Bölüm 1

Sayısal Türev

Bu bölümde

- sonlu fark olarak bilinen yöntemlerle bir fonksiyonun herhangi bir nokta veya aralıktaki nokta kümesi üzerinde farklı yöntemlerle sayısal türevlerinin nasıl hesaplandığını,
- yöntemlerin hatalarının nasıl belirlendiğini,
- MATLAB veya Octave(kısaca MATLAB/Octave) ortamında bir nokta veya aralık içerisindeki nokta kümesi üzerinde sayısal türevlerin nasıl hesaplandığını ve
- yüksek basamaktan hata içeren yöntemlerin nasıl elde edilebileceğini inceliyoruz.

Konuyla ilgili olarak bölüm sonunda sunduğumuz ve bizim de bu dökümanı hazırlarken faydalandığımız temel kaynakları öneririz.

1.1 Sayısal türev

Öncelikle sayısal türevi anlamaya çalışalım.

TANIM 1.1. *Herhangi bir fonksiyonun tanım kümesi içerisinde bulunan bir t_i noktasındaki sayısal türevi, t_i noktası komşuluğundaki fonksiyon değerlerinin lineer bir kombinasyonu olarak ifade edilebilen ve genelde hata içeren bir türev yaklaşımıdır.*

Sayısal türev farklı lineer kombinasyonlar yardımıyla hesaplanabilir. Bir yöntemi diğerlerinden ayıran özellik, yöntemin

- hatası ve
- lineer kombinasyondaki terim sayısıdır.

Tercihen en iyi sayısal türev yöntemi,

- en az hata ve
- minumum bilgisayar kaynağı kullanarak belirtilen türev işlemini gerçekleştiren yöntemdir. Burada bilgisayar kaynağı ile bilgisayar bellek ve işlem gerçekleştirme zamanını kastediyoruz. Dolayısıyla bilgisayar kaynak kullanımı açısından tercih edilen yöntem, en az sayıda fonksiyon değeri hesaplamak suretiyle ilgili türev yaklaşımını elde eden yöntemdir.

Şimdi birinci basamaktan türev için farklı sayısal yöntemlere göz atalım.

1.2 Birinci basamaktan türev için yaklaşımlar

Bir $I = (a, b) \subset R$ açık aralığında türevlenebilir bir f fonksiyonun bu aralık içerisinde herhangi bir t noktasındaki türevinin, birbirine denk olan

$$\begin{aligned} f\prime(t) &= lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \\ &= lim_{h\to 0}\frac{f(t)-f(t-h)}{h} \\ &= lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t-h)}{2h} \end{aligned}$$

limitleri ile tanımlandığını biliyoruz. $h \to 0$ için limit işlemini kaldırmak suretiyle, h nın yeterince küçük ve pozitif değeri için elde edilen

$$\begin{aligned} f'(t) &\cong \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \\ &\cong \frac{f(t)-f(t-h)}{h} \\ &\cong \frac{f(t+h)-f(t-h)}{2h} \end{aligned}$$

yaklaşımlarından her birisi t noktasındaki birinci basamaktan türev için farklı sayısal yaklaşımdır. Bu yaklaşımları aşağıda tanımlanan bölünmüş fark notasyonu yardımıyla ifade edebiliriz.

TANIM 1.2. *f fonksiyonun a ve b noktalarındaki bölünmüş farkı*

$$f[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ile tanımlanır.

$f[a,b]$ bölünmüş farkının, $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının(kirişin) eğimi olduğuna dikkat edelim.

TANIM 1.3. *$h>0$ olmak üzere $(t, f(t)), (t+h, f(t+h))$ noktalarından geçen doğrunun eğimini, $(t, f(t))$ noktasındaki teğet doğru eğimi olarak kabul eden*

$$D_i(f,t,h) := f[t, t+h] = \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \tag{1.1}$$

yaklaşımına $f'(t)$ için ileri fark yaklaşımı adı verilmektedir. Benzer olarak, t noktası ve bu noktanın gerisinde yer alan $t-h$ noktasındaki fonksiyon değeri ile elde edilen

