Bölüm 7

Lineer Cebirsel Denklem Sistemleri

Sayısal analiz gerektiren problemler arasında yer alan diğer önemli bir problem, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ biçiminde ifade edilebilen lineer cebirsel sistemlerdir, burada $A_{m\times n}$ matris, $\mathbf{x}_{n\times 1}$ ve $\mathbf{b}_{m\times 1}$ vektördür. Bu bölümde matris ve vektör çarpımı ile başlayarak,

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini lineer cebirsel ve geometrik olarak inceliyoruz,
- çözümünün varlık ve tekliği ile birden fazla çözümün mevcut olması durumunda genel çözümün nasıl ifade edilebileceğini inceliyoruz,
- çözümü sonlu sayıda aritmetik işlem ile elde eden ve **doğrudan**(direkt) *yöntemler* olarak bilinen
  - Gauss yok etme,
  - LU ve
  - QR ayrışım yöntemlerini inceliyoruz.
- Çözümün mevcut olmaması durumunda en yakın çözümün En Küçük Kareler veya buna denk olarak QR ayrışımı yardımıyla nasıl bulunabileceğini inceliyoruz. Ayrıca
- herhangi bir başlangıç değer ile önceden bilinmeyen sayıda yinelemeli işlem sonucunda yaklaşık çözümü elde eden ve *yinelemeli(iteratif) yöntemler* olarak bilinen yöntemlerden

- *Gauss-Jacobi* ve
- *Gauss-Seidel* yöntemlerini inceliyoruz.

Bu döküman "MATLAB/Octave Uygulamalarıyla Sayısal Analize Giriş" isimli çalışmamızın yedinci bölümünü oluşturmaktadır. İleri düzey araştırma için konuyla ilgili olarak zaman zaman kullandığımız ve bölüm sonunda sunduğumuz değerli kaynakları öneririz.

Öncelikle sıkça kullanacağımız matris ve vektör çapımını yakından inceleyelim:

7.1 Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

A matrisi ile $\mathbf{x}$ vektörünün çarpımı, A matrisinin sütunlarının $\mathbf{x}$ vektörünün bileşenleri ile oluşturulan lineer bileşimi(kombinasyonu) dir.

Örneğin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

matrisi ve $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektörü için

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir.

Hatırlatma 7.1. *$A_{m\times n}$ matrisinin sütun uzayı, A nın sütunlarının lineer bileşimi ile oluşturulan vektör uzayıdır ve bu uzay R^m in bir alt uzayıdır. O halde $A\mathbf{x}$ vektörü A matrisinin sütun uzayının bir elemanıdır.*

Ayrıca, A matrisi ve $\mathbf{x}$ sütun vektörünün çarpımı sonucunda oluşan $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ vektörünün her bir bileşeni, A nın her bir satır vektörü ile $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ sütun vektörünün skaler çapımı olduğuna dikkat edelim. $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ vektörünün $i - inci$ bileşeni

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(i) &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} A(i,j) * \mathbf{x}(j), i = 1, 2, ..., m \end{aligned}$$

olarak ifade edilir ve aşağıdaki yığmalı toplam ile hesaplanabilir:

```
for i=1:m
   top=0;
    for j=1:n
        top=top+A(i,j)*X(j);
   end
  Y(i)=top;
end
```

Yukarıda tanımlanan **skaler cebirsel** yığmalı toplam, MATLAB/Octave ortamında **vektör cebiri** yardımıyla daha pratik bir biçimde hesaplanabilir. Burada *skaler cebirsel işlem* ile skalerler üzerindeki aritmetik işlemleri, *vektör cebirsel işlem* ile de vektörler üzerindeki cebirsel işlemleri kastediyoruz.

$A(i,:)$ ile A matrisinin $i-inci$ satır vektörünü gösterelim. $\mathbf{x}$ bir sütun vektörü olmak üzere, $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ çarpım vektörünün her bir bileşeni vektörel iç çarpım ile

$$\mathbf{y}(i) = A(i,:) * \mathbf{x},\ i = 1, 2, ..., m$$

olarak elde edilir ve bu işlem MATLAB/Octave ortamında vektör cebirsel işlemler yardımıyla aşağıdaki gibi gerçekleştirilebilir:

```
for i=1:m
    Y(i)=A(i,:)*x;
end
```

Gözlem 7.1. *Vektör cebiri yardımıyla, skaler cebirsel işlemde gerekli olan iç içe for döngüsü yerine, aynı işlemin tek bir döngü ile gerçekleştirilebildiğine dikkat edelim.*

Alternatif olarak, matris-vektör çarpımı MATLAB/Octave ortamında

$$\mathbf{y} = A * \mathbf{x}$$

olarak tanımlanır ve çapım vektörünün $i-$inci eleman ise $\mathbf{y}(i)$ dir.

7.2 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin sütunlarına bakıldığında lineer cebiri, satırlarına bakıldığında ise geometriyi görürüz. Bu tesbit Gilber Strang'a[11] aittir.

Öncelikle denklem sistemini lineer cebirsel açıdan inceleyelim:

Eğer bir $\mathbf{b}$ vektörü A matrisinin sütun uzayında ise, bu taktirde $\mathbf{b}$ vektörü, A matrisinin sütunlarının lineer bileşimi olarak yazılabilir, yani $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eşitliği sağlanacak biçimde $\mathbf{x}$ vektörü mevcuttur, diğer bir değimle, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi çözüme sahiptir. Öte yandan, eğer $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi bir çözüme sahipse, $\mathbf{b}$ vektörü A matrisinin sütun uzayındadır: O halde

- *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümünün var olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{b}$ vektörünün A matrisinin sütun uzayında yer almasıdır.*

ÖRNEK 7.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin sütunları lineer bağımsızdır(Vektörlerden birisi diğerinin sıfırdan farklı bir sabit katı değildir). O halde A nın sütun vektörleri R^2 nin bir tabanını oluşturur. Dolayısıyla herhangi $\mathbf{b} \in R^2$, A nın sütunlarının lineer bileşimi, yani $A\mathbf{x}$ biçimde ifade edilebilir:Sonuç olarak herhangi $\mathbf{b} \in R^2$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi çözüme sahiptir.

Önerme 7.1. *Eğer $\mathbf{b}$ vektörü A matrisinin sütun uzayında yer almakta ve A nın sütunları lineer bağımsız ise bu taktirde $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi tek bir çözüme sahiptir.*

İspat $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ olmak üzere $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ olduğunu kabul edelim, diğer bir deyimle $\mathbf{y}$ de bir diğer çözüm olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A\mathbf{y} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

denklem sistemlerinin taraf tarafa farkını alarak

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$$

olmak üzere

$$A\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

elde ederiz ki bu sonuç A matrisinin sütunlarının lineer bağımsız olmasıyla çelişir. O halde birden fazla çözüm kabulümüz yanlıştır.

Sonuç 7.1. *Eğer* $\mathbf{b}$ *vektörü* A *matrisinin sütun uzayında ve* A *nın sütunları lineer bağımlı ise* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *denklem sistemi sonsuz sayıda çözüme sahiptir.*

İspat $\mathbf{b}$ vektörü A nın sütun uzayında olduğundan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklemini sağlayan en az bir $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ö}$ *özel çözümü* mevcuttur. Öte yandan A nın sütunları lineer bağımlı olduğundan, A matrisinin sıfır uzayı boştan farklıdır. $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$,$(k \geq 1)$ kümesi A matrisinin sıfır uzayının bir tabanı olsun. Bu taktirde

$$\mathbf{x}_h = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + ... + c_k\mathbf{x}_k, c_i \in R$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homojen sisteminin genel çözümüdür ve homojen olmayan sistemin çözümü $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_{ö}$ biçimindedir. Buradan sonsuz sayıda çözüm olduğu açıktır.

ÖRNEK 7.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

için $A\mathbf{x} = b$ *denklem sisteminin çözümünü irdeleyiniz.*

Çözüm.

Açıkça A matrisinin sütunları lineer bağımlıdır. A nın sütun uzayı ikinci bileşeni birincisinin 2 katı olan noktalar kümesidir: Yani düzlemde $y = 2x$ bağıntısı ile tanımlanan doğru üzerindeki noktalardan oluşur. b de A nın sütun uzayında yani $y = 2x$ doğrusu üzerinde yer alır. O halde $\mathbf{x} = [x, y]^T$için $A\mathbf{x} = b$ denklem sistemi çözüme sahiptir. Standart yok etme işlemi ile

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

dan $x + 2y = 3$ veya $y = (x - 3)/2$ elde ederiz. Bu durumda sonsuz sayıda noktadan oluşan çözüm kümesi

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ (x-3)/2 \end{bmatrix} \\ &= x \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \end{bmatrix}, x \in R \\ &= \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_{ö} \end{aligned}$$

biçiminde iki bileşenden oluşmaktadır. Burada

$$\mathbf{x}_h = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, c \in R$$

$A\mathbf{x} = 0$ homojen sisteminin *genel çözümü*, yani A nın sıfır uzayındaki noktalar kümesi ve

$$\mathbf{x}_{ö} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

ise $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nin $c = 0$ skalerine karşılık gelen bir *özel çözümüdür.*

ÖRNEK 7.3.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ile verilen A matrisi ve herhangi $\mathbf{b} \in R^3$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümünü irdeleyiniz.

Çözüm.

A matrisinin sütunları lineer bağımsızdır ($A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ dır). Dolayısıyla A nın sütunları R^3 için bir tabandır. R^3 de alınan herhangi bir $\mathbf{b}$ vektörü, bu taban elemanlarının lineer bileşimi olarak yazılabilir. O halde her $\mathbf{b} \in R^3$ için

$$\begin{bmatrix} 3x + 2y + z \\ x - y + 2z \\ 2x + y + 4z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

sistemi çözüme sahiptir.

ÖRNEK 7.4. *Sütunları lineer bağımlı olan*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

matrisi ve herhangi $\mathbf{b} = [\mathbf{1}\ 1\ 1]^T$ ve $\mathbf{b} = [2\ 1\ 1]^T$ için $A\mathbf{x} = b$ denklem sisteminin çözümünü irdeleyiniz.

Çözüm.

- $\mathbf{b} = [1\ 1\ 1]^T$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümü yoktur. Çünkü bu $\mathbf{b}$ vektörü A matrisinin sütun uzayında yer almamaktadır. A matrisinin satırları arasında

$$satır\_1 + 3 \times satır\_2 = 5 \times satır\_3 \tag{7.3}$$

bağıntısının olduğuna dikkat edelim. O halde herhangi $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]^T$ vektörü için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümün var olması ancak ve ancak

$$b_1 + 3 \times b_2 = 5 \times b_3 \tag{7.4}$$

bağıntısının sağlamasıyla mümkündür. Oysa $\mathbf{b} = [1\ 1\ 1]^T$ vektörü bu özelliği sağlamamaktadır.

- Öte yandan $\mathbf{b} = [2\ 1\ 1]^T$ vektörü (7.4) özelliğini sağlar. Dolayısıyla bu $\mathbf{b}$ vektörü için çözüm mevcuttur. Ancak (7.2) ile tanımlanan A matrisinin sütunları lineer bağımlı olduğu için sonsuz sayıda çözüm vardır. Bu durumda sistemin çözümü

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_ö$$

olacak biçimde iki bileşenden oluşur. Burada $\mathbf{x}_h$, $A\mathbf{x} = 0$ homojen sistemin keyfi parametre veya parametreler içeren genel çözümü ve $\mathbf{x}_ö$ ise homojen olmayan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistemin bir özel çözümüdür. Örneğimiz için

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_ö = c \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, c \in R$$

dir.

Özetle,

> $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi verilmiş olsun.
>
> - *Eğer* $\mathbf{b}$ *vektörü, A matrisinin sütun uzayında ise çözüm mevcuttur, aksi halde çözüm mevcut değildir.*
> - *Eğer* $\mathbf{b}$ *vektörü A matrisinin sütun uzayında ve A nın sütunları lineer bağımsız ise bir tek çözüm, lineer bağımlı ise sonsuz sayıda çözüm mevcuttur.*
> - *Sonsuz sayıdaki çözümler ise*
>
> $$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_ö$$
>
> *biçiminde* $\mathbf{x}_h$ *ile gösterilen homojen kısmın genel çözümü ve* $\mathbf{x}_ö$ *ile gösterilen homojen olmayan sitemin özel çözümünün toplamı olarak ifade edilir.*

Şimdi de denklem sistemini geometrik açıdan inceleyelim:

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin her bir denklemine(satırına) bakıldığında ne gözlemleriz?

- $n = 1, m = 1$ için sistem $ax = b$ denklemine indirgenir. Bu durumda $a \neq 0$ için tek bir çözüm($x = b/a$) elde edilir.$a = 0$ olması durumda ise çözüm yalnız ve yalnız $b = 0$ olması durumunda mümkündür ve bu durumda sonsuz sayıda çözüm mevcuttur(her reel sayı bir çözümdür).
- $n = 2, m = 2$ için

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Her bir denklemin R^2 de bir doğru belirlediğini biliyoruz. O halde sistem her iki doğru üzerinde bulunan noktaların geometrik yerini araştırmaktadır. Söz konusu doğrular farklı veya aynı eğimlere sahip olabilirler. Eğer farklı eğimlere sahip olurlarsa, tek bir noktada kesişirler(tek bir çözüm). Aynı eğime sahip olmaları durumunda ise çakışık doğrular olabilirler(sonsuz çözüm) veya hiç kesişmeyebilirler(çözüm yok).

