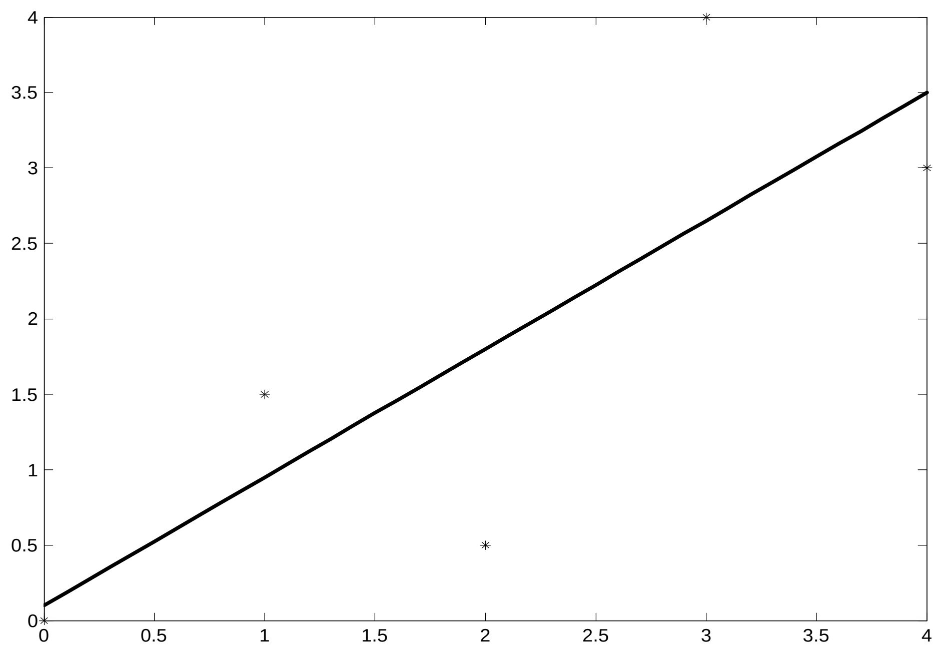
$$P_1(x) = 1/10 + 17/20x$$

doğrusunun $(*)$ ile belirtilen verilere uygun mesafelerden geçerek (5.1) ile verilen $E(a,b)$ hatasını minimize etmeye çalıştığı Şekil 5.1'den görülmektedir.

Ancak veri kümesinin elemanlarının artması durumunda en iyi yaklaşım polinomunun belirlenmesi problemini elektronik ortama taşımak durumundayız.

ÖRNEK 5.2. *Verilen $(x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, m$ noktalarına uygun $P_1(x) = a + bx$ polinomunu belirleyerek, (5.1) hatasını belirledikten sonra*

$$t \in (\min_{1\le i\le m}(x_i), \max_{1\le i\le m}(x_i)), t \ne x_i, i = 1, 2, \cdots, m$$



Şekil 5.1: Örnek 5.1'e ait veri ve EKKY yaklaşım polinom grafiği.

için t noktasındaki değeri $P_1(x)$ yardımıyla tahmin etmek amacıyla

$$[toplam\_hata, tahmin] = ekky(x, y, t)$$

komutu ile çalışan bir En Küçük Kareler Yöntemi uygulaması geliştiriniz. Burada x ve y sırasıyla veri kümesinin (nokta çiftlerinin) apsis ve ordinatlar vektörüdür.

Çözüm.

Probleme ait yöntemimiz En Küçük Kareler Yöntemi olacağından, öncelikle yönteme ait algoritmayı geliştirelim:

Algoritma 5.1.

1. *Girdi(x, y, t)(x ve y satır vektörü ve t skaler)*
2. *$m := x$ vektörünün eleman sayısı*
3. *$x := x^T, y := y^T$ sütun vektörleri*
4. *birler: m bileşenli 1 rakamlarından oluşan sütun vektörü.*

5. *$A := [birler\ x]$ matrisi.*

6. *$B := A^T A$ matrisi ve $c := A^T y$ vektörü*

7. *$Bu = c$ sistemini çözerek $u := [a\ b]^T$ bilinmeyenlerini belirle*

8. *(x, y) ikililerinin eksende yerlerini işaretle*

9. *$p(x) = a + bx$ polinomunun grafiğini aynı eksende çizdir.*

10. *$E(a, b) = ||p(x) - y||_2^2$ hatasını, yani (5.1) ile verilen hatayı hesapla*