$$D_g(f,t,h) := f[t-h, t] = \frac{f(t)-f(t-h)}{h} \tag{1.2}$$

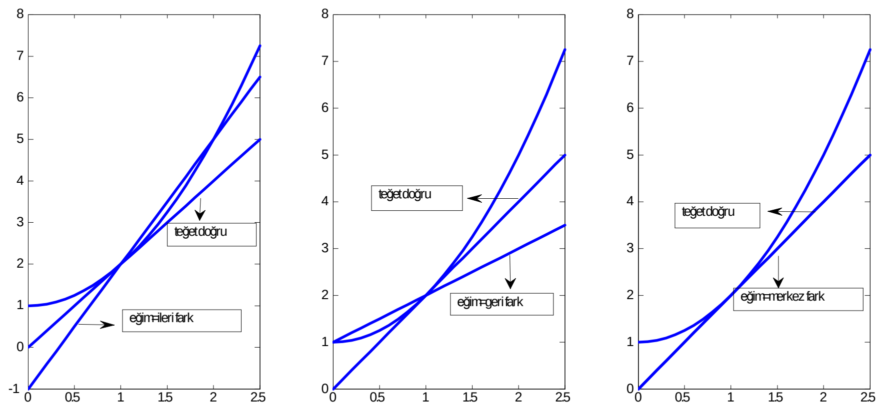
yaklaşımına $f'(t)$ için geri fark, ve t noktasını merkez kabul eden $t-h$ ve $t+h$ noktalarındaki fonksiyon değerleri ile elde edilen

$$D_m(f,t,h) := f[t-h, t+h] = \frac{f(t+h)-f(t-h)}{2h} \tag{1.3}$$

yaklaşımına ise birinci basamaktan türev için merkezi fark yaklaşımı adı verilmektedir.

ÖRNEK 1.1. *$f(t) = t^2+1$ fonksiyonun $t=1$ noktasındaki ileri fark, geri fark ve merkezi fark yaklaşımları ile elde edilen eğimlere sahip ve $(1,2)$ noktasından geçen doğrular ile aynı noktadan geçen teğet doğru grafiklerini aynı eksende çizdiriniz.*

Çözüm. *Birinci mertebeden türev için değişik yaklaşımlar ve geometrik gösterimleri Şekil 1.1 de verilmektedir.*



Şekil 1.1: Teğet doğru ve ileri fark, geri fark ve merkezi fark eğimli doğrular.

Şekil 1.1'de, $f(t) = t^2 + 1$ fonksiyonuna $t = 1$ noktasında çizilen teğet doğrular ile $t = 1$ noktasında $h = 1$ adım

uzunluğu ile oluşturulan ileri fark, geri fark ve merkezi fark yaklaşımlarını eğim kabul ederek, $(1, 2)$ noktasından geçen doğruların grafikleri görülmektedir. İleri fark ile elde edilen eğim

$$f[1, 1] = (f(2) - f(1))/1 = 3,$$

geri fark ile elde edilen eğim

$$f[0, 1] = (f(1) - f(0))/1 = 1$$

ve merkezi fark ile elde edilen eğim ise

$$f[0, 2] = (f(2) - f(0))/2 = 2$$

olarak elde edilir. Bu örnek için merkezi fark eğiminin $t = 1$ noktasında gerçek eğime eşit olduğunu gözlemleyiniz.

ÖRNEK 1.2. *$f(t) = at + b$ fonksiyonunun t_0 noktasındaki birinci basamaktan sayısal türevini h adım uzunluğu ile ileri fark yöntemi yardımıyla hesaplayalım.*

Çözüm.

$$\begin{aligned} D_i(f,t_0,h) &= \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} \\ &= \frac{a(t_0+h)+b-a(t_0)-b}{h} \\ &= a \end{aligned}$$

dır ve bu sonuç h adım uzunluğundan bağımsız olarak doğrudur. Diğer yöntemlerle de aynı sonucu elde edebileceğimizi kontrol ediniz. Bu durumda sayısal türevde oluşan hata

$$\begin{aligned} Hata &= f'(t_0) - f[t_0,h] \\ &= a-a \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

ÖRNEK 1.3. *$f(t) = at^2$ fonksiyonunun t_0 noktasındaki birinci basamaktan sayısal türevini $h > 0$ adım uzunluğu ile ileri fark, geri fark ve merkezi fark yöntemi yardımıyla hesaplayınız. Her bir durumda oluşan hatayı hesaplayınız.*

Çözüm.