- $n \geq 3$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin her bir satırı $n = 3$ için bir düzlem ve$n > 3$ için *hiperdüzlem* belirler. Bu durumda problem, m adet hiperdüzlemin arakesit noktasının geometrik yerini araştırmaktadır. Tek bir noktada kesişmeleri durumunda, kesişim noktası sistemin tek bir çözümüdür. Denklemlerden bazıları diğerlerinin lineer bileşimi olabilir, buna göre sistem değişik sayıda parametreli sonsuz çözüme sahip olabilir veya hiçbir ortak noktada kesişmeyebilirler ki bu durumda sistem herhangi bir çözüme sahip değildir.

7.3 Neden Ax=b?

Farklı alanlardaki bir çok problem, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ biçiminde ifade edilebilen lineer cebirsel bir sistemin çözümünü gerektirir:

1. En basit durumda $n = 1, m = 1$ için $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - xb = \frac{1}{2}xax - xb$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer $a > 0$ ($a < 0$)ise f fonksiyonu minimumuna(maksimumuna), $ax = b$ denkleminin çözümünde ulaşır.

   $n = 2, m = 2$ için

   $$f(x,y) = \frac{1}{2}[x\ y]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - [x\ y]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

   fonksiyonu ekstremum noktasına

   $$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 0 \\ f_y(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

   veya

   $$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

   olarak ifade edilebilen denklem sistemininin çözümünde ulaşır.

Simetrik bir A matrisi için sonlu bilinmeyenli bir çok fiziksel sistemin(yapı elemanları, yaylar, kütleler vb) toplam enerjisini ifade eden

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{b}$$

fonksiyonu, ekstremum noktasına(denge noktasına)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

denklem sisteminin çözümünde ulaşır. Eğer A pozitif definit ise çözüm noktası minimum, negatif definit ise maksimum ve indefinit ise eyer noktasıdır[11].

2. Sadece doğa olaylarında değil, ekonomide de denge bir lineer denklem sisteminin çözümünü gerektirir. Örneğin ulusal ekonomi modelinde D vektörü ile dış ülkelerden gelen ithalat talebini gösterelim. Bu talebi karşılamak üzere ülkenin her bir ekonomi sektöründe üretilmesi gereken miktarı ise $\mathbf{x}$ ile gösterim. Bu üretim sürecinde ülkenin iç tüketimi $A\mathbf{x}$ e eşittir ve dış talebi karşılamak için üretilmesi gereken miktar

$$\mathbf{x} - A\mathbf{x} = D$$

veya

$$(I - A)\mathbf{x} = D$$

biçiminde bir lineer sistemin çözümü olarak elde edilir. Bu model Leontief[1] input-output modeli olarak bilinir[4].

3. Diferensiyel denklemler ile oluşturulan sınır-değer problemleri, sonlu elemanlar veya sonlu farklar yöntemleri yardımıyla elde edilen yaklaşımlar sonunda lineer cebirsel sistemlerin çözümünü gerektirirler[**?**].

4. Verilen veri kümesine uygun eğrinin belirlenmesi problemi lineer denklem sistemi çözümünü gerektirir(Bölüm 5).

5. Nonlineer cebirsel sistemler için geliştirilen bir çok yöntem(örneğin Newton yöntemi ve varyasyonları) her adımda lineer cebirsel sistemlerin çözümünü gerektirir(Bölüm 6).

Yukarıdaki örnekleri çoğaltmak mümkündür, şimdi söz konusu sistemin nasıl çözüleceği problemine geri dönelim.

[1] Wasilly Leontief, Rus iktisatçı.

7.4 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ için doğrudan çözüm yöntemleri

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin çözümü için esas itibariyle iki çözüm sınıfı mevcuttur. Bu yöntemler *doğrudan(direkt)* ve *yinelemeli(iteratif)* çözüm yöntemleri olarak adlandırılırlar. Ayrıca *yarı yinelemeli(semi-iterative)*[10] olarak adlandırılan ve bazı özel matrisler için daha etkin çözüm üreten yöntemler *Gradyan yöntemleri* gibi yöntemler de mevcuttur, ancak söz konusu yöntemlere bu çalışmanın kapsamını sınırlı tutmak amacıyla yer veremiyoruz..

Doğrudan çözüm yöntemleri sonlu sayıda işlem yardımıyla çözümü belirli bir yuvarlama hatası ile elde eden yöntemlerdir. İlerleyen bölümlerde inceleyeceğimiz Gauss yok etme yöntemi, LU ayrışım yöntemi ve QR ayrışım yöntemi doğrudan çözüm yöntemlerinden sıkça kullanılanlarıdırlar.

Doğrudan çözüm yöntemleri A katsayı matrisinin çok fazla sayıda sıfırdan farklı elemanı olması veya diğer bir deyimle "yoğun(dense)" matris olması durumunda ve boyutunun ise "küçük" olması durumda tercih edilirler.

Yinelemeli yöntemler ise verilen denklem siteminin çözümünü, çok değişkenli ve lineer bir fonksiyon olan

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$$

fonksiyonunun sıfıryerini belirleme problemini olarak gözönüne alırlar. Bu biçimde tanımlanan f nin sıfıryerini belirleme problemini ise uygun biçimde seçilen ve *yineleme fonksiyonu* adı verilen fonksiyonun *sabit noktasını* belirleme problemine dönüştürürler. Bu amaçla yinelemeli yöntemler uygun $\mathbf{x}^{(0)} \in R^n$ başlangıç noktası ve g ile gösterilen yineleme fonksiyonu yardımıyla

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = g(\mathbf{x}^{(k)}), k = 0, 1, \cdots$$

ile elde edilen ve yakınsaması ümit edilen dizinin limit noktasını belirlemeyi veya limit noktasına yeterince yaklaşmayı amaçlarlar.

Yinelemeli yöntemler genelde büyük boyutlu ve yoğun olmayan(sparse) katsayı matrisine sahip sistemler için tercih edilirler.

A matrisinin pozitif definit olması durumunda ise *Eşlenik Gradyan yöntemi*[10] gibi *yarı-yinelemeli yöntem* olarak adlandırılan ve bu çalışma kapsamında yer almayan yöntemler mevcuttur. Öte yandan daha özel A matrisleri için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümünü elde etmek amacıyla geliştirilmiş yöntemler de mevcuttur. Örneğin A matrisinin üç köşegenli matris olması durumunda Thomas yöntemi(algoritması) kullanılır(Yinelemeli Yöntemler Bölümü, Alıştırma 10).

Öncelikle doğrudan çözüm yöntemlerini incelemek istiyoruz. Gauss-yok etme yöntemi akla gelen ilk doğrudan çözüm yöntemidir. Yöntem aşağıda özetleneceği üzere yok etme işleminden sonra üst üçgensel sistemin çözümünü gerektirir. Bu amaçla öncelikle üst üçgensel sistemlerin geriye doğru çözümünü hatırlayalım:

7.4.1 Üst üçgensel sistemler(geriye doğru çözüm)

U matrisi

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ 0 & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan ve köşegen üzerindeki elemanları sıfırdan farklı bir üst üçgensel matris($u_{ii} \neq 0, i = 1, \cdots, n$) ve $\mathbf{b} = [b_1\ b_2\ \cdots b_n]^T$ olmak üzere $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi verilmiş olsun. Açıkça bu sistemi

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n &= b1 \\ &\vdots \\ u_{ii}x_i + \cdots + u_{in}x_n &= b_i \\ &\vdots \\ u_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Son denklemden $x_n = b_n/u_{nn}$ elde ederek, bu değeri bir üst satırdaki denklemde yerine yazmak suretiyle x_{n-1} değerini, ve aynı şekilde yukarıya(veya geriğe) doğru devam ederek $x_{n-2}, \cdots, x_2, x_1$ değerlerini elde ederiz.

ÖRNEK 7.5.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 1z &= 3 \\ 2y + z &= 0 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

denklem sistemini geriye doğru çözünüz.

Çözüm.

$z = 2$ değerini bir önceki denklemde yerine yazarak $y = -1$ olarak elde ederiz. Son olarak bulunan y ve z değerlerini birinci denklemde yazarak $x = 1$ değerini elde ederiz.

Üst üçgensel sistem algoritması(Algoritma 7.1) aşağıda verilmektedir.

Algoritma 7.1 Üst üçgensel sistem çözer

1. input U, b
2. n ye b nin eleman sayısını ata
3. $x_n = b_n/u_{nn}$
4. $i = n-1, n-2, \cdots, 1$ için

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{u_{ii}}(b_i - u_{i,i+1}x_{i+1} - \cdots - u_{in}x_n) \\ &= \frac{1}{u_{ii}}(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j), \end{aligned}$$

Algoritma 7.1 e ait Program 7.1 aşağıda verilmektedir.

```
%-------------------------------------------------------
function X=ustucgen(U,b)
%UX=b üst üçgensel denklem sistemini çözer.

[m,n]=size(U);
X=zeros(n,1);
X(n)=b(n)/U(n,n);
for  i=n-1:-1:1
    jv=i+1:n;
    top=U(i,jv)*X(jv);  % jv nin vektör olduğuna
    X(i)=(b(i)-top)/U(i,i); % dikkat ediniz!
end
%-------------------------------------------------------
```

Program 7.1: Üst üçgensel sistem çözer

Programı çalıştırmak için U matrisi ve $\mathbf{b}$ sütun vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

>>$U = [3\ \ 2\ \ 1; 0\ \ 2\ \ 1; 0\ \ 0\ \ 1];$

>>$b = [3\ \ 0\ \ 2]'$;

Daha sonra aşağıdaki komut yardımıyla $\mathbf{x}$ çözümü elde edilir:

```
>>X=ustucgen(U,b)

 X =1 -1  2
```

$Ux = y$ **sistemini çözmek için gerekli işlem(çarpma ve bölme) sayısını hesaplayalım:**

$Ux = y$ denklem sistemini çözmek için $n-1$-inci satırda 1 adet, $n-2$-inci satırda 2 adet ve 1-inci satırda ise $n-1$ adet çarpma işlemi gereklidir. Diğer bir değimle tablo halinde ifade edersek

satır no	1	2	$\cdots$	$n-1$
çarpma işlem sayısı	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	1

O halde gerekli *çarpma işlemi sayısı*

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

dir.

Öteyandan bu çözüm işleminde *gerekli bölme işlemi sayısı* ise her satırda 1 adet olmak üzere toplam n adettir.

Sonuç olarak $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ denklem sistemini çözmek için gerekli çarpma ve bölme işlem sayısı

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{7.5}$$

dir.

7.4.2 Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümünde kullanılan geleneksel bir yöntem Gauss yok etme yöntemidir[2]. Yöntem elemanter satır veya sütun işlemleri

[2] Carl Friedrich Gauss (1777-1855, Alman matematikçi)

yardımıyla verilen sistemi $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ biçiminde üst üçgensel veya eşelon(basamaklı) forma dönüştürür. Bu amaçla sağ yan vektörü ile birlikte oluşturulan $[A|\mathbf{b}]$ ekli matrisine elemanter satır işlemleri uygulanarak $[U|\mathbf{c}]$ ekli matrisi elde edilir. Elemanter satır işlemlerinin ilgili denklem sisteminin çözümünün değiştirmediğini biliyoruz. Dolayısıyla verilen sistemi çözmek yerine yukarıda incelenen geriye doğru çözüm yöntemini, elde edilen $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ üst üçgensel sistemi veya eşelon sistemine uygulayarak çözüm elde edilmiş olur.

Elemanter satır işlemlerini hatırlayalım:

1. Bir matrisin herhangi bir satırı sıfırdan farklı bir sabitle çarpılabilir.

2. Herhangi iki satır yer değiştirebilir.

3. Bir satır sıfırdan farklı bir sabitle çarpılarak diğer satıra ilave edilebilir.

Öteyandan eşelon formu hatırlayalım: eğer aşağıdaki kriterler sağlanırsa $[U|\mathbf{c}]$ ekli matrisi eşelon formdadır denir:

1. Her bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman bir üst satırdaki sıfırdan farklı elemanın sağında yer alır.

2. Her bir satırda sıfırdan farklı ilk elemanın aşağısında yer alan bütün elemanlar sıfıra eşittir.

3. En az bir elemanı sıfırdan farklı olan hiçbir satır, bütün elemanlı sıfıra eşit olan bir satırın daha aşağısında yer almaz.

ÖRNEK 7.6.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ 6x + 6y + 3z &= 6 \\ 9x + 10y + 6z &= 11 \end{aligned}$$

denklem sistemini Gauss yok etme yöntemi ile çözünüz.

Çözüm.

Elemanter satır işlemleri yardımıyla

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & : & 3 \\ 6 & 6 & 3 & : & 6 \\ 9 & 10 & 6 & : & 11 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -2 \times S_1 + S_2 \\ \rightarrow \\ -3 \times S_1 + S_3 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 4 & 3 & : & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ -2 \times S_2 + S_3 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{bmatrix} = [U|\mathbf{c}]$$

elde ederiz. Elde edilen üst üçgensel sistem

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ 2y + z &= 0 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

olup, geriye doğru çözerek

$$z = 2, y = -1, x = 1$$

çözümünü elde ederiz.

Gauss yok etme yöntemine göre çözüm iki aşamadan oluşmaktadır:

1. $Ax = b$ denklem sisteminin elemanter işlemlerle $Ux = c$ üst üçgensel sistemine dönüştürülmesi ve

2. $Ux = c$ sisteminin çözülmesi

Yukarıda bahsettiğimiz birinci aşamayı herhangi satır veya sütun yer değiştirmeden gerçekleştiren yok etme yöntemine **pivotsuz Gauss yok etme yöntemi** adı verilir. Burada **pivot**, sıfırdan farklı katı alınarak diğer satırlara ilave edilmek suretiyle gerekli yok etme işleminin yapılması için kullanılan ve matris köşegeni üzerinde bulunan elamana verilen isimdir, ve pivotsuz yöntem pivotu olmayan yok etme işlemi olarak yorumlanmamalıdır.

Gauss yok etme yöntemine ait Algoritma 7.2 aşağıda verilmektedir.