11. *$p(t)$ tahmini değerini hesapla*

Yukarıdaki algoritmaya ait Program (5.1) aşağıda verilmektedir.

```
%---------------------------------------------
function [tahmin,hata]=ekky(x,y,t)
% (x,y) nokları ile uyumlu P(x)=a+bx
% polinomunu EKKY ile hesaplar
% polinom ve nokta ciftlerini grafigini cizer
% E(a,b) hatasını ve p(t) yi hesaplar
%----------------------------------------------

x=x';y=y';m=length(x);
birler=ones(m,1);
A=[birler x];
B=A'*A;
c=A'*y;
u=B\c;
p=@(xx) u(1)+u(2)*xx;
xx=x(1):0.1:x(end);
plot(x,y,'*','markersize',10); hold on;
yy=p(xx); plot(xx,yy);
hata=sum((p(x)-y).^2);
tahmin=p(t);
%-----------------------------------------------------
```

Program 5.1: EKKY ile bilinmeyen deger tahmini

ÖRNEK 5.3. *Örnek 5.1 e ait veri kümesine uygun* $p(x) = a+bx$ *polinomunu EKKY ile belirleyerek, veri kümesi ve polinom grafiğini aynı eksende Program 5.1 yardımıyla çizdiriniz.* $t = 3.5$ *için tahmini değer nedir? Belirleyeceğiniz* a *ve* b *değerleri için* $E(a, b)$ *hatası nedir.*

```
>> x=[0 1 2 3 4];
>> y=[0 3/2 1/2 4 3];
>> [tahmin, hata]=ekky(x,y,3.5)
>> tahmin = 3.0750
>> hata = 4.0750
```

Polinom ve veri kümesinin grafiği Şekil 5.1 de verilmektedir.

Eğer

$$P_2(x) = a + bx + cx^2$$

biçiminde olup, veri kümesine en iyi yaklaşan ikinci dereceden polinomu belirlemek istersek yine aynı işlemleri takip ederiz, ancak bu defa çözülmesi gereken lineer

sistem 3×3'lük bir sistem olur. Bu durumda A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmalıdır.

Veri kümesi üstel veya logaritmik bir dağılıma sahip olması durumunda, söz konusu veri kümesine polinomla yaklaşım iyi sonuç vermez. Bir deney sonucunda elde edilen ve değerleri zamanla üstel olarak artan veya azalan pozitif ordinatlı bir veri kümesi için en iyi yaklaşım

$$y = ae^{bx}, a > 0$$

biçiminde olmalıdır. Bu durumda

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{m} (ae^{bx_i} - y_i)^2 \tag{5.6}$$

ifadesini minimize eden a ve b değerlerinin belirlenmesi gerekir. Ancak bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a} &= 2\sum_{i=1}^{m}(ae^{bx_i}-y_i)e^{bx_i}=0,\\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 2\sum_{i=1}^{m}(ae^{bx_i}-y_i)ax_ie^{bx_i}=0\end{aligned}$$

biçimde yazılabilen a ve b bilinmeyenleri için nonlineer bir sistem elde ederiz ki bu sistemin çözümü de Newton yöntemi gibi sayısal bir yöntem gerektirir.

Alternatif bir yöntem takip edebiliriz:

$$y(x_i)=ae^{bx_i}(a>0)$$

değerlerini verilen $y_i>0$ değerlerine yaklaştırmaya çalışmak $\ln(y(x_i))$ değerlerini $\ln(y_i)$ değerlerine yaklaştırmaya denktir: Gerçekten de

$$y(x_i)\rightarrow y_i$$

ise, logaritma fonksiyonunun sürekliliği gereği

$$\ln(y(x_i))\rightarrow\ln(y_i)$$

dir. Tersine

$$\ln(y(x_i))\rightarrow\ln(y_i)$$

ise

$$\ln(y(x_i))-\ln(y_i)\rightarrow 0$$

veya

$$\ln(\frac{y(x_i)}{y_i})\rightarrow 0\Rightarrow\frac{y(x_i)}{y_i}\rightarrow 1,$$

yani $y(x_i)\rightarrow y_i$ dir.