İleri fark yöntemi ile

$$\begin{aligned} D_i(f,t_0,h) &= \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} \\ &= \frac{a(t_0+h)^2-a(t_0)^2}{h} \\ &= a(h+2t_0), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Hata &= f'(t_0) - D_i(f,t_0,h) \\ &= 2at_0 - a(h+2t_0) \\ &= -ah \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Geri fark yöntemiyle

$$\begin{aligned} D_g(f,t_0,h) &= \frac{f(t_0)-f(t_0-h)}{h} \\ &= \frac{a(t_0)^2-a(t_0-h)^2}{h} \\ &= a(-h+2t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hata &= f'(t_0) - D_g(f, t_0, h) \\ &= 2at_0 - a(-h + 2t_0) \\ &= ah \end{aligned}$$

ve merkezi fark yöntemiyle ise

$$\begin{aligned} D_m(f, t_0, h) &= \frac{f(t_0 + h) - f(t_0 - h)}{2h} \\ &= \frac{a(t_0 + h)^2 - a(t_0 - h)^2}{2h} \\ &= 2at_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hata &= f'(t_0) - D_m(f, t_0, h) \\ &= 2at_0 - 2at_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde bu örnek için elde edilen sayısal türev yaklaşımları ileri fark ve geri fark yönteminde adım uzunluğuna bağlı olarak değişirken, merkezi fark yönteminde ise adım uzunluğundan bağımsızdır ve elde edilen yaklaşım aynı zamanda gerçek türev değeridir.

ÖRNEK 1.4. *$f(t) = t^3$ fonksiyonunun $t = 1$ noktasındaki türevinde oluşan hatayı $h = 0.2$ ve $h = 0.1$ adım uzunlukları için*

- ileri fark
- geri fark
- merkezi fark

yöntemi yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm.

- İleri fark yöntemi ile türev

$$\begin{aligned} D_i(f, 1, h) &= \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{(1 + h)^3 - (1)^3}{h} \\ &= h^2 + 3h + 3 \end{aligned}$$

olup, hata

$$f'(1) - D_i(f,1,h) = -(h^2 + 3h)$$

olarak elde edilir. $h = 0.2$ için hata değeri -0.64 olarak bulunur. $h = 0.1$ için ise hata değeri -0.31 olarak elde edilir. Bu değerin $h = 0.2$ için elde edilen hatanın yaklaşık olarak yarısı kadar olduğuna dikkat edelim.

- Geri fark yöntemi ile türev

$$\begin{aligned} D_g(f,1,h) &= \frac{f(1) - f(1-h)}{h} \\ &= \frac{(1)^3 - (1-h)^3}{h} \\ &= h^2 - 3h + 3 \end{aligned}$$

olup, hata

$$f'(1) - D_g(f,1,h) = -h^2 + 3h$$

olarak elde edilir. $h = 0.2$ için hata değeri 0.56 olarak bulunur. $h = 0.1$ için ise hata değeri 0.29 olarak elde edilir. Bir önceki şıkta olduğu gibi bu değer, $h = 0.2$ için elde edilen hatanın yaklaşık olarak yarısı kadardır.

- Merkezi fark yöntemi ile türev

$$\begin{aligned} D_m(f,1,h) &= \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} \\ &= \frac{(1+h)^3 - (1-h)^3}{2h} \\ &= h^2 + 3 \end{aligned}$$

olup, hata

$$f'(1) - D_m(f,1,h) = -h^2$$

elde edilir. $h = 0.2$ için hata değeri -0.04 olarak bulunur. $h = 0.1$ için ise hata değeri -0.01 olarak elde edilir. İlk şıklarda elde edilen sonuçların aksine bu değer $h = 0.2$ için elde edilen hatanın dörtte biri kadardır.

Özetle burada sunulan örnekler ve benzer diğer örnekler sonucunda

- Merkezi fark yaklaşımında oluşan hatanın mutlak değerce diğer yaklaşım hatalarından daha küçük olduğunu,
- İleri fark ve geri fark yaklaşımlarında oluşan hataların mutlak değerce birbirlerine yakın olduklarını,
- Adım uzunluğunun $h = 0.2$ den $h = 0.1$ 'e yani yarısına düşürülmesiyle, ileri fark ve geri fark yaklaşım hatalarının da yaklaşık olarak yarıya indirgendiğini,
- Merkezi fark formülünde ise adım uzunluğunun yarıya düşürülmesiyle hatanın yaklaşık olarak 4 kat azaldığını gözlemliyoruz.