Gauss yok etme yöntemine ait Program 7.2 aşağıda verilmektedir. Satır işlemlerinin *vektör cebiri*(vektörlerle aritmetik işlemler) yardımıyla gerçekleştirildiğine dikkat ediniz.

Gauss yok etme işlemine göre uyguladıktan sonra, üst üçgensel sistemi Algoritma 7.2 yardımıyla çözen **gaussilecoz** isimli Program 7.3 aşağıda verilmektedir.

Algoritma 7.2 Pivotsuz Gauss Yoketme algoritması

1. girdi: A, b
2. $A = [A\ b]$ %ekli matris
3. $j = 1, 2, ..., n-1$ için
   (a) $iv = j+1 : m$ % elemanter satır işlemi uygulanacak satır indisleri
   (b) eger $A(j,j) = 0$ ise pivotsuz yöntem uygulanamaz, çık
   (c) $carp = -A(iv,j)/A(j,j);$ % elemanter satır işlemi için carpan vektörü
   (d) $A(iv,:) = A(iv,:) + carp * A(j,:);$% iv indisli satırlar için elemanter satır işlemi
4. $U = A(:, 1:n);$% üstüçgensel matris
5. $c = A(:, n+1);$% sağyan vektörü
6. çıktı: U, c

ÖRNEK 7.7. *Örnek 7.6 de verilen lineer sistemi pivotsuz Gauss yok etme yöntemine ait Program 7.2 yardımıyla çözünüz.*

MATLAB/Octave ortamında

```
>>A=[3 2 1;6 6 3;9 10 6];b=[3 6 11]';
```

ile tanımlayarak,

```
>>X=gaussilecoz(A,b)
```

komutuyla

```
>>X=1 -1  2
```

sonucunu elde ederiz.

Gauss yok etme yöntemi ile çözüm için gerekli aritmetik işlem(çarpma ve bölme) sayısını hesaplayalım:

```
%---------------------------------------------------------
function [U,c]=gauss(A,b)
%Pivotsuz Gauss Yoketme  Yöntemi ile
%AX=b sistemini Ux=c sitemine indirger, ec.
---------------------------

[m,n]=size(A);
A=[A b];
for j=1:n-1
      iv=j+1:m;  % iv nin vektör olduğuna dikkat ediniz!
      if A(j,j)==0 error('Pivotsuz GE uygulanamaz');
  end
      carp=-A(iv,j)/A(j,j);
      A(iv,:)=A(iv,:)+carp*A(j,:);
end
U=A(:,1:n);
c=A(:,n+1);
%-----------------------------------------------------------
```

Program 7.2: Pivotsuz Gauss yoketme yöntemi uygulaması

```
%---------------------------------------------------------
function X=gaussilecoz(A,b)
%Pivotsuz Gauss Yoketme  Yöntemi ile
%AX=b sistemini çözer.
---------------------------

[U,c]=gauss(A,b);
  X=ustucgen(U,c);
%-----------------------------------------------------------
```

Program 7.3: Pivotsuz Gauss yoketme yöntemi ile çözüm

Öncelikle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ sistemine dönüştürmek için gerekli çarpma işlemi sayısını hesaplayalım.

Birinci sütunu indirgemek($n-1$ adet elemanı sıfır yapmak) için gerekli çarpma işlem sayısı

$$(n-1)(n+1)$$

dir: $(n-1)$ adet satır ve her bir satırda $(n+1)$ eleman(A nın n adet sütun elemanı ile $\mathbf{b}$ nin ilgili satır elemanı).

Bu sayı ikinci sütun için

$$\begin{aligned} & (n-1-1)(n+1-1) \\ = \; & (n-2)n \end{aligned}$$

ve $(n-1)$ inci sütun için ise

$$\begin{aligned} & (n-1-(n-2))(n+1-(n-2)) \\ = \; & 1 \times 3 \end{aligned}$$

dür.

Öte yandan

$$\begin{aligned} (n-1)(n+1) &= n^2-1 \\ (n-1-1)(n+1-1) &= (n-2)n = (n-1)^2-1 \\ &\vdots \\ (n-1-(n-2))(n+1-(n-2)) &= (n-(n-2))^2-1 \\ &= 2^2-1 \end{aligned}$$

O halde uygulanan çarpma işlemi sayısı, 1 den n e kadar olan sayıların karelerinin toplam formülü yardımıyla

$$\begin{aligned} & (2^2-1)+(3^2-1)+...+(n^2-1) \\ = \; & 2^2+3^2+\cdots+n^2-(n-1) \\ = \; & n(n+1)(2n+1)/6-n \\ = \; & \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n \end{aligned}$$

dir.

Ayrıca gerekli bölme işlemi sayısı ise yok etme işlemi için gerekli çarpanların sayısı olan

$$\frac{1}{2}(n-1)n$$

kadardır. (Bu sayı $n \times n$ lik matrisin köşegen hariç alt üçgensel kısmındaki eleman sayısına eşittir.)

O halde Gauss yok etme işlemiyle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ sistemine dönüştürülmesi için gerekli çarpma ve bölme işlemlerinin toplam sayısı

$$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{4}{3}n \tag{7.6}$$

kadardır.

Öte yandan elde edilen $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ sisteminin çözümü için gerekli olan ve 7.5 ile verilen işlem sayısını da ilave etmek suretiyle, Gauss yok etme yöntemiyle verilen denklem sisteminin çözümü için gerekli işlem sayısını

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{6}n \tag{7.7}$$

olarak elde ederiz.

Hatırlatma 7.2. *Yukarıda uygulanan herhangi bir satır yer değiştirmesi gerektirmeyen yok etme yöntemi* ***pivotsuz Gauss yok etme yöntemi*** *olarak bilinir ve yok etme işlemi esnasında $A(j,j)$ köşegen elemanlarının sıfıra eşit olması durumunda uygulanamaz.*

Örneğin katsayı matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

olmuş olsaydı, $A(2,1) = 6$ elemanının bulunduğu pozisyonu sıfır yapmak için uygulanan $-2 \times S_1 + S_2 -> S_2$ yok etme işleminde $A(2,2) = 0$ olurdu ve yok etme işlemine devam edilemezdi.

Bu durumda sıkça kullanılan alternatif

- $A(j,j)$ elemanının bulunduğu sütunda yer alan $A(j+1,j), ...A(n,j)$ elemanlarını sırasıyla tarayarak belirlenen mutlak değerce en büyük eleman eğer $|A(j,j)|$ den büyükse, bu elemanın bulunduğu satır elemanları ile j inci satır elemanlarını yer değiştirmektir.

Bu yönteme **kısmi pivotlu** Gauss yok etme yöntemi(Gauss elimination with partial pivoting) adı verilmektedir.

- Bir diğer alternatif ise $A(j,j)$ pivotunun elemanının aşağısında ve sağında bulunan mutlak değerce en büyük elemanla satır ve sütun değişimi yapmaktır ki bu yaklaşıma **tam pivotlu** Gausss yok etme işlemi adı verilmektedir. Sayısal işlemlerde olaşabilecek yuvarlama hatalarını minimize etmek için tam pivotlu yöntem tercih edilir.

Kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemine de kısaca göz atalım:

ÖRNEK 7.8. *Kısmi Pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile*

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 6 \\ 6x + 4y + 3z &= 13 \\ 9x + 10y + 6z &= 25 \end{aligned}$$

sistemini çözünüz.

Çözüm.

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & : & 6 \\ 6 & 4 & 3 & : & 13 \\ 9 & 10 & 6 & : & 25 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} S_1 <-> S_3 \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 & : & 25 \\ 6 & 4 & 3 & : & 13 \\ 3 & 2 & 1 & : & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ -2/3 \times S_1 + S_2 \rightarrow \\ -1/3 \times S_1 + S_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 & : & 25 \\ 0 & -8/3 & -1 & : & -11/3 \\ 0 & -4/3 & -1 & : & -7/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -1/2 \times S_2 + S_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 & : & 25 \\ 0 & -8/3 & -1 & : & -11/3 \\ 0 & 0 & -1/2 & : & -1/2 \end{bmatrix}$$

Elde edilen bu indirgenmiş sisteme karşılık gelen üst üçgensel sistem aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} 9x + 10y + 6z &= 25 \\ -8/3y - z &= -11/3 \\ -1/2z &= -1/2 \end{aligned}$$

Bu sistemi çözerek $x = y = z = 1$ sonucunu elde ederiz. Kısmi pivotlu yönteme ait Algoritma 7.4 ve kodu,Program7.7, bir sonraki bölümde LU ayrışım yöntemiyle birlikte veriyoruz.

7.4.3 $A = LU$ ayrışımı yardımıyla çözüm

Bu yöntem öncelikle A matrisinin, eğer mümkünse, birisi köşegen üzerindeki elemanları bir rakamlarından oluşan alt üçgensel L matrisi, ve diğeri de U üst üçgensel matrisi olmak üzere bu iki matrisin çarpımı, $A = LU$, şeklinde yazılmasını gerektirir. Öncelikle söz konusu ayrışımın nasıl gerçekleştirileceğini inceleyelim:

Yukarıdaki bölümde incelediğimiz pivotsuz Gauss yok etme yöntemi U matrisi ile birlikte yok etme işleminde kullanılan çarpanların toplama işlemine göre terslerini içeren ve köşegen üzerindeki elemanları 1 e eşit olan L alt üçgensel matrisini de üretir.

Bunun için yukarıdaki örneğe ait yok etme işlemlerine tekrar gözatalım:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -2 \times S_1 + S_2 \\ \rightarrow \\ -3 \times S_1 + S_3 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ -2 \times S_2 + S_3 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

A nın (i, j) *inci* pozisyonunda sıfır elemanı üretmek için kullanılan çarpanın toplama işlemine göre tersi L nin (i, j) inci elemanı olarak alınır. O halde yukarıdaki çarpanlar dikkate alınarak

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Gerçekten de $A = LU$ dur.

$A = LU$ ayrışımını, herhangi bir satır yer değiştirme işlemi gerçekleştirmeksizin(eğer mümkünse !) elde eden algoritma 7.3 aşağıda verilmektedir .

$A = LU$ ayrışımını algoritma 7.3 ile gerçekleştiren Program 7.4 aşağıda verilmektedir.

Test:

```
>> A=[3 2 1;6 6 3;9 10 6];

>> [L,U]=lubul(A)

L =

1  0  0
```

Algoritma 7.3 Pivotsuz LU ayrışım algoritması

1. girdi: A
2. n, A nın satır sayısı
3. L :, A ile aynı boyutlu sıfırlar matrisi
4. L nin köşegen elemanlarını 1 e eşitle
5. Her bir $j = 1, 2, ..., n-1$ için
   (a) $iv = j+1, ..., n$; % elemanlarını içeren vektörü tanımla
   (b) $L(iv, j) = A(iv, j)/A(j, j)$;;% çarpanlar vektörünü tanımla
   (c) $A(iv, :) = A(i, :) - L(iv, j) * A(j, :)$; iv indisli satırları güncelle
6. Çıktı L alt üçgensel matris
7. Çıktı A üst üçgensel matris

```
 A=LU ayrışımını pivotsuz yöntemle  hesaplar
%---------------------------------------------------------
function [L,A]=lubul(A)
  [n,n]=size(A);
  L=zeros(n,n);
  for i=1:n
    L(i,i)=1;
  end
  for j=1:n-1
      iv=j+1:n;
      L(iv,j)=A(iv,j)/A(j,j);
      A(iv,:)=A(i,:)-L(iv,j)*A(j,:);
  end
%-----------------------------------------------------------
```

Program 7.4: Pivotsuz yöntemle A=LU ayrışım uygulaması

```
2   1   0

3   2   1

U =

3   2   1

0   2   1

0   0   1
```

Eğer A matrisi yukarıda belirtildiği biçimde $A = LU$ ayrışımına sahipse, bu taktirde $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistemine dönüşür.

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

dönüşümü yaparak

$$A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

biçiminde alt üçgensel sistemini elde ederiz. Alt üçgensel sistemi çözerek $\mathbf{y}$ vektörünü belirledikten sonra $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ de yerine yazmak suretiyle $\mathbf{x}$ çözümünü elde ederiz. O halde

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

sistemi yerine

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

ve

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

üçgensel sistemlerini çözmüş oluruz.

ÖRNEK 7.9. *Aşağıda verilen denklem sisteminin çözümünü LU ayrışım yöntemi yardımıyla gerçekleştiriniz.*

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 6x + 6y + 3z &= 6 \\ 9x + 10y + 6z &= 11 \end{aligned}$$

Çözüm.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 4/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ayrışımını yukarıda elde etmiştik. Öncelikle $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ denklem sistemini açık olarak aşağıdaki gibi ifade edelim:

$$\begin{aligned} y_1 &= 3 \\ 6y_1 + y_2 &= 6 \\ 9y_1 + 4/3y_2 + y_3 &= 11 \end{aligned}$$

Bu sistemi ileriye doğru(yukarıdan aşağıya doğru) çözerek $y_1 = 3, y_2 = -12, y_3 = 0$ elde ederiz.

Dolayısıyla $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ denklem sistemi

$$\begin{aligned} 1x + 2y + z &= 3 \\ -6y - 3z &= -12 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Bu sistemi de geriye doğru(aşağıdan yukarıya doğru) çözerek $z = 0, y = 2, x = -1$ elde ederiz.

Yukarıdaki örnekten de görüldüğü üzere LU ayrışımı yardımıyla $Ax = b$ denklem sistemininin çözümü için $Ly = b$ alt üçgensel ve $Ux = y$ üst üçgensel sistemlerinin çözülmesi gerekmektedir. $Ly = b$ alt üçgensel sistemini çözen Program 7.5 aşağıda verilmektedir.

$Ax = b$ sistemini pivotsuz LU ayrışım yöntemi yardımıyla çözen Program 7.11 aşağıda verilmektedir.