O halde (5.6) ile verilen fonksiyonu minimize etme problemi

$$\begin{aligned}\hat{E}(a,b) &= \sum_{i=1}^{m}(\ln(ae^{bx_i})-\ln(y_i))^2 && (5.7)\\ &= \sum_{i=1}^{m}(\ln(a)+bx_i-\ln(y_i))^2 && (5.8)\end{aligned}$$

fonksiyonunu minimize etme problemine denktir. $\hat{a} = \ln(a)$,ve

$$\hat{y}_i = \ln(y_i), i = 1, 2, ..., m$$

olarak tanımlarsak, problem (5.1)'e benzer olarak

$$\hat{E}(\hat{a}, b) = \sum_{i=1}^{m} (\hat{a} + bx_i - \hat{y}_i)^2 \tag{5.9}$$

ifadesini minimize eden $\hat{a}$ ve b değerlerini belirleme problemine, diğer bir değimle

$$\hat{y} = \hat{a} + bx$$

lineer ifadesini elde etme problemine dönüşür. Yukarıda gerçekleştirilen işleme EKKY için **lineerleştirme işlemi** adı verilmektedir.

ÖRNEK 5.4. $(0, 1/2), (1, 2), (2, 5), (3, 8)$ *noktaları için*

$$y = ae^{bx}$$

biçimindeki en iyi yaklaşımı EKKY ile belirleyiniz.

Çözüm.

(5.3) ve (5.4) sisteminin katsayılarını elde etmek için aşağıdaki tabloyu oluşturalım:

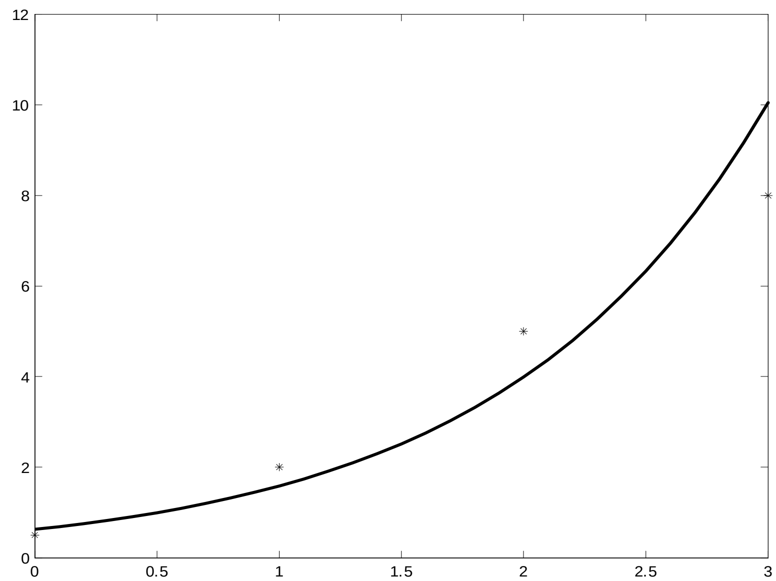
y_i	$\hat{y}_i = \ln(y_i)$
$1/2$	$\ln(1/2) = -\ln 2$
2	$\ln(2)$
5	$\ln(5)$
8	$\ln(8) = 3\ln(2)$

Buna göre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \hat{y} = \begin{bmatrix} -\ln(2) \\ \ln(2) \\ \ln(5) \\ 3\ln(2) \end{bmatrix}$$

için

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, A^T\hat{y} = \begin{bmatrix} 3\ln(2) + \ln(5) \\ 25 \end{bmatrix}$$



Şekil 5.2: Örnek 5.4'e ait veri ve EKKY yaklaşım fonksiyon grafiği.

$$\begin{aligned} 4\hat{a} + 6b &= 3\ln(2) + \ln(5) = 3.688\,9 \\ 6\hat{a} + 14b &= 10\ln(2) + 2\ln(5) = 10.15 \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Bu sistemi çözerek

$$\hat{a} \doteq -0.4628, b \doteq 0.9233$$

elde ederiz. O halde

$$a = e^{\hat{a}} = 0.6295$$

olmak üzere,

$$y = ae^{bx} = 0.6295e^{0.9233x}$$

elde ederiz. Verilen nokta çiftleri ve elde edilen eğrinin grafiği Şekil 5.2 de verilmektedir.

Benzer biçimde (x_i, y_i) nokta çiftleri için

$y = \frac{1}{a+bx}$	biçiminde eğri aranıyorsa	$\hat{y} = \frac{1}{y}$
$y = \frac{1}{\sqrt{a+bx}}$	"	$\hat{y} = \frac{1}{y^2}$

biçiminde dönüşümlerle EKKY problemi lineer probleme dönüştürülür.

Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi ile Yaklaşım

Ağırlıklı En Küçük Kareler yöntemi ile verilen veri kümesi için uygun yaklaşım belirlenirken, verilerin güvenilirliği bilgisi de dikkate alınır. Bu amaçla

$$w = (w_1, w_2, \cdots, w_m), w_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

özelliğini sağlayan w_i çarpanları(veya ağırlıkları) için

$$E(a, b; w) = \sum_{i=1}^{m} w_i(ax_i + b - y_i)^2 \tag{5.10}$$

ile tanımlanan normu minimize eden a ve b sabitleri belirlenir. Sözkonusu minimum nokta için gerek şart

$$\frac{\partial E(a, b; w)}{\partial a} = 0, \frac{\partial E(a, b; w)}{\partial b} = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Fakat

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= 2\sum_{i=1}^{m} w_i(a + bx_i - y_i) = 0 \\ &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} w_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i w_i\right) b = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i \end{aligned} \tag{5.11}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial b} &= 2\sum_{i=1}^{m} w_i(a + bx_i - y_i)x_i = 0 \\ &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} x_i w_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 w_i\right) b = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i w_i \end{aligned} \tag{5.12}$$

elde ederiz. (5.11) ve (5.12) sistemi çözülerek a ve b değerleri ve dolayısıyla da istenilen $P_1(x)$ polinomu elde edilmiş olunur. (5.10) daki karelerin toplamını minimize etmek(en küçük yapmak) için kullanılan bu yönteme, Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi(EKKY) adı verilir.

Öte yandan (5.11) ve (5.12) sistemi matris-vektör notasyonu yardımıyla da ifade edilebilir: Öncelikle

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} &= [1, 1, \cdots, 1]^T, \\
\mathbf{x} &= [x_1, x_2, \cdots, x_m]^T, \\
\mathbf{y} &= [y_1, y_2, \cdots, y_m]^T, \\
\mathbf{u} &= [a, b]^T
\end{aligned}$$

vektörlerini ve

$$\begin{aligned}
A &= [\mathbf{1}\ \mathbf{x}]_{m\times 2} \\
W &= \begin{bmatrix} w_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

matrisini tanımlayalım. Bu durumda

$$A^T W A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m w_i & \sum_{i=1}^m x_i w_i \\ \sum_{i=1}^m x_i w_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 w_i \end{bmatrix}, A^T W \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i w_i \end{bmatrix}$$

olarak elde ederiz. İstenilen $\mathbf{u} = [a, b]^T$ vektörü ise

$$A^T W A\mathbf{u} = A^T W \mathbf{y}$$

sisteminin çözümü olarak elde edilir.

ÖRNEK 5.5. *Sırasıyla $w_1 = 1/8, w_2 = 1/8$ ve $w_3 = 3/4$ ağırlıklara sahip $(0,0), (1,1/2), (2,4)$ noktalar kümesini göz önüne alalım. Bu küme için en uygun $P_1(x) = a + bx$ polinomunu*

- Standart EKKY ve
- Ağırlıklı EKKY ile belirleyiniz

Çözüm.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1/8 & & \\ & 1/8 & \\ & & 3/4 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

olmak üzere Standart EKKY ile,

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, A^T y = \begin{bmatrix} 9/2 \\ 17/2 \end{bmatrix},$$

olmak üzere
$A^T A\mathbf{u} = A^T\mathbf{y}$ veya açıkça

$$\begin{aligned} 3a + 3b &= 9/2 \\ 3a + 5b &= 17/2 \end{aligned}$$

sistemini çözerek $a = -1/2, b = 2$ elde ederiz.
Ağırlıklı EKKY ile

$$A^T W A = \begin{bmatrix} 1 & 13/8 \\ 13/8 & 25/8 \end{bmatrix}, A^T W y = \begin{bmatrix} 49/16 \\ 97/16 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A^T W A\mathbf{u} = A^T W\mathbf{y}$$

sitemini çözerek, $a = -18/31, b = 139/62$ elde ederiz.Veki kümesi ile standart EKKY ve Ağırlıklı EKKY yaklaşım polinom grafikleri Şekil 5.3 de verilmektedir.