ÖRNEK 1.5. *Satır fonksiyonu(inline function) olarak tanımlanan bir f fonksiyonunun, verilen bir noktadaki sayısal türevini verilen bir adım uzunluğu ile ileri fark, geri fark ve merkezi fark yöntemi ile hesaplayan MATLAB/OCTAVE programı geliştiriniz.*

Çözüm.

Programımızı sturev olarak adlandıralım:

```
%-------------------------------------------------------
 function sonuc=sturev(f,a,h)
    ilerifark=(f(a+h)-f(a))/h;
    merkezifark=(f(a+h)-f(a-h))/(2*h);
    gerifark=(f(a)-f(a-h))/h;
    sonuc=[ilerifark,merkezifark,gerifark];
 end
%-------------------------------------------------------
```

Program 1.1: Farklıyöntemlerle sayısal türev

Program 1.1'i çalıştırmak için öncelikle f fonksiyonunu tanımlayalım: f fonksiyonunu iki farklı şekilde tanımlayabiliriz. Birincisi aşağıda görüldüğü gibi inline fonksiyonu yardımıyla

```
>> f=inline('t^2')
f =
 Inline function:
```

```
f(t) = t^2
```

Alternatif olarak f fonksiyonunu "anonim fonksiyon" olarak '@' sembolü ile

```
>> f=@(t) t^2
```

biçiminde de tanımlayabiliriz. Burada `@(t)` terimi `f` nin `t` bağımsız değişkenin fonksiyonu olduğunu ifade etmektedir.

```
>> sonuc=sturev(f,1,0.1)
sonuc =
 2.1000 2.0000 1.9000
```

elde ederiz.

Türev için elde edilen değişik yaklaşımlardan hangisinin kullanılacağına karar verirken dikkat ettiğimiz kriterlerden birisi ve belki de en önemlisi, yöntem ile elde edilen sonuç ile gerçek değer arasındaki fark, yani hatadır. Genelde gerçek türev değeri elimizde olmayacağı için bir sonlu fark yönteminde her bir noktada oluşacak olan hatayı tam olarak belirlemek mümkün olmadığı gibi, gerekli de değildir. Fakat verilen bir yöntemde oluşan hatanın, adım uzunluğunun hangi dereceden polinomuyla kıyaslanabileceğini belirlemek mümkündür. Söz konusu kıyaslama işlemi O(*büyük* O olarak okunur) notasyonu yardımıyla gerçekleştirilebilir. Şimdi büyük O notasyonunu kısaca tanıyalım.

1.3 O(Büyük O) notasyonu

O notasyonu, belirli bir noktanın komşuluğunda verilen bir fonksiyonun değişim hızını daha sade biçimde ifade edilen elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade etmek için kullanılır.

TANIM 1.4. *$t = a$ noktası komşuluğunda tanımlı f ve g fonksiyonları için eğer $\lim_{t\to a} (f(t))/(g(t)) = sabit \neq 0$ ise bu taktirde $f(t)$ fonksiyonuna, $t = a$ noktası komşuluğunda $g - inci$ basamaktandır denir. Bu durum $f(t) = O(g(t)), t \to a$ gösterimi ile ifade edilir ve $f(t)$ büyük O $g(t)$ diye okunur.*

Yukarıdaki tanımda $a = \infty$ olması durumunda, bu noktanın komşuluğu olarak yeterince büyük $c > 0$ için (c, ∞) aralığı alınır.

ÖRNEK 1.6. *O(büyük o) notasyonunun kullanımına ilişkin olarak aşağıdaki örnekleri inceleyelim.*

- $sin(t) = O(t), t \to 0$ dır, çünkü

$$lim_{t\to 0}(sin(t))/t = 1 \neq 0$$

dır. Bu durumda $t = 0$ noktası komşuluğunda $sin(t)$ fonksiyonu t fonksiyonu ile benzer davranış gösterir(diğer bir deyimle, değişim hızları arasında lineer bir ilişki söz konusudur).

-

$$3t^2 + 3t + 2 = O(t^2), t \to \infty \text{ çünkü } lim_{t\to\infty}((3t^2 + 3t + 2))/t^2 = 3 \neq 0$$

dir.