Test:

```
>> A=[1 2 1;6 6 3;9 10 6];b=[3 6 11]';
>> X=luilecoz(A,b)
X = -1  2  0
```

LU ayrışımı yardımıyla $Ax = b$ sisteminin çözümü için gerekli işlem sayısını hesaplayalım:

Öncelikle LU ayrışımı için gerekli işlem sayısına göz atalım:

```
%-------------------------------------------------------
function Y=altucgen(L,b)
%LY=b sistemini çözer.
--------------------------

  n=size(L,1);
  Y=zeros(n,1);
  Y(1)=b(1)/L(1,1);
  for i=2:n
     jv=1:i-1; %jv nin vektör olduğuna dikkat edelim!
     top=L(i,jv)*Y(jv);
    Y(i)=(b(i)-top)/L(i,i);
  end
%---------------------------------------------------------
```

Program 7.5: Alt üçgensel sistem çözümü

```
%-------------------------------------------------------
function X=luilecoz(A,b)
% Pivotsuz LU ayrışımı  ile
% AX=b sistemini çözer.
--------------------------

  [L,U]=lubul(A);
  Y=altucgen(L,b);  % LY=b sistemini çözer
  X=ustucgen(U,Y); % UX=Y sistemini çözer
%---------------------------------------------------------
```

Program 7.6: Pivotsuz LU ayrışım yöntemi ile çözüm

Esasen bu sayı Gauss yok etme işlem sayısına benzer olarak elde edilebilir. Bunun için sadece

$$A - - > U$$

dönüşümü için gerekli işlem sayısını hesaplamak yeterlidir.

- A nın birinci sütunu için gerekli çarpma işlemi sayısı A nın birinci satırındaki her bir elemanın uygun bir sabitle çarpılıp ilgili satıra ilave edilmesiyle gerçekleştirilir. O halde bu işlem için gerekli çarpma işlemi sayısı

  $$n(n-1)$$

  dir.

- A nın ikinci sütunu için gerekli çarpma işlemi sayısı A nın ikinci satırındaki her bir elemanın uygun bir sabitle çarpılıp ilgili satıra ilave edilmesiyle gerçekleştirilir. O halde bu işlem için gerekli çarpma işlemi sayısı

  $$(n-1)(n-2)$$

  dir.

- A nın $(n-1)$ inci sütunu için gerekli işlem ise 2×1 dir.

- O halde gerekli çarpma işlemleri sayısı

  $$\begin{aligned} & n(n-1) + (n-1)(n-2) + \cdots + 2 \times 1 \\ = & \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) \\ = & \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ = & \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \\ = & \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} \end{aligned}$$

  dür. Ayrıca gerekli bölme işlemi sayısı ise yukarıdaki yok etme işlemi için gerekli çarpanların sayısı olan

  $$(n-1)n/2$$

  kadardır.

O halde $A->U$ dönüşümü ve aynı zamanda da LU ayrışımı için gerekli işlem sayısı

$$\begin{aligned} & \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} + (n-1)n/2 \\ = \ & \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \end{aligned} \tag{7.8}$$

dır.

$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ yi çözmek için gerekli toplam çarpma işlemi sayısı

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1) \tag{7.9}$$

dir. L nin köşegen üzerindeki elemanları 1 e eşit olduğu için bu işlemde bölme gerekli değildir.

O halde $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ve $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ denklem sistemlerini çözmek için gerekli çarpma ve bölme işlemlerinin toplam sayısı (7.5) ve (7.9) ile

$$\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}n(n-1) = n^2 \tag{7.10}$$

dir.

Bu sayıyı yukarıda (7.8) ile verilen LU ayrışımı için gerekli işllem sayısına ilave etmek suretiyle

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{6}n \tag{7.11}$$

işlem değerini elde ederiz.

Uyarı. *Gauss yok etme yöntemi ile çözüm için gerekli ve (7.7) ile verilen işlem sayısı değerin (7.11) ile verilen ve LU ayrışım ile çözüm için gerekli olan sayısal değere eşit olduğuna dikkat edelim.*

Gözlem 7.2. *Gauss yok etme yöntemi ile çözüm elde edilebilirken, LU ayrışım yöntemine neden ihtiyaç vardır diye düşünebiliriz. Eğer $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin birden fazla $\mathbf{b}$ vektörü için çözülmesi gerekiyorsa, bu durumda L ve U vektörlerini elde ettikten sonra farklı $\mathbf{b}$ ler için sistemi çözme işlemi sadece iki üçgensel sistemin çözümüne indirgenmiş olur. Oysa, Gauss yok etme yöntemi uygulayacak olsaydık, değişen her $\mathbf{b}$ için yok etme işlemini tekrarlamamız gerekirdi.*

Öte yandan A matrisinin LU ayrışımına sahip olamadığı ancak sadece uygun satır yer değişimi ile elde edilen matrisinin LU ayrışımına sahip olduğu durumlar söz konusu olabilir. Bu amaçla öncelikle *permütasyon matrisi* kavramını inceleyelim:

TANIM 7.1. *Birim matrisin herhangi iki satırının yer değiştirilmesi suretiyle elde edilen matrise permütasyon matrisi adı verilir ve genelde P harfi ile gösterilir.*

Bir matrisin $i-inci$ satırı ile $j-inci$ satırını yer değiştirme işlemi, birim matrisin $i-inci$ satır ve $j-inci$ satırının yer değiştirilmesi ile elde edilen P permütasyon matrisi ile çarpım suretiyle gerçekleştirilir.

ÖRNEK 7.10.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

permütasyon matrisi ve Örnek 7.11 deki A matrisi için PA yı hesaplayınız.

Çözüm.

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

ÖRNEK 7.11. *Örnek 7.9 teki denklem sisteminin katsayı matrisi olan*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

matrisinin LU ayrışımına sahip olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} \end{bmatrix}$$

İlk satır elemanlarını eşitleyerek $u_{11} = 3, u_{12} = 2, u_{13} = 1$ elde ederiz. Bu değerler yerine yazılarak

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3l_{21} & 2l_{21}+u_{22} & l_{21}+u_{23} \\ 3l_{31} & 2l_{31}+l_{32}u_{22} & l_{31}+l_{32}u_{23}+u_{33} \end{bmatrix}$$

elde ederiz. İkinci satırdaki terimleri eşitleyerek, $l_{21} = 2, u_{22} = 0, u_{23} = 1$ elde ederiz. Son satırdaki ilk iki terimden ise

$l_{31} = 3, l_{31} = 5$ gibi çelişkili sonuçlar elde ederiz. O halde verilen matrisin LU ayrışımı mevcut değildir.

Verilen karesel bir $A = [a_{ij}], i, j = 1, 2, ...n$ matrisinin ne zaman LU ayrışımına sahip olduğunu belirleyen kriterler mevcuttur. Pratik kriterlerden birisi A matrisinin esas köşegenini yani $a_{ii}, i = 1, 2, ...n$ elemanlarını, esas köşegen kabul eden tüm

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & & \cdots & a_{1k} \\ & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{k1} & & & a_{kk} \end{bmatrix}$$

alt matrislerin determinantlarının sıfırdan farklı olmasıdır:

$$\det(A_k) \neq 0, k = 1, 2, ..., n$$

Yukarıda verilen A matrisi için

$$\begin{aligned} A_1 &= 3, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olup, $\det(A_2) = 0$ olduğundan belirtilen kriterin sağlanmadığı görülmektedir.

A matrisinin LU ayrışımının mevcut olmadığı halde A nın uygun satırlarının yer değiştirilmesiyle elde edilen matrisin LU ayrışımı mevcut olabilir.

ÖRNEK 7.12. *Örnek 7.10 da elde edilen PA matrisinin LU ayrışımını elde ediniz.*

Çözüm.

Elemanter satır işlemlerini PA matrisine uygularak matrisi üst üçgensel forma indirgeyelim:

$$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -2/3 \times S_1 + S_2 \\ \rightarrow \\ -1/3 \times S_1 + S_3 \end{array} \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 0 & -8/3 & -1 \\ 0 & -4/3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ -1/2 \times S_2 + S_3 \end{array} \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 0 & -8/3 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. O halde ayrışım sürecinde kullanılan çarpanları dikkate alarak

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edriz. Ayrıca

$$U = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 0 & -8/3 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

dir. O halde A matrisi LU ayrışımına sahip olmadığı halde

$$PA = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 0 & -8/3 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

ayrışımını elde etmiş olduk.

LU ayrışımı MATLAB/Octave ortamında da hesaplanabilir:

```
>> A=[3 2 1;6 4 3;9 10 6];
>> [L,U,P]=lu(A) komutuyla
```

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\0.6667&1&0\\0.3333&0.5&1\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}9&10&6\\0&-2.6667&-1\\0&0&-0.5\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

elde ederiz.

ÖRNEK 7.13. *Örnek 7.8 ü LU ayrışım yöntemi yardımıyla çözünüz.*

Çözüm.

Belirtilen örnekteki denklem sisteminin katsayı matrisinin LU ayrışımına sahip olmadığını Örnek 7.11 in çözümünden biliyoruz. Örnek 7.12 de ise A matrisinin birinci ve üçüncü satırının yer değiştirilmesiyle elde edilen PA matrisinin LU ayrışımını belirledik.

O halde $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ siteminin her iki yanını P permütasyon matrisi ile çarparak

$PA\mathbf{x}=P\mathbf{b}$ sistemini elde ederiz. Burada

$$P\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\13\\25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\13\\6\end{bmatrix}$$

dır.

Örnek 7.12 deki $PA=LU$ ayrışımını kullanarak

$LU\mathbf{x}=P\mathbf{b}$ elde ederiz. $U\mathbf{x}=\mathbf{y}$ olsun. O halde $L\mathbf{y}=Pb$ sistemi

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2/3&1&0\\3&1/2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\13\\6\end{bmatrix}$$

olup, bu sistemi çözerek $y_1=25, y_2=-11/3, y_3=-1/2$ elde ederiz. Bu çözümü $U\mathbf{x}=\mathbf{y}$ de yazarak

$$\begin{bmatrix}9&10&6\\0&-8/3&-1\\0&0&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\-11/3\\-1/2\end{bmatrix}$$

sisteminin Örnek 7.8 de elde edilen $x=y=z=1$ çözümünü elde ederiz.

$PA=LU$ ayrışımı ile birlikte pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümüne ait Algoritma 7.4 aşağıda verilmektedir.

Algoritma 7.4 e ait Program 7.7 aşağıda verilmektedir.

Algoritma 7.4 Kısmi Pivotlu Gauss yoketme yöntemi ile çözüm ve $PA = LU$ ayrışımı

1. girdi: A, b
2. A nın satır sayısını m ve sütun sayısını n değişkenine ata
3. I_n, n boyutlu birim matris olmak üzere, $L = P = I_n$ matrislerini tanımla
4. $A = [A|b]$ ekli matrisini tanımla
5. $j = 1, 2, ..., n-1$ için aşağıdakileri tekrarla
   (a) $j - inci$ sütundaki $A(j, j)$ pozisyonu aşağısında yer alan mutlak değerce maksimum elemanla $j - inci$ satırı değiştir, yeni matrisi yine A olarak adlandır
   (b) (a) daki işlemi I birim matrisine de uygula ve elde edilen matrisi Pj olarak adlandır
   (c) $P = P * Pj$ olarak ata
   (d) elemanter satır işlemleri ile pivot aşağısındaki elemanları sıfırla
      i. $iv = j + 1 : m$ indis vektörünü tanımla
      ii. $carp = -A(iv, j)/A(j, j)$ çarpanlar vektörünü tanımla
      iii. $A(iv, :) = A(iv, :) + carp * A(j, :)$ işlemi ile iv indisli satırlara elemanter işlemleri uygula
      iv. $L(iv, j) = -carp$ olarak tanımla
6. $U = A(:, 1 : n)$ olarak tanımla
7. $b = A(:, n + 1)$ olarak tanımla
8. $X = ustucgen(U, b)$ programını çağır ve X çözüm vektörünü belirle
9. çıktı:P, L, U ve X

```
%--------------------------------------------------------------
% Kısmi Pivotlu Gauss  eliminasyon  yontemi ile lineer sistem çözer,
%PA=LU ayrışımı için P,L ve U  yu belirler.
% 7 Mayıs 2013, sayısal analiz dersi, ec
%----------------------------------------

function [P,L,U,X]=kpgauss(A,b)
[m,n]=size(A);
if (m~=n) error('karesel matris giriniz'); end
L=eye(n);I=L;P=I;
A=[A b]; %Ekli matris
for j=1:n-1
      [A,P]=degis(A,I,j,m);
      P=P*P;
      iv=j+1:m; % iv: i-inci satı r vektörü
      carp=-A(iv,j)/A(j,j);
      A(iv,:)=A(iv,:)+carp*A(j,:);
      L(iv,j)=-carp;
end
U=A(:,1:n);         %Üst üçgensel matris
b=A(:,n+1);         %Sağ yan vektörü
X=ustucgen(U,b);    %UX=b yi çözer
function [A,P]=degis(A,P,j,m)
y=abs(A(j+1:m,j));
if max(y)> abs(A(j,j))
  i=find(y>=max(y),1); %en büyük eleman yerel indisi
  i=i+j; %yer değistirecek pivot eleman satı rı
  kutu=A(j,:);A(j,:)=A(i,:);A(i,:)=kutu; %A(i,:)<-->A(j,:)
  kutu=P(j,:);P(j,:)=P(i,:);P(i,:)=kutu; %P(i,:)<-->P(j,:)
end
%--------------------------------------------------------------
```

Program 7.7: Kısmi Pivotlu Gauss yoketme yöntemi ile çözüm

ÖRNEK 7.14. *Örnek 7.8 ile verilen*

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 6 \\ 6x + 4y + 3z &= 13 \\ 9x + 10y + 6z &= 25 \end{aligned}$$

sistemini kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemine ait Program7.7 yardımıyla çözünüz. Aynı zamanda $PA = LU$ ayrışımı için P, L ve U matrislerini belirleyiniz.

```
>> A=[3 2 1;6 4 3;9 10 6]
>> b=[6 13 25]'
>> [P,L,U,X]=kpgauss(A,b)
```
komutu ile

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.6667 & 1 & 0 \\ 0.3333 & 0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 0 & -2.6667 & -1.0000 \\ 0 & 0 & -0.5000 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Gerçekten de

$$>> P * A = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \; L * U = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olup, $PA = LU$ sağlanır.