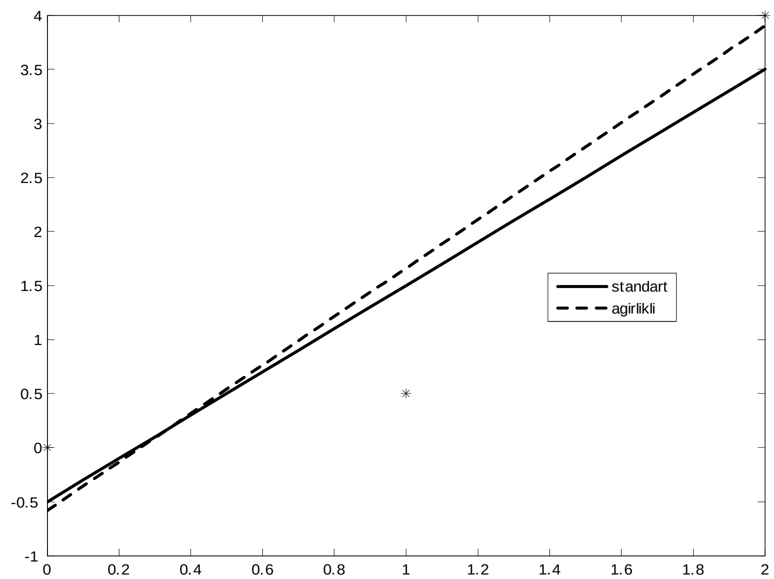
Ağırlıklı EKKY ile $w_3 = 3/4$ ağırlığına sahip noktaya daha yakınız!

5.3 İntegrallenebilir fonksiyona elemanter fonksiyonlarla yaklaşım

Önceki bölümümde incelenen ayrık veri kümesi yerine, bazen bir $[c, d]$ aralığı üzerinde integrallenebilir bir f fonksiyonuna yüksek dereceli bir interpolasyon polinomu yerine daha basit fonksiyon veya polinomlar yardımıyla yaklaşım elde edilmek istenebilir. Verilen fonksiyona

$$P_1(x) = a + bx$$

gibi *en küçük kareler yaklaşım polinomunu* belirlemek için bu defa (5.1) deki toplam yerine integral sembolü yardımıyla polinom ve fonksiyon arasındaki



Şekil 5.3: Örnek 5.5'e ait veri ve Standart(-), Ağırlıklı(- -) EKKY yaklaşım polinom grafikleri.

farkın bir ölçüsü olan(L_2 normunun karesi)

$$\begin{aligned} E(a,b) &= \int_c^d (P_1(x) - f(x))^2 dx \\ &= \int_c^d (a + bx - f(x))^2 dx \end{aligned}$$

ifadesini minimum yapan a ve b değerlerini buluruz. Bu amaçla yine

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

sağlanmalıdır. Yani

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= 2\int_c^d (a + bx - f(x))dx = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 2\int_c^d (a + bx - f(x))xdx = 0 \end{aligned}$$

veya daha açık olarak ifade edilen

$$\begin{aligned}\left(\int_c^d dx\right)a+\left(\int_c^d xdx\right)b &= \int_c^d f(x)dx\\ \left(\int_c^d xdx\right)a+\left(\int_c^d x^2dx\right)b &= \int_c^d xf(x)dx \qquad (5.13)\end{aligned}$$

lineer denklem sistemini sağlayan a ve b değerleri verilen f fonksiyonuna $P_1(x)$ ile gösterilen en iyi yaklaşım polinomunu verir.

ÖRNEK 5.6. $f(x)=\sin(x)$ *fonksiyonuna* $[0,\pi/2]$ *aralığında*

$$P_1(x)=a+bx$$

biçimindeki en küçük kareler yaklaşım polinomunu belirleyiniz.

Çözüm.