-

$$3t^2 + 3t + 2 = O(1), t \to 0 \text{ çünkü } lim_{t\to 0}((3t^2 + 3t + 2))/1 = 2 \neq 0.$$

-

$$\begin{aligned} sinh(t) &= 1/2(e^t - e^{-t}) = 1/2(e^t) - 1/2(e^{-t}) \\ &= 1/2(1 + t + t^2/2! + t^3/3! \ldots) \\ &\quad -1/2(1 - t + t^2/2! - t^3/3! \ldots) \\ &= t + t^3/3! - \ldots \\ &= O(t), t \to 0 \end{aligned}$$

Benzer biçimde

-

$$cos(t) = O(1), t \to 0$$

ve

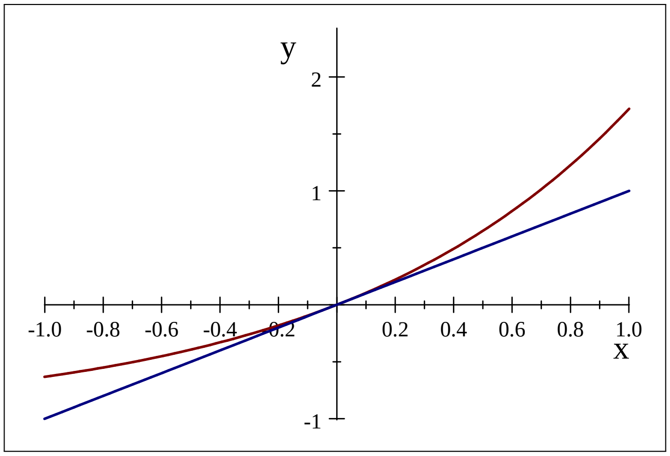
-

$$e^t - 1 = O(t), t \to 0$$

fakat

$$e^t - 1 \neq O(t), t \to \infty$$

dır.



Şekil 1.2: Sıfır noktası komşuluğunda $f(t) = e^t - 1$ ve $g(t) = t$ fonksiyonları

Özetle büyük O notasyonu yardımıyla bir fonksiyonun bir nokta komşuluğundaki davranışı daha basit fonksiyonlarla(örneğin $t^n, n \in Z$) ifade edilmektedir. Örneğin

$$lim_{t\to 0}(e^t - 1)/t = 1$$

olup, büyük O notasyonu ile

$$e^t - 1 = O(t), t \to 0$$

ile sıfır noktasının yeterince küçük komşuluğunda $e^t - 1 \cong t$ alınabileceğini anlıyoruz. Sıfır noktası komşuluğunda $f(t) = e^t - 1$ ve $g(t) = t$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 1.2'de görülmektedir.

Büyük O notasyon kullanımını daha iyi kavrayabilmek için aşağıda verilen ifadeleri yakından inceleyelim:

- $3t = O(t), t \to 0,$
- $3t + 2t^2 = O(t), t \to 0,$
- $3t + 2t^2 = O(t^2), t \to \infty,$
- $e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3), t \to 0,$
- $2\cos(t) = O(1), t \to 0,$
- $tan(x) = O(x), x \to 0,$

- $tan(x) = x + O(x^3), x \to 0,$
- $x + x^2/2 + x^3/5 = x + O(x^2), x \to 0,$
- $x\sin(x) = O(x^2), x \to 0$

1.4 Sayısal türev yaklaşım hataları

TEOREM 1.1. *$f \in C^2[a,b]$ ve küçük bir pozitif h sabiti için, t ve $t+h \in (a,b)$ olsun. Bu taktirde*

$$f'(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} + O(h), h- > 0$$

dır.

İspat.

Taylor teoreminden

$$f(t+h) = f(t) + hf\prime(t) + h^2 f''(c)/2$$

bağıntısı sağlanacak biçimde $c \in (a,b)$ sabiti mevcuttur. Bu bağıntıdan

$$f\prime(t) = (f(t+h) - f(t))/h - hf''(c)/2$$

elde edilir. $f \in C^2[a,b]$ olduğundan f'' fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlıdır ve dolayısıyla

$$-hf''(c)/2 = O(h), h- > 0$$

dır.