Lineer denklem sistemlerinin çözümü ve matris özdeğerlerinin belirlenmesinde kullanılan bir diğer yöntem aşağıda incelenen QR ayrışım yöntemidir. Öncelikle QR ayrışımını inceleyelim.

7.4.4 $A = QR$ ayrışımı yardımıyla çözüm

$A_{m\times n}$ $(m \geq n)$ matrisinin sütunlarının lineer bağımsız olduğunu kabul edelim. A nın sütunları Gram-Schmidt yardımıyla ortogonelleştrilerek, söz konusu ortogonal(ortonormal) kümeyi sütunları olarak kabul eden

$$Q = [q_1 \; q_2 \cdots q_n]$$

matrisi ve
$$R = Q^T A$$
ile tanımlanan üst üçgensel R matrisi ile
$$A = QR$$
ayrışımı elde edilebilir.

Bu işlemin nasıl gerçekleştirildiğini görmek için öncelikle skaler ve vektörel izdüşüm kavramları ve ardından da Gram-Schmidt yöntemini hatırlayalım:

Skaler izdüşüm: Bir $\mathbf{b}$ vektörünün $\mathbf{a}$ vektörü yönündeki skaler izdüşümü $||\mathbf{b}|| \cos\theta$ dır, burada $\theta \in (0, \pi)$, $\mathbf{a}$ ile $\mathbf{b}$ arasındaki açıdır.

Vektörel izdüşüm: Bir $\mathbf{b}$ vektörünün $\mathbf{a}$ vektörü yönündeki vektörel izdüşümü, $\mathbf{b}$ nin $\mathbf{a}$ yönündeki skaler izdüşümü ile $\mathbf{a}$ yönündeki birim vektör, yani $\mathbf{a}/||\mathbf{a}||$, ile çarpımıdır. Vektörel izdüşümü $\mathrm{Pr}(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ sembolü ile gösteriyoruz, burada Pr(Projeksiyon=izdüşüm) sözcüğünün ilk iki harfidir. O halde
$$\mathrm{Pr}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = ||\mathbf{b}|| \cos\theta \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}$$
dır. Öte yandan
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||}$$
olduğunu hatırlayarak,
$$\begin{aligned} \mathrm{Pr}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) &= ||\mathbf{b}|| \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||} \cos\theta \\ &= ||\mathbf{b}|| \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||} \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||} \\ &= \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||} \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||} \end{aligned}$$
elde ederiz.

Özel olarak $||\mathbf{a}|| = 1$ olması durumunda,
$$\mathrm{Pr}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^T\mathbf{b}\mathbf{a}$$
olur.

Gram-Schmidt yöntemi, lineer bağımsız bir kümeden ortogonal veya ortonormal bir küme elde etme işlemdir: A matrisi, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ sütunlarından oluşan bir matris olsun. Aşağıda verilen *Gram-Schmidt prosedürü* ile ortonormal sütunlara sahip

$$Q = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$$

matrisi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1 \\
\mathbf{q}_1 &= \mathbf{v}_1/||\mathbf{v}_1|| \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \mathrm{Pr}(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_1) = \mathbf{a}_2 - \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{q}_1 \\
\mathbf{q}_2 &= \mathbf{v}_2/||\mathbf{v}_2|| \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{a}_3 - \mathrm{Pr}(\mathbf{a}_3, \mathbf{q}_1) - \mathrm{Pr}(\mathbf{a}_3, \mathbf{q}_2) \\
&= \mathbf{a}_3 - \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_3 \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_3 \mathbf{q}_2 \\
\mathbf{q}_3 &= \mathbf{v}_3/||\mathbf{v}_3||
\end{aligned}$$

işlemi ile her bir vektörden kendisinden önceki vektör yönündeki izdüşümlerini çıkarmak suretiyle, önceki vektörler yönünde bileşen içermeyen ve dolayısıyla birbirine dik olan vektörler kümesi elde edilmiş olur. Böylece birim boylu sütunlara sahip

$$Q = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \mathbf{q}_3]$$

ortogonal matrisi elde edilir .

Gram-Schmidt yöntemi ile bir A matrisinin QR ayrışımını bir örnek üzerinde inceleyelim:

ÖRNEK 7.15.

$$A = [a_1 \ a_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin sütunlarını Gram-Schmidt yöntemi yardımıyla ortogonalleştirerek, ortonormal sütunları içeren Q matrisini belirleyiniz. Daha sonra $R = Q^T A$ ile tanımlı R üst üçgensel matrisini hesaplayarak $A = QR$ ayrışımını belirleyiniz.

Çözüm.

Yukarıdaki kısa özete göre

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1 = [1\ \ -1\ 1]^T, \\
\mathbf{q}_1 &= \mathbf{v}_1/||\mathbf{v}_1|| = \frac{1}{\sqrt{3}}[1\ \ -1\ 1]^T \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \mathrm{Pr}(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_1) \\
&= \mathbf{a}_2 - \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{q}_1 \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}[1\ \ -1\ 1] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 7/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{q}_2 &= \mathbf{v}_2/||\mathbf{v}_2|| \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 7/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

elde ederiz. O halde,

$$
Q = [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{26} \\ -1 & 7/\sqrt{26} \\ 1 & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix}
$$

elde ederiz.

Öte yandan

$$
\begin{aligned}
R &= Q^T A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{26} & 7/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olur. O halde

$$
A = QR = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{26} \\ -1 & 7/\sqrt{26} \\ 1 & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}
$$

Algoritma 7.5 Vektör tabanlı Gram-Schmidt algoritması

1. Girdi: A matrisi
2. m: A matrisinin satır sayısı
3. Q(:,1)=A(:,1)/norm(A(:,1))
4. i=2,3,...,n için
   (a) top=0
   (b) k=1,2,...,i-1 için
      i. top=top+proj(A(:,i),Q(:,k))
   (c) uu=A(:,i)-top
   (d) Q(:,i)=uu/norm(uu)
5. çıktı: Ortogonal Q matrisi

ayrışımını elde ederiz.

Vektör tabanlı Gram-Schmidt algoritması aşağıda verilmektedir:

Algoritma 7.5 e ait Program 7.8 aşağıda verilmektedir.

Program 7.8 ile QR ayrışımını hesaplayan Program 7.9 aşağıda verilmektedir:

MATLAB/Octave ortamında QR ayrışım programımızı test yapabiliriz:

```
>> A=rand(3,3)

A =

    0.3922    0.7060    0.0462
    0.6555    0.0318    0.0971
    0.1712    0.2769    0.8235

>> [q,r]=vqr(A)

q =
```

```
%-------------------------------------------------------

function Q=gs(A)
% Klasik Gram-Schmidt yöntemi ile A nı n sütunları ndan
% ortogonal Q matrisi oluşturur.

[m,n]=size(A);
Q(:,1)=A(:,1)/norm(A(:,1)); % A nı n birinci sütunu, boyuna bölünerek
                            % Q nun birinci sütunu olarak kabul ediliyor.
for i=2:n
    top=0;
    for k=1:i-1                    %  A nı n i-inci sütununun,
      top=top+proj(A(:,i),Q(:,k)); %  Q nun 1,2,...,i-1 -inci sütunlar
    end                            %  üzerine izdüşümlerinin toplamı
    uu=A(:,i)-top;                 %  A nı n i-inci sütunundan
    Q(:,i)=uu/norm(uu);  % izdüşümler toplamı nı n çı karı lması ve
                         % 1 normlu vektöre dönüşüm
end
function uv=proj(u,v)    % u vektörünün  normu 1 e eşit
uv=(v'*u)*v;             % v vektörü üzerine izdüşümü
%-------------------------------------------------------
```

Program 7.8: Vektör tabanlı Gram-Schmidt Uygulaması

```
%-------------------------------------------------------
function [Q,R]=vqr(A )
Q=gs(A);
R=Q'*A;

%-------------------------------------------------------
```

Program 7.9: Gram-Schmidt ile QR ayrışım uygulaması

```
    0.5010    0.7851   -0.3640
    0.8373   -0.5461   -0.0253
    0.2187    0.2921    0.9310


r =
```

```
    0.7828    0.4410    0.2845
   -0.0000    0.6179    0.2238
    0.0000    0.0000    0.7474

>> q*r

ans =

    0.3922    0.7060    0.0462
    0.6555    0.0318    0.0971
    0.1712    0.2769    0.8235
```

Aşağıdaki örneklerden göreceğimiz üzere klasik Gram-Schmidt yöntemi sayısal olarak kararlı değildir ve kabul edilemeyecek büyüklükte yuvarlama hatalarına neden olmaktadır. Bu durumda *Modifiye Gram-Schmidt yöntemi* kullanılır. Modifiye yöntem ile klasik yöntem arasındaki fark şudur:

- Klasik yöntemde
$$\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{q}_k^T \mathbf{a}_i \mathbf{q}_k$$
ile $\mathbf{a}_i$ vektöründen, bu vektörün $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_{i-1}\}$ ortonormal kümesi üzerindeki izdüşümü çıkarılarak, oluşan $\mathbf{v}_i$ vektöründen ortonormal kümenin $i-$inci elemanı olan
$$\mathbf{q}_i = \mathbf{v}_i / ||\mathbf{v}_i||$$
ile elde edilmektedir.

- Modifiye yöntemde ise $\mathbf{v}_i$ vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:
  1. $a_i^{(1)} = \mathbf{a}_i - \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_i \mathbf{q}_1$
  2. $a_i^{(2)} = \mathbf{a}_i^{(1)} - \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_i^{(1)} \mathbf{q}_2$
  3. $\vdots$
  4. $a_i^{(i-1)} = \mathbf{a}_i^{(i-2)} - \mathbf{q}_{i-1}^T \mathbf{a}_i^{(i-1)} \mathbf{q}_{i-1}$, ve $\mathbf{v}_i = a_i^{(i-1)}$ olarak tanımlanır.

Algoritma 7.6 Vektör tabanlı Modifiye Gram-Schmidt algoritması

1. Girdi: A matrisi
2. m: A matrisinin satır sayısı
3. Q(:,1)=A(:,1)/norm(A(:,1))
4. i=2,3,...,n için
   (a) k=1,2,...,i-1 için
      i. A(:,i)=A(:,i)-proj(A(:,i),Q(:,k))
   (b) qq=A(:,i);
   (c) Q(:,i)=qq/norm(qq);
5. çıktı: Ortogonal Q matrisi

Vektör tabanlı **Modifiye Gram-Schmidt algoritması** aşağıda verilmektedir:

Vektör tabanlı Modifiye Gram-Schmidt algoritmasını uygulayan Program 7.10 aşağıda verilmektedir

Modifiye Gram-Schmidt yöntemi her adımda oluşabilecek yuvarlama hatalarını dikkate alarak ortonormal kümeyi inşa ederken, klasik yöntem ise teorik ortonormal kümeyi inşa eder. Şuphesiz teorik olarak iki formülasyon birbirine denktir, ancak klasik yöntemle elde edilen ortonormal küme pratikte ortonormal olmayabilir. Bu durumu sütunları "lineer bağımlı olmaya yatkın" Hilbert matrisi üzerinde inceleyelim:

ÖRNEK 7.16. *$H_{n\times n}$ Hilbert matrisinin(örneğin $n=7$ için) sütunlarını Gram-Schmidt ve modifiye Gram-Schmidt yöntemiyle ortonormalleştirerek, her iki yöntemle elde edilen ortogonal matrisin pratik olarak ortogonal olup olmadığını kontrol ediniz.*

Çözüm.