$$E(a,b)=\int_0^{\pi/2}(a+bx-\sin(x))^2dx$$

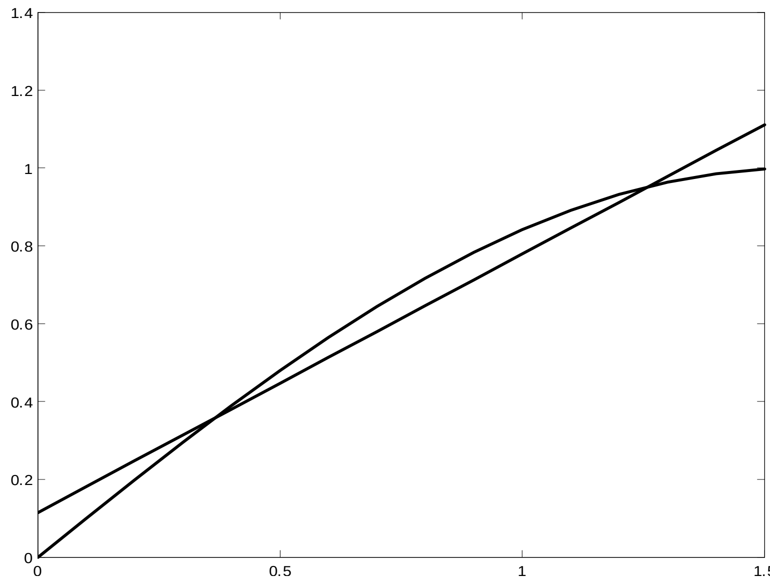
ifadesini minimize eden a ve b değerleri (5.13) den

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{\pi/2} dx\right)a+\left(\int_0^{\pi/2} xdx\right)b &= \int_0^{\pi/2}\sin(x)dx\\ \int_0^{\pi/2}(xdx)\,a+\left(\int_0^{\pi/2} x^2dx\right)b &= \int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin(x)dx=1\text{ve}\int_0^{\pi/2}x\sin(x)dx=-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(-\cos x)\ dx=1$$

integral değerleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}a+\frac{\pi^2}{8}b &= 1\\ \frac{1}{8}\pi^2a+\frac{1}{24}\pi^3b &= 1\end{aligned}$$



Şekil 5.4: Örnek 5.6'ya ait fonksiyon ve EKKY yaklaşım grafiği.

elde ettiğimiz lineer denklem sisteminden

$$a = \frac{1}{\pi^2}(8\pi - 24) = 0.114\,77$$

ve

$$b = -\frac{1}{\pi^3}(24\pi - 96) = 0.664\,44$$

elde ederiz. O halde aradığımız en iyi yaklaşım polinomu

$$P_1(x) = 0.114\,77 + 0.664\,44x$$

dir.

$\sin(x)$ fonksiyonu ve en küçük kareler anlamındaki en iyi

$$P_1(x) = 0.114\,77 + 0.664\,44x$$

yaklaşım polinomunun grafiği Şekil 5.4 te verilmektedir.

Alıştırmalar 5.1.

1. $(0,1), (1,3), (2,1), (3,6)$ *veri kümesi için EKKY ile aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım polinomlarını belirleyiniz.*

(a) $P_0(x) = a$

(b) $P_1(x) = a + bx$

(c) $P_2(x) = a + bx + cx^2$

(d) $P_3(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

2. *Soru 1 için verilen nokta kümesi ile elde ettiğiniz polinom grafiklerini aynı eksende gösteriniz.*

3. *Soru 1 için elde ettiğiniz her bir yaklaşım için (5.1) ile verilen hatayı hesaplayınız. Hata hangi yaklaşım için daha küçüktür?*

4. *Soru 1'i sırasıyla* $w_1 = 1/16, w_2 = 1/16, w_3 = 1/8, w_4 = 3/4$ *ağırlıkları ile ve Ağırlıklı EKKY ile tekrar ediniz.*

5. *Soru 1'de verilen nokta kümesi ve soru 4 te elde ettiğiniz polinom grafiklerini aynı eksende gösteriniz.*

6. *Soru 2 ve soru 5'te elde ettiğiniz grafikleri inceleyerek,* $w_i, i = 1, 2, 3, 4$ *ağırlıklarının, yaklaşım polinomları üzerindeki etkisini inceleyiniz.*

7. *Grafiği Soru 1'de verilen noktalardan geçen üçüncü dereceden* $Q_3(x)$ *interpolasyon polinomunu belirleyiniz.* $Q_3(x)$ *ile Soru 1(d)'de elde ettiğiniz* $P_3(x)$ *yaklaşım polinomunu karşılaştırınız. Ne gözlemliyorsunuz?*

8. $(0, 1), (1, 2), (2, 2.5), (3, 2.8)$ *veri kümesi için EKKY e göre en iyi*

$$f(x) = \sqrt{a + bx}$$

yaklaşım fonksiyonunu belirleyiniz ve oluşan $E(a, b)$ *hatasını hesaplayınız. Fonksiyon ve veri kümesinin grafiğini aynı eksende çizdiriniz.*

9. *Soru 8'de verilen veri kümesi için en iyi*

$$g(x) = \ln(a + bx)$$

fonksiyonunu ve oluşan $E(a, b)$ *hatasını hesaplayınız. Elde ettiğiniz hatayı soru 8 deki değer ile karşılaştırınız. Belirtilen veri kümesi için* f *ve* g *fonksiyonlarından hangisi daha uygundur?*

10. $(0,1/2),(2,3),(3,8)$ *veri kümesi için EKKY e göre en iyi*

$$f(x)=ae^{bx}$$

yaklaşım fonksiyonunu belirleyiniz.