Öncelikle 7×7 lik Hilbert matrisini MATLAB/Octave ortamında üretelim.

```
%--------------------------------------------------------
function Q=modgs(A)
% Modifiye Gram-Schmidt yöntemi ile A nın sütunlarından
% ortogonal Q matrisi oluşturur.
n=size(A,2);
Q(:,1)=A(:,1)/norm(A(:,1)); % A nın birinci sütunu, boyuna bölünerek
                       % Q nun birinci sütunu olarak kabul ediliyor.
for i=2:n
   i1=i-1;
   for k=1:i1            %  A nın i-inci sütunununundan,ardışık olarak
    A(:,i)=A(:,i)-proj(A(:,i),Q(:,k));  % Q nun 1,2,...,i-1 inci sütunlar
   end                 %  üzerine izdüşümleri çıkarılmaktadır.
   qq=A(:,i);
   Q(:,i)=qq/norm(qq);    %  normu 1 e eşit vektöre dönüşüm

end

function uv=proj(u,v)    % u vektörünün normu 1 e eşit olan
uv=(v'*u)*v;             % v vektörü üzerine izdüşümü

%--------------------------------------------------------
```

Program 7.10: Modifiye Gram-Schmidt ile QR ayrışım uygulaması

» H=hilb(7)

$$H = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 \\ 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 \\ 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 & 0.1111 \\ 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 & 0.1111 & 0.1000 \\ 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 & 0.1111 & 0.1000 & 0.0909 \\ 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 & 0.1111 & 0.1000 & 0.0909 & 0.0833 \\ 0.1429 & 0.1250 & 0.1111 & 0.1000 & 0.0909 & 0.0833 & 0.0769 \end{bmatrix}$$

Daha sonra geliştirdiğimiz **gs** isimli program ile klasik Gram-Schmidt yardımıyla Q yu hesaplayalim:

>> Q=gs(H)

$$Q = \begin{bmatrix} 0.8133 & -0.5438 & 0.1991 & -0.0551 & 0.0120 & -0.0020 & -0.0001 \\ 0.4067 & 0.3033 & -0.6886 & 0.4760 & -0.1974 & 0.0541 & -0.0008 \\ 0.2711 & 0.3939 & -0.2071 & -0.4901 & 0.6108 & -0.3269 & 0.0396 \\ 0.2033 & 0.3817 & 0.1124 & -0.4396 & -0.2542 & 0.6410 & -0.2588 \\ 0.1627 & 0.3514 & 0.2915 & -0.1123 & -0.4992 & -0.2022 & 0.6394 \\ 0.1356 & 0.3202 & 0.3892 & 0.2309 & -0.1506 & -0.5418 & -0.6757 \\ 0.1162 & 0.2921 & 0.4407 & 0.5206 & 0.5013 & 0.3805 & 0.2571 \end{bmatrix}$$

Şimdi de $Q^T Q$ yu hesaplayalım:

$$Q' * Q = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & \mathbf{0.0016} \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & \mathbf{0.1557} \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \mathbf{0.0016} & \mathbf{0.1557} & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü üzere elde edilen matrisin sağ alt $3x3$ lük bloku birim matris değildir. Şimdi de Modifiye Gram-Schmidt yöntemini uygulayan *modgs* programımız ile ortogonal matrisi elde edelim ve Q_m olarak adlandıralım:

>> Qm=modgs(H)

$$Qm = \begin{bmatrix} 0.8133 & -0.5438 & 0.1991 & -0.0551 & 0.0120 & -0.0020 & 0.0002 \\ 0.4067 & 0.3033 & -0.6886 & 0.4760 & -0.1974 & 0.0541 & -0.0091 \\ 0.2711 & 0.3939 & -0.2071 & -0.4901 & 0.6108 & -0.3269 & 0.0907 \\ 0.2033 & 0.3817 & 0.1124 & -0.4396 & -0.2542 & 0.6410 & -0.3626 \\ 0.1627 & 0.3514 & 0.2915 & -0.1123 & -0.4992 & -0.2022 & 0.6800 \\ 0.1356 & 0.3202 & 0.3892 & 0.2309 & -0.1506 & -0.5418 & -0.5984 \\ 0.1162 & 0.2921 & 0.4407 & 0.5206 & 0.5013 & 0.3805 & 0.1995 \end{bmatrix}$$

Şimdi de $Q_m^T Q_m$ i hesaplayalım:

$$Qm'{*}Qm = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü üzere elde edilen matris birim matristir[3]. O halde modifiye Gram-Schmidt yöntemi klasik Gram-Schmidt yöntemine göre daha hassastır.

Uyarı. *QR ayrışımı için MATLAB/Octave yazılımları veya LAPACK isimli sayısal Lineer Cebir Paket yazılımında mevcut uygun fonksiyonları kullanmaktadırlar. Profesyonel işlemler için LAPACK tercih edilmelidir.*

QR ayrışımı yöntemi yardımıyla $Ax = b$ sisteminin çözümü:
Sütunları lineer bağımsız olan $A_{m\times n}$ matrisi ve bu matrisi katsayı matrisi kabul eden

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{7.12}$$

sistemi verilmiş olsun. $Q_{m\times m}$ ortogonal ve $R_{n\times n}$ üst üçgensel matrisi yardımıyla

$$A = QR \tag{7.13}$$

biçiminde bir ayrışım mevcuttur ve bu ayrışım lineer cebir derslerinden bilinen Gram-Schmidt yöntemi yardımıyla da elde edilebilir. Bu durumda (7.12) sistemi

$$QR\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{7.14}$$

olarak ifade edilir ve ortogonal matrisin $Q^T = Q^{-1}$ özelliği yardımıyla (7.14) nin her iki yanını Q^T ile çarpmak suretiyle

$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b} \tag{7.15}$$

üst üçgensel sistemini elde ederiz, burada R tersinir bir matristir. Dolayısıyla (7.12) sisteminin çözümü (7.15) üst üçgensel sisteminin çözümüne indirgenmiş olur .

[3] Octave ortamında $Q_m' * Q_m(3,3)$ =0.99990 olarak elde edilmektedir.

(7.13) deki Q matrisi, A nın lineer bağımsız sütunlarının Gram-Schmidt yöntemi yardımıyla ortogonalleştirilmesi ile elde edilen vektörleri sütun kabul eden matristir. Öteyandan $R = Q^T A$ olduğu açıktır.

ÖRNEK 7.17. *Örnek 7.15 de verilen A matrisi ve $b = [3\ 0\ 3]^T$ verilsin.*

- *$Ax = b$ denklem sisteminin çözümünün olmadığını gösteriniz.*
- *$||Ax - b||$ normunu minimum yapan $x = [x, y, z]^T$ noktasını belirleyiniz.*
- *$A^T Ax = A^T b$ sisteminin çözümünü belirleyiniz.*
- *$Rx = Q^T b$ sisteminin çözümünü belirleyiniz.*
- *MATLAB/Octave ortamında '\' operatörü ile çözüm için yaklaşım belirleyiniz.*
- *Son dört şıkta elde ettiğiniz x değerlerini karşılaştırınız. Ne gözlemliyorsunuz?*

Çözüm.

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini açıkça yazarak

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ -x + y &= 0 \\ x + 3y &= 3 \end{aligned}$$

  elde ederiz. İlk iki denklemden oluşan sistemi çözerek, $x = y = 1$ elde ederiz. Ancak elde edilen bu değerler sistemin üçüncü denklemini sağlamaz.

- $f(\mathbf{x}) = ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||^2$ ile tanımlanan f fonksiyonunu minimum yapan $\mathbf{x}$ noktası $||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||$ yi de minimum yapar. O halde daha açık bir ifadeyle

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 3)^2 + (-x + y)^2 + (x + 3y - 3)^2$$

  fonksiyonunu minimum yapan $\mathbf{x} = (x, y, z)$ noktasını belirlemeliyiz. Minimum nokta için gerek şartları

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2(x + 2y - 3) + 2(-x + y)(-1) + 2(x + 3y - 3) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2(x + 2y - 3)(2) + 2(-x + y) + 2(x + 3y - 3)(3) = 0 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 6 \\ 4x + 14y &= 15 \end{aligned} \tag{7.16}$$

olarak elde ederiz. (7.16) sistemini çözerek,

$$x = \frac{12}{13} = 0.9231, y = \frac{21}{26} = 0.8077$$

elde ederiz. Ayrıca bu noktada

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 28$$

olup,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$$

ve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 6 \times 28 - 64 = 104 > 0$$

dir ve dolaysıyla f fonksiyonu elde edilen noktada minimuma sahiptir.

- Öte yandan

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}, A^T b = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

olup,

$$A^T A\mathbf{x} = A^T b$$

denklem sistemi ile (7.16) aynıdır, ve dolayısıyla da aynı $\mathbf{x}$ çözümüne sahiptirler.

- Son olarak

$$Q^T b = \begin{bmatrix} 0.577\,35 & -0.577\,35 & 0.577\,35 \\ 0.226\,46 & 0.792\,59 & 0.566\,14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.464\,1 \\ 2.377\,8 \end{bmatrix}$$

ve

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{2}{39}\sqrt{3}\sqrt{26} \\ 0 & \frac{1}{26}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}$$

olup $R\mathbf{x} = Q^T b$ den

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= R^{-1}(Q^T b) \\ &= \begin{bmatrix} 0.923\,07 \\ 0.807\,70 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde ederiz.

- MATLAB/Octave oratmında ise

  >> x=A\b

  x =

  0.92308

  0.80769

  çözümünü elde ederiz.

- Her dört yöntemle de elde edilen sonuçlar yuvarlama hatası farkıyla aynıdır.

Ax=b sistemini QR ayrışımı yardımıyla çözen Program **??** aşağıda verilmektedir:

```
%---------------------------------------------------------
function X=qrilecoz(A,b)
%Modifiye QR ayrışımı  ile
%AX=b sistemini çözer, ec.
---------------------------

%  Q=gs(A);   %Klasik  Gram-Schmidt ile Q
  Q=modgs(A); %Modifiye Gram-Schmidt ile Q
  R=Q'*A;
  C=Q'*b;
  X=ustucgen(R,C);

%-----------------------------------------------------------
```

Program 7.11: Modifiye QR ayrışım yöntemi ile çözüm

Test:

```
>> A=[1 2;-1 1;1 3];
>> b=[3 0 3]';
>> x=qrilecoz(A,b)
x =
0.92308
0.80769
```

Sonuç 7.2.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||^2 \\ &= (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T A^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \end{aligned}$$

fonksiyonunun minimum yapan çözüm ile

$$A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$

denklem sistemi ve ayrıca

$$QR\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

denklem sisteminin çözümleri aynıdır.

TEOREM 7.1. *[11]A matrisi sütunları lineer bağımsız olan bir matris, $A_{mxn}, \mathbf{b}_{mx1}, \mathbf{x}_{nx1}$ ve $m > n$ olmak üzere, $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ sisteminin çözümü*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||^2 \\ &= (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{x}^T A^T - \mathbf{b}^T)(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T A^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \end{aligned}$$

fonksiyonunu minimum yapan çözümdür ve bu çözüm $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin Standart En Küçük Kareler Yöntemi(SEKKY) çözümü olarak adlandırılır.

İspat $\mathbf{x}$, $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ sisteminin çözümü olsun. $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ için

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \\ = \ & \mathbf{y}^T A^T A\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T A^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} - (\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T A^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b}) \\ = \ & \mathbf{y}^T A^T A\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T A^T \mathbf{b} - \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T A^T \mathbf{b} \\ = \ & \mathbf{y}^T A^T A\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T A^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} \\ = \ & (\mathbf{y} - \mathbf{x})^T A^T A(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ > \ & 0 \end{aligned}$$

dır, çünkü $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x} \neq 0$ için, A nın sütunları lineer bağımsız olduğundan $A\mathbf{z} \neq 0$ dır ve

$$\mathbf{z}^T A^T A\mathbf{z} = (A\mathbf{z})^T A\mathbf{z} = ||A\mathbf{z}||_2^2 > 0$$

elde ederiz.

TEOREM 7.2. *$A_{m\times n}$, sütunları lineer bağımsız olan bir matris ve $\mathbf{b}_{m\times 1}$ vektör olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin en küçük kareler anlamındaki çözümü ile QR ayrışımı yardımıyla elde edilen çözümler aynıdır.*

İspat $\mathbf{x}$, verilen sistemin en küçük kareler çözümü ve $A = QR$ ayrışımına sahip olsun. Bu taktirde

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

eşitliğinden

$$(QR)^T QR\mathbf{x} = (QR)^T\mathbf{b}$$

veya

$$R^T R\mathbf{x} = R^T Q^T b$$

veya R tersinir olduğundan $R\mathbf{x} = Q^T b$ elde ederiz ki bu çözüm yukarıda incelendiği üzere QR ayrışımı yardımıyla elde edilen çözümdür.

Uyarı. *QR ayrışımı, LU ayrışımına kıyasla daha fazla aritmetik işlem gerektirir(Alıştırma 19).*

Gözlem 7.3. *$A_{m\times n}(m \geq n)$ matrisinin sütunları belirgin olarak lineer bağımsız ise bu taktirde $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin çözümü için en küçük kareler yöntemi yardımıyla çözüm tercih edilirken, sütunların lineer bağımlı olmaya yakın olması durumda QR ayrışımı yardımıyla çözüm tercih edilir.*

Hatırlatma 7.3. *$A_{m\times n}$ matrisiyle aynı boyutta olan $Q_{m\times n}$ matrisi ve $R_{n\times n}$ üst üçgensel matrisi için QR ayrışımı MATLAB/Octave ortamında aşağıdaki gibi elde edilebilir:*

$>> A = [1\ 2; -1\ 1; 1\ 3]$
için
$>> [q, r] = qr(A, 0)$
komutuyla

```
q =

-0.5774  -0.2265

 0.5774  -0.7926

-0.5774  -0.5661

r =

-1.7321  -2.3094

 0       -2.9439
```

elde edilir ki bu ayrışım genelde indirgenmiş ayrışım(reduced QR decomposition) olarak adlandırılır ve bu durumda R matrisi kare matristir. Bu ayrışım yukarıda özetlediğimiz üzere Gram-Schmidt yöntemi ile elde edilebilen ayrışımdır.

Bir diğer alternatif ise

$$A_{m\times n} = Q_{m\times m} R_{m\times n}$$

olarak tanımlanan ve Q nun kare matris olduğu tam(full) ayrışımdır:

$>> [q, r] = qr(A)$

```
q =

-0.57735  -0.22646   -0.78446

 0.57735  -0.79259   -0.19612

-0.57735  -0.56614    0.58835

r =

-1.73205   -2.30940

0.00000    -2.94392
```

```
0.00000     0.00000
```

Tam ayrışım için Householder dönüşümleri[10] gibi ileri düzey dönüşümler kullanılır(Alıştırma(proje) 18). QR ayrışım yardımıyla çözüm için gerekli işlem sayısını proje olarak okuyucuya bırakıyoruz(Alıştırma(proje) 17).

Uyarı. *QR ayrışımı $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin çözümünden ziyade verilen bir A matrisinin özdeğerlerinin belirlenmesinde kullanılır.*

Alıştırmalar 7.1.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}$ *matrisi ve $b = [1 \quad -1]^T$ vektörü verilsin. Burada α keyfi sabittir. Lineer cebirsel ve geometrik açıdan*

   (a) *$\alpha \neq 6$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin tek bir çözüme sahip olduğunu gösteriniz.*

   (b) *$\alpha = 6$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözüme sahip olmadığını gösteriniz.*

2. *Soru 1 de verilen A matrisinde $\alpha = 6$ alarak ve $\mathbf{b} = [1\ 2]^T$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_ö$ biçiminde ifade edilebilen sonsuz sayıda çözümünü belirleyiniz.*

3. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

   matrisi ve $\mathbf{b} = [3\ -3\ 4]^T$ vektörü verilsin. Burada α keyfi sabittir. Lineer cebirsel ve geometrik açıdan

   (a) *$\alpha = 4$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözüme sahip olmadığını gösteriniz.*

   (b) *$\alpha \neq 4$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin tek bir çözüme sahip olduğunu gösteriniz.*

4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisi ve $\mathbf{b} = [1\ -1]^T$ *vektörü verilsin. Lineer cebirsel ve geometrik açıdan* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *denklem sisteminin tek parametreli sonsuz sayıda çözüme sahip olduğunu gösteriniz ve sistemin genel çözümünü* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_ö$ *biçiminde ifade ediniz.*

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ *matrisi ve* $b = [2\ 1\ 1]^T$ *vektörü için* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *denklem sisteminin tek parametreli sonsuz çözüme sahip olduğunu gösteriniz ve sistemin genel çözümünü* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_ö$ *biçiminde ifade ediniz.*

6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisi ve $\mathbf{b} = [2\ 5\ 11]^T$ *vektörü verilsin.*

(a) *Gauss yok etme yöntemi yardımıyla* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *denklem sistemini* $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ *üst üçgensel sistemine dönüştürerek çözümünü belirleyiniz.*

(b) $A = LU$ *ayrışımını belirleyiniz.*

(c) LU *ayrışımı yardımıyla da verilen sistemin çözümünü belirleyiniz.*

7.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin LU *ayrışımını belirleyiniz.*

8.

$$A = \begin{bmatrix} c & a & 0 \\ d & c & a \\ 0 & d & c \end{bmatrix}$$

matrisinin LU *ayrışımını belirleyiniz.*

9. *Soru 8 i*

$$A = \begin{bmatrix} c & a & 0 & 0 \\ d & c & a & 0 \\ 0 & d & c & a \\ 0 & 0 & d & c \end{bmatrix}$$

matrisi için tekrarlayınız.

10. *Aşağıda verilen kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemine ait Program7.7 ü çalıştırarak Örnek 7.14 de elde edilen sonuçları kontrol ediniz.*

    11-15 nolu sorular için

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7.00000000001 & 8.999999999999 \end{bmatrix}$$

matrisini kullanınız.

11.

    (a) ***gs*** *fonksiyon programı yardımıyla A nın ortogonalleştirilmesiyle oluşturulan Q matrisini ve Q^TQ yu hesaplayınız.*

    (b) ***gsmod*** *fonksiyon programı yardımıyla A nın ortogonalleştirilmesiyle oluşturulan Qm matrisini ve Qm^TQm i hesaplayınız.*

    (c) *MATLAB/Octave* $\mathbf{qr}$ *fonksiyonu yardımıyla $[\mathbf{q}, \mathbf{r}] = \mathbf{qr}(\mathbf{A})$ komutu ile q matrisini ve q^Tq yu hesaplayınız. Hangi yöntemle elde ettiğini matris ortogonal, yani tranposu ile kendisinin çarpımı birim matrise eşittir?*

12. *Yukarıda tanımlanan A matrisinin determinantını hesaplayınız. Determinantın mutlak değerce çok küçük olması ne ifade etmektedir?*

13. *A matrisinin 1 ve 2. satırlarının toplamının, üçüncü satıra çok yakın olduğunu gözlemleyiniz. Bu durumda matrisin satırlarının lineer bağımlılığı veya bağımsızlığı hakkında ne düşünürsünüz?*

14. *Bir A matrisinin kondisyon sayısı(condition number) $K(A) = ||A||.||A^{-1}||$ olarak tanımlanır. Sonsuz normu ile yukarıda verilen A matrisinin kondisyon sayısı hesaplayınız. Kondisyon sayısının ne ifade ettiğini araştırınız ?*

15. *Yukarıda verilen A matrisinin özdeğerlerini MATLAB/Octave* eig *komutu yardımıyla hesaplayınız. Mutlak değerce en büyük özdeğerin en küçük özdeğere oranı nedir?*

16. $\mathbf{x} = [1\ 1\ 1]^T$ *için*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6.000000000000000 \\ 15.000000000000000 \\ 21.000000000009003 \end{bmatrix}$$

olduğunu gözlemleyerek, $\mathbf{x}$ in bilinmediği varsayımıyla $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini

(a) *pivotsuz Gauss yok etme programı,*

(b) *kısmi pivotlu Gauss yok etme programı,*

(c) LU *ayrışım yöntemi,*

(d) QR *ayrışım yöntemi ve*

(e) *En Küçük Kareler Yöntemi yardımıyla çözünüz. Hangi yöntemle elde ettiğiniz sonuç problemin gerçek çözümüne daha yakındır.*

17. *(Proje) $A_{m\times n}$ matrisinin Gram-Schmidt yöntemiyle QR ayrışımı için gerekli çarpma işlem sayısını belirleyiniz ve elde ettiğiniz sonucu LU ayrışımı için gerekli çarpma işlem sayısıyla karşılaştırınız. Hangi ayrışım yöntemi daha fazla işlem gerektirmektedir?*

18. *(Proje) Householder dönüşümlerini araştırarak, bu dönüşümler yardımıyla A matrisinin tam QR ayrışımının nasıl elde edildiğini inceleyiniz.*

7.5 Yinelemeli(İteratif) yöntemler

Giriş kısmında da belirttiğimiz üzere yinelemeli yöntemler, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümünü belirleme problemini $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ olarak tanımlanan f fonksiyonunun sıfıryerini belirleme problemine dönüştürürler. Ancak f fonksiyonunun sıfıryerini belirlemek için ise önceki bölümde incelediğimiz sabit nokta iterasyon yöntemi uygulanır.

Bu amaçla akla gelen klasik iki yöntem Gauss-Jacobi ve Gauss-Seidel yöntemleridir. Öncelikle Gauss-Jacobi yöntemini inceleyelim:

7.5.1 Gauss-Jacobi yöntemi

Yöntemi 3×3 lük bir sistem üzerinde inceleyelim.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini gözönüne alalım. Matrisin köşegen üzerindeki elemanlarının sıfırdan farklı olduğunu kabul edelim. Daha açık olarak sistemi

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

olarak yazalım. Birinci denklemde x değişkenini, ikinciden y yi ve üçüncüden de z yi yanlız bırakarak $\mathbf{x} = g(\mathbf{x})$ biçiminde

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}y - a_{13}z) \\ y &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x - a_{23}z) \\ z &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x - a_{32}y) \end{aligned}$$

sabit nokta belirleme problemini elde ederiz.

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = g(\mathbf{x}^{(k)}), k = 1, 2, \cdots$$

ile tanımlan iterasyon, *Gauss-Jacobi* iterasyonu olarak bilinir. Burada $\mathbf{x}^{(1)}$ sitemin çözümü için tahmindir. Bileşen bazında yazmak gerekirse

$$\mathbf{x}^{(1)} = [x_1, y_1, z_1]^T$$

başlangıç noktası ile

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}y_k - a_{13}z_k) \\ y_{k+1} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_k - a_{23}z_k) \\ z_{k+1} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_k - a_{32}y_{k)} \end{aligned} \tag{7.17}$$

$k = 1, 2, \cdots$ elde edilir.

ÖRNEK 7.18.

$$\begin{aligned} 3x - y - z &= 2 \\ x + 4y + z &= -1 \\ x - y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

denklem sistemi versilsin. Sistemin çözümü için

$$\mathbf{x}^{(1)} = [x_1, y_1, z_1] = [1\ 1\ 1]^T$$

alarak Gauss-Jacobi yöntemiyle $x^{(2)}, x^{(3)}$ yaklaşımlarını belirleyiniz.

Çözüm.

Yukarıda belirtilen prosedürü takip ederek,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(2 + y + z) \\ y &= \frac{1}{4}(-1 - x - z) \\ z &= \frac{1}{3}(8 - x + y) \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde Gauss-Jacobi iterasyonlarını

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{1}{3}(2 + y_k + z_k) \\ y_{k+1} &= \frac{1}{4}(-1 - x_k - z_k) \\ z_{k+1} &= \frac{1}{3}(8 - x_k + y_k) \end{aligned}$$

olarak tanımlarız. Başlangıç tahminini kullanmak suretiyle

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{3}(2 + y_1 + z_1) = \frac{4}{3} \\ y_2 &= \frac{1}{4}(-1 - x_1 - z_1) = -\frac{3}{4} \\ z_2 &= \frac{1}{3}(8 - x_1 + y_1) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde $\mathbf{x}^{(2)} = [4/3 -3/4 \; 8/3]^T$ olarak elde edilir. Virgülden sonra dört basamağa kadar yuvarlatılarak sunulan yaklaşımlar aşağıdaki gibidir. Sonuçlandırma kriteri olarak

$$||\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}||_2 < 10^{-4}$$

kriterini kullanıyoruz.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{x}^{(1)} & & \mathbf{x}^{(2)} & & \mathbf{x}^{(3)} & & \mathbf{x}^{(4)} & & & & \mathbf{x}^{(17)} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} 1.3333 \\ -0.7500 \\ 2.6667 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} 1.3056 \\ -1.2500 \\ 1.9722 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} 0.9074 \\ -1.0694 \\ 1.8148 \end{bmatrix} & , & \cdots & , & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Yukarıda elde edilen yaklaşımların $[1 -1 \; 2]^T$ gerçek çözümüne yakınsadığına dikkat edelim.

ÖRNEK 7.19. *Yukarıdaki sistemin iki satırını yerdeğiştirerek elde edilen*

$$\begin{aligned} x + 4y + z &= -1 \\ 3x - y - z &= 2 \\ x - y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

sistem için yine aynı başlangıç değeri ile $x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$ yaklaşımlarını Gauss-Jacobi yöntemi yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm.

Verilen sistemi

$$\begin{aligned} x &= -1 - 4y - z \\ y &= 2 + 3x - z \\ z &= \frac{1}{3}(8 - x + y) \end{aligned}$$

olarak yazmak suretiyle,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -1 - 4y_k - z_k \\ y_{k+1} &= 2 + 3x_k - z_k \\ z_{k+1} &= \frac{1}{3}(8 - x_k + y_k) \end{aligned}$$

iterasyonunu tanımlayalım. Bu durumda Gauss-Jacobi yöntemi ile

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{x}^{(1)} & & \mathbf{x}^{(2)} & & \mathbf{x}^{(3)} & & \mathbf{x}^{(4)} & & \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 2.6667 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} -3.6667 \\ -22.6667 \\ 4.6667 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} 85 \\ -17.6667 \\ -3.6667 \end{bmatrix} & , & \cdots \end{array}$$

ıraksayan iterasyon yaklaşımlarını elde ederiz.

Örnek 7.18 için uygulanan yöntem yakınsak sonuç verirken aynı denklem sisteminin satırlarının yerdeğiştirilmesi ile elde edilen Örnek 7.19 için ıraksak bir yaklaşım elde edilmiştir. O halde akla gelen soru A matrisi üzerindeki hangi kısıtlama altında Gauss-Jacobi iterasyonları keyfi başlangıç noktası için yakınsar?

Bunun için aşağıda verilecek olan Teoremde ifade ve ispat edildiği üzere yeter şart, A matrisinin köşegen baskın olması yani her bir köşegen üzerindeki elemanın mutlak değerce aynı satırdaki diğer elemanların mutlak değerlerinin toplamından büyük olmasıdır. Eğer A matrisi köşegen baskın bir matris ise, Gauss-Jocobi iterasyonları keyfi başlangıç noktası için yakınsar. Örnek 7.18 daki katsayı matrisi köşegen baskındır:

$$3 > |-1| + |-1| \ , 4 > 1 + 1, 3 > 1 + |-1|$$

dir. Fakat Örnek 7.19 daki matris köşen baskın değildir.

Gauss-Jacobi yöntemini vektör-matris notasyonuyla da ifade edebiliriz:

A matrisi alt üçgensel, köşegen ve üst üçgensel olmak üzere üç matrisin toplamı olarak yazılmak suretiyle

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= L + D + U \end{aligned}$$

yazılmak suretiyle

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

denklem sistemi

$$D\mathbf{x} = b - (L + U)\mathbf{x}$$

veya

$$\mathbf{x} = g(\mathbf{x}) = D^{-1}\left(b - (L + U)\mathbf{x}\right)$$

olarak ifade edilen $\mathbf{x}$ sabit noktasını belirleme problemine dönüştürülebilir. Böylece Gauss-Jacobi yöntemi g nin sabit noktasını belirlemek amacıyla oluşturulan

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = g(\mathbf{x}^{(k)}) = D^{-1}\left(b - (L + U)\mathbf{x}^{(k)}\right), k = 1, 2, \cdots \tag{7.18}$$

iterasyondan oluşur.

(7.18) ile tanımlanan vektör tabanlı Gauss-Jacobi yöntemine ait Algoritma 7.7 aşağıda verilmektedir.

Algoritma 7.7 ile tanımlanan Gauss-Jacobi yöntemine ait Program 7.12 aşağıda verilmektedir.