11. $f(x)=\cos(x)$ *fonksiyonu için* $[-1,1]$ *aralığında EKKY' göre aşağıdaki biçimde belirtilen en iyi yaklaşım fonksiyonlarını ve oluşan*

$$E=\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))^2dx$$

hatalarını belirleyiniz.

(a) $g(x)=a$
(b) $g(x)=a+bx$
(c) $g(x)=a+bx+cx^2$

12. *Soru 11'de elde verilen* f *için* $x=0$ *noktasında sırasıyla sıfırıncı ve ikinci dereceden Taylor yaklaşımları sonucunda oluşan*

(a) $E=\int_{-1}^{1}(\cos(x)-1)^2dx,$
(b) $E=\int_{-1}^{1}(\cos(x)-(1-x^2/2))^2dx$
hatalarını elde ediniz. (a) ve (b) de elde ettiğiniz sonuçları sırasıyla, soru 11(a) ve soru 11(c) ile karşılaştırınız. Taylor mu yoksa EKKY yaklaşımı mı daha küçük hata üretmektedir?

13. *Soru 11 ve 12'deki işlemleri Maxima ortamında da gerçekleştiriniz.*

14. (x,y) *veri kümesi için en iyi* $n-$*inci dereceden polinomu hesaplayarak katsayılarını geri gönderen ve*

$$katsayi=ekkypol(x,y,n)$$

yazılımı ile çalışan bir MATLAB/Octave programı hazırlayınız. n *sayısının veri kümesindeki nokta sayısından büyük olmamasına dikkat ediniz. Hazırladığınız program* (x,y) *nokta çiftlerinin ve elde edilen polinomun grafiğini de aynı eksende çizmelidir.*

15. (x, y) *veri kümesi için en iyi*

$$y = ae^{bx}$$

fonksiyonunu hesaplayarak a *ve* b *değerlerini geri gönderen ve*

$$[a, b] = ekkyustel(x, y)$$

yazılımı ile çalışan bir MATLAB/Octave programı hazırlayınız. Hazırladığınız program (x, y) *nokta çiftlerini ve elde edilen*

$$y = ae^{bx}$$

fonksiyonunun grafiğini aynı eksende göstermelidir.

16. *(5.1) ifadesinin minimumu için gerek şart olarak verilen (5.2) denklem sisteminin aynı zamanda yeter şart olduğunu gösteriniz. Bunun için (5.2) sisteminin sağlayan* a *ve* b *değerleri için*

$$Hessian(E(a, b)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 E}{\partial b^2} \end{bmatrix}$$

matrisinin pozitif definit olduğunu, yani

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} > 0, \det(Hessian(E(a, b)) > 0$$

olduğunu gösteriniz.

Kaynaklar

[1] Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1988.

[2] Coşkun, E. OCTAVE ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:aves.ktu.edu.tr/erhan/dokumanlar).

[3] Coşkun, E. Maxima ile Sembolik Hesaplama ve Kodlama(URL:aves.ktu.edu.tr/erhan/dokumanlar).

[4] Kincaid, D., Cheney, W., Numerical Analysis, Brooks/Cole, 1991.

[5] Mathews, J., Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering, Prentice-Hall, 1997.

[6] MATLAB, Mathworks(*URL:mathworks.com).*

[7] Maxima, GNU özgür yazılım(*URL:maxima.sourceforge.net*).

[8] OCTAVE, GNU özgür yazılım(*URL:OCTAVE.sourceforge.net*).

[9] Stoer, J., Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1976.

[10] S. W., Warren, Zill, D. G., Calculus: Early Transcendentals, Çeviri: Matematik Cilt I, II(Çeviri editörü İsmail Naci Cangül), Nobel Akademik Yayıncılık, 2010.