7.5.2 Gauss-Seidel Yöntemi

Gauss-Seidel yöntemi, iterasyonların yakınsayacağı varsayımı ile x_{k+1} yaklaşımının gerçek değere x_k dan daha yakın olduğunu ve benzer biçimde y_{k+1}

Algoritma 7.7 Vektör tabanlı Gauss-Jacobi algoritması

1. Girdi: $A, b, X0$
2. $fark = 1$, $sayac = 0$, $eps = 1e-4$, döngü değişkenleri başlangıç değerleri
3. $max\_sayac = 50$, maksimum iterasyon sayısı,
4. D: A nın köşegen elemanlarını içeren köşegen matris
5. LaU: A nın köşegen dışındaki elemanlarını içeren alt matris
6. $Td = D$ nin tersi
7. $fark > eps$ ve $sayac < max\_n$ olduğu sürece
   (a) $X1 = TD * (b - LaU * X0)$
   (b) $fark = norm((X1 - X0), inf)$; maksimum hata
   (c) $X0 = X1$;
   (d) $sayac = sayac + 1$;
8. eğer $sayac = max\_sayac$ ise iterasyonun yakınsamadığı mesajını ilet
9. çıktı:$X1$

yaklaşımının gerçek değere y_k dan daha yakın olduğunu kabul ederek ilgili iterasyonlarda bu güncel değerlerin kullanılması esasına dayınır. Örnek 7.18 daki Gauss-Jacobi yerine

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \frac{1}{3}(2 + y_k + z_k) \\
y_{k+1} &= \frac{1}{4}(-1 - x_{k+1} - z_k) \\
z_{k+1} &= \frac{1}{3}(8 - x_{k+1} + y_{k+1})
\end{aligned}
$$

iterasyonu kullanılır. Buna göre Örnek 7.18 daki aynı başlangıç değeri ve aynı sonuçlandırma kriteri için

```
%------------------------------------------------------------
% Vektör Tabanlı Gauss_Jacobi yöntemi ile lineer sistem çözer.
%------------------------------------------------------------

function X1=gauss_jacobi(A,b,X0)
fark=1;
max_sayac=50;
sayac=0;
eps=1e-4;
D=diag(diag(A));
LaU=A-D;
TD=inv(D);
while fark >eps & sayac<max_sayac
      X1=TD*(b-LaU*X0)
      fark=norm(X1-X0,inf);X0=X1;
      sayac=sayac+1;
end
if sayac==max_sayac error('iterasyon yakinsamadi');
end
%------------------------------------------------------------
```

Program 7.12: Vektör tabanlı Gauss Jacobi yontemi uygulaması

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{x}^{(1)} & & \mathbf{x}^{(2)} & & \mathbf{x}^{(3)} & & \mathbf{x}^{(4)} & & \mathbf{x}^{(10)} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} 1.3333 \\ -0.8333 \\ 1.9444 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} 1.0370 \\ -0.9954 \\ 1.9892 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} 0.9979 \\ -0.9968 \\ 2.0018 \end{bmatrix} & , \quad \cdots \quad , & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

elde ederiz. Örneğimiz için Gauss-Seidel iterasyonları 10 adımda yakınsarken, Gauss-Jacobi 17 adımda yakınsamıştır.

Gauss-Jacobi yöntemine benzer, ancak $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistemi

$$(L + D)\mathbf{x} = b - U\mathbf{x}$$

biçiminde yazılmak suretiyle

$$\mathbf{x} = g(\mathbf{x}) = (L + D)^{-1} (\mathbf{b} - U\mathbf{x})$$

olarak ifade edilen $\mathbf{x}$ sabit noktasını belirleme problemine dönüştürülebilir. Böylece Gauss-Seidel yöntemi g nin sabit noktasını belirlemek amacıyla

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = g(\mathbf{x}^{(k)}) = (L+D)^{-1}\left(b - U\mathbf{x}^{(k)}\right), k = 1, 2, \cdots \tag{7.19}$$

biçiminde oluşturulan iterasyondur. Vektör tabanlı Gauss-Seidel yöntemine ait algoritma ve ilgili program Gauss-Jacobi yöntemine benzer biçimde geliştirilebilir(Alıştırma 8).

7.5.3 Yinelemeli Yöntemlerin Yakınsaklığı

TEOREM 7.3. *Eğer A matrisi satırca köşegen baskın, yani*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, m$$

ise veya sütunca köşegen baskın, yani

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{m} |a_{ji}|, i = 1, 2, \cdots, n$$

ise bu durumda hem Gauss-Jacobi ve hem de Gauss-Seidel yöntemleri ile oluşturulan iterasyon dizileri ilgili denklem sisteminin çözümüne yakınsarlar.

İspat A matrisinin satırca köşegen baskın olduğunu ve Gauss-Jacobi yönteminin yakınsak olduğunu gösterelim. (7.18) iterasyonunu

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = C\mathbf{x}^{(k)} + F \tag{7.20}$$

biçiminde yazalım. Burada

$$C = -D^{-1}(L+U), F = D^{-1}b$$

dir. $\mathbf{x}$, verilen denklem sisteminin çözümü olsun. Bu taktirde

$$A\mathbf{x} = (L+D+U)\mathbf{x} = b$$

den

$$D\mathbf{x} = b - (L+U)\mathbf{x}$$

veya

$$\mathbf{x} = D^{-1}b - D^{-1}(L+U)\mathbf{x}$$

veya

$$\mathbf{x} = C\mathbf{x} + F \tag{7.21}$$

elde ederiz.

$$E^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$$

ile $k-$ıncı adımdaki iterasyon yaklaşım hatasını gösterelim. (7.20) ve (7.21) nin taraf tarafa farkını alarak, $k-$ıncı adımdaki hata vektörü için

$$\begin{aligned} E^{(k+1)} &= CE^{(k)} \\ &= C^2E^{(k-1)} \\ &\vdots \\ &= C^kE \end{aligned}$$

elde ederiz. A köşegen baskın bir matris olduğu için $||C||_\infty < 1$ dir(Alıştırma 4). O halde

$$||E^{(k+1)}||_\infty = ||C^kE||_\infty \le ||C^k||_\infty ||E||_\infty \le ||C||_\infty^k ||E||_\infty$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} ||E^{(k+1)}||_\infty = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$$

elde ederiz.

Uyarı. *Gauss-Jacobi veya Gauss-Seidel iterasyonun yakınsaması için köşegen baskınlık kriteri sadece yeter şarttır, fakat gerek şart değildir.*

ÖRNEK 7.20.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3.2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

için Gauss-Jacobi yöntemi 100 *adımda*

$$\mathbf{x} = [0.7042, 0.1112, 0.0301]^T$$

yaklaşık çözümüne yakınsar. Yakınsama oranı olarak aşağıda tanımlanan hata oranı

$$\frac{||A\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{b}||_2}{||A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}||_2} \approx 0.9456$$

dir. Bu oran $I - D^{-1}A$ *nın mutlak değerce en büyük özdeğerinin mutlak değerine eşittir. Öte yandan Gauss-Seidel yöntemi ise* 10 *adımda*

$$\frac{||A\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{b}||_2}{||A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}||_2} \approx 0.3138$$

oranı ile

$$\mathbf{x} = [0.7011, 0.1087, 0.0272]^T$$

çözümüne yakınsar. Buna rağmen A matrisi satırca veya sütunca köşegen baskın değildir.

ÖRNEK 7.21. *Bazen Gauss-Seidel yakınsak iterasyon ürettiği halde, Gauss-Jacobi ıraksayabilir:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisi ve Örnek 7.20 deki b ve $x^{(1)}$ *vektörleri için Gauss-Seidel yöntemi* 11 *adımda*

$$\mathbf{x} = [0.6944, 0.1111, 0.0278]^T$$

çözümüne 0.3333 *hata oranı ile yakınsar. Ancak Gauss-Jacobi yöntemi yakınsamaz.*

Alıştırmalar 7.2.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \text{ matrisi ve } b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

vektörü verilsin.

1. $\mathbf{x}^{(1)} = [1\ 0\ 0]^T$ *başlangıç tahmini için* $\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$ *ve* $\mathbf{x}^{(4)}$ *yaklaşımlarını Gauss-Jacobi yöntemiyle hesaplayınız.*

2. *Soru 1 i Gauss-Seidel yöntemi ile tekrarlayınız.*

3. *Herhangi* $A_{3\times3}$ *matrisi ve* $\mathbf{b}_{3\times1}$ *vektörü için (7.17) iterasyonu ve (??) iterasyonunun denk olduğunu gözlemleyiniz.*

4. $\mathsf{A} = \mathsf{L} + \mathsf{D} + \mathsf{U}$ *köşegen baskın bir matris ve* $C = -D^{-1}(L+U)$ *ise* $||C||_\infty < 1$ *olduğunu gösteriniz.*

5. *(Bilgisayar Uygulamaları) Soru 1 de elde ettiğiniz yaklaşımları Gauss_ Jacobi programı yardımıyla da elde ediniz.*

6. *Örnek 7.18,7.19 ve 7.20 de elde edilen sonuçları Gauss_ Jacobi programı yardımıyla da kontrol ediniz.*

7. *İteratif yöntemlerde $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistemi, uygun bir tersinir B matrisi için*

$$B\mathbf{x} + (A - B)\mathbf{x} = b$$

olarak yazılır ve

$$BX^{(k+1)} = (B - A)X^{(k)} + b$$

iterasyonu tanımlanır. Özel olarak

$$A = L + D + U$$

olmak üzere

   (a) $B = D$ *olması durumunda elde edilen yöntemin Gauss-Jacobi yöntemi ve*

   (b) $B = L + D$ *olması durumunda elde edilen yöntemin ise Gauss-Seidel yöntemi olduğunu gözlemleyiniz.*

8. *Gauss_ Jacobi programını düzenleyerek Gauss_ Seidel programını geliştiriniz. Elde ettiğiniz program yardımıyla Örnek 7.20 deki yaklaşımları elde ediniz. Ayrıca Gauss-Seidel yöntemi için teorem7.3 i ispat ediniz.*

9. *Verilen bir üç köşegenli simetrik $A_{n\times n}$ matrisi için $[L, U] = lumat(A)$ komutuyla A $=LU$ ayrışımını, ayrışım elemanlarını A nın elemanları cinsinden açıkça belirlemek suretiyle hesaplayacak uygun bir algoritma ve MATLAB/Octave programı hazırlayınız.*

10. *(Proje) Thomas Algoritması: Aşağıdaki gibi tanımlanan A matrisi ve $\mathbf{d}$ vektörü verilsin*

   (a)

$$A=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & b_n \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$[A|\mathbf{d}]$ *ekli matrisini elemanter satır işlemleri yardımıyla* $[A'|\mathbf{d}']$ *ekli sistemine dönüştürünüz. Burada* $a_1 = 0, c_n = 0$ *olmak üzere,*

$$A' = \begin{bmatrix} b'_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b'_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b'_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_n \end{bmatrix}, \mathbf{d}' = \begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ \vdots \\ d'_n \end{bmatrix}$$

nın bileşenleri

$$\begin{aligned} b'_1 &= b_1 \\ d'_1 &= d_1 \\ b'_i &= b_i - \frac{a_i}{b'_{i-1}} c_{i-1}, \\ d'_i &= d_i - \frac{a_i}{b'_{i-1}} d'_{i-1}, i = 2, 3, \cdots, n \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

(b) $A'\mathbf{x} = \mathbf{d}'$ *sistemini çözerek*

$$\begin{aligned} x_n &= d'_n / b'_n, \\ x_i &= (d'_n - c_n x_{n+1})/b'_n, i = n-1, n-2, \cdots, 1 \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.

(c) *Yukarıda elde ettiğiniz algoritmayı* $X =$*thomas*(a,b,c,d) *komutu ile aynı sayıda bileşene sahip* a,b,c,d *vektörleri için çalıştıran MATLAB/Octave programı hazırlayınız.*

11. *(Proje: Modifiye Thomas)*A *matrisini*

$$\mathsf{A} = \mathsf{Ls} + \mathsf{TD} + \mathsf{Us} = \mathsf{Ls} + \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & b_n \end{bmatrix} + \mathsf{Us}$$

olarak yazınız.Burada Ls üç köşenli kısmın aşağısında yer alan elemanları içeren alt üçgensel matris ve Us ise üç köşegenli kısmın yukarısında kalan kısmı içeren üst üçgensel matristir. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistemini

$$TD\mathbf{x} + (Ls + Us)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

olarak yazarak

$$TDX^{(k+1)} = b - (Ls + Us)X^{(k)}, k = 0, 1, \cdots$$

iterasyonunu tanımlayalım. Yöntemin her adımda Thomas algoritmasını kullanmak suretiyle üç kögenli lineer sistemi çözmesi gerektiğine dikkat edelim.

(a) *Yukarıda tanımlanan algoritmayı $X = mthomas(A, \mathbf{b}, X0)$ komutuyla uygulayan bir MATLAB/Octave programı hazırlayınız.*

(b) *Yöntemin yakınsama hızını Gauss-Jacobi ve Gauss-Seidel ile karşılaştırınız.*

Kaynaklar

[1] Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1988.

[2] Coşkun, E. MATLAB/Octave ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:erhancoskun.com.tr).

[3] Coşkun, E. MATLAB/Octave Uygulamalarıyla Diferensiyel Denklemler için Sonlu Fark Yöntemleri(URL:erhancoskun.com.tr).

[4] Coşkun, E. Endüstriyel ve Uygulamalı Matematiğe Giriş(URL:erhancoskun.com.tr).

[5] Hildebrand, F. B., Introduction to Numerical Analysis, Dover Publications, Inc., 1987.

[6] Kincaid, D., Cheney, W., Numerical Analysis, Brooks/Cole, 1991.

[7] LAPACK, Linear Algebra Package,(URL:netlib.org)

[8] OCTAVE, GNU özgür yazılım(*URL:OCTAVE.sourceforge.net*).

[9] Press, H. W. ve ark., Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, 1988.

[10] Stoer, J., Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1976.

[11] Strang, G., Introduction to Applied Mathematics, Wellesley-Cambridge, 1986.