İleri fark yöntemi ile türev yaklaşımında oluşan

$$f\prime(t) - (f(t+h) - f(t))/h = -h/2f''(c)$$

olarak elde edilen **hata** terimine yakından bakalım:

- Hata terimi bize ileri fark yöntemiyle $f(t) = at + b$ ile verilen lineer fonksiyonların türevinin hatasız olarak hesaplayacağını açıkça ifade etmektedir.

- Yine hata terimi, adım uzunluğu h yerine $h/2$ alınması durumunda hatanın yaklaşık olarak h ile oluşan hatanın yarısı kadar olacağını ifade etmektedir.

- Fonksiyonun dışbükey olduğu ($f'' > 0$) noktalarda hata, yani gerçek türev değeri ile fark yaklaşımı ile elde edilen değer arasındaki fark, negatiftir. Diğer bir deyimle, fark yaklaşımı gerçek değerden büyüktür. Fonksiyonun içbükey olduğu bölgede ise tersi durum söz konusudur.

- Son olarak hata terimi, fonksiyonunu ikinci türevinin mutlak değerce büyük değerler aldığı noktalarda iyi sonuç elde edebilmek için adım uzunluğunun çok küçük olması gerektiğini ifade etmektedir.

Benzer biçimde geri fark yaklaşımı için de hatanın aynı basamaktan, yani $O(h)$ olduğu(Alıştırma 5) ve merkezi fark yaklaşımı için ise $O(h^2)$ olduğu(Alıştırma 7) gösterilebilir.

Merkezi fark yaklaşımında oluşan hata, mutlak değerce ve genelde, ileri fark ve geri fark yaklaşımlarına göre daha küçüktür. Merkezi fark yaklaşımı daha iyi bir yaklaşım olmasına rağmen diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde bu yaklaşım yerine bazen ileri fark bazen de geri fark yaklaşımlarının kullanılması daha uygundur.

1.5 Aralık üzerinde sayısal türev(ileri, geri ve merkezi fark yaklaşımları)

$[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı bir $y = f(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu aralıkta aralarındaki uzaklıkları $h = (b-a)/n$ olan n adet alt aralığın uç noktaları

$$t_i = a + (i-1)h, i = 1, 2, \cdots, n+1$$

dir. Bu uç noktaları

$$T = [t_1, t_2, \cdots, t_n, t_{n+1}]$$

vektörü ile gösterelim. T nin elemanlarına karşılık gelen fonksiyon değerlerinin bileşen kabul eden vektörü ise

$$f(T) = [f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n)]$$

ile gösterelim.

- $T = [\ t_1, \cdots, t_n]$ noktalarında ileri fark yöntemiyle türev için yaklaşım

$$\mathsf{D}_i(f, T, h) = \frac{f(T+h) - f(T)}{h} \tag{1.4}$$

olarak tanımlanır.Burada $T + h$ ile T vektörünün her bir elemanına h skalerinin ilave edilmesiyle elde edilen

$$\begin{aligned} T + h \quad : &= [t_1 + h, t_2 + h, \cdots, t_n + h] \\ &= [t_2, t_3, \cdots, t_{n+1}] \end{aligned}$$

vektörünü ifade ediyoruz.

- $T = [\ t_2, \cdots, t_n, t_{n+1}]$ noktalarında geri fark yöntemiyle türev için yaklaşım

$$D_g(f, T, h) = \frac{f(T) - f(T-h)}{h} \tag{1.5}$$

olarak tanımlanır.

Uyarı. *1.4 ve 1.5 yöntemleri karşılaştırıldığında, her ikisi de sonuç olarak aynı indisel notasyona sahip gözükmekte olsa bile 1.4 formülasyonunun $T = [\ t_1, \cdots, t_n]$ noktalarında ve 1.5 notasyonunun ise $T = [\ t_2, \cdots, t_n, t_{n+1}]$ noktalarında tanımlı olduğuna dikkat ediniz. Diğer bir değimle, t_1 noktasında ileri fark yöntemine göre sayısal türev ile t_2 noktasında geri fark yöntemine göre sayısal türev aynıdır.*

- t_1 ve t_{n+1} noktaları arasında kalan $T = [\ t_2, \cdots, t_n]$ **iç noktalarında** merkezi fark yöntemiyle türev için yaklaşım

$$D_m(f, T, h) = \frac{f(T+h) - f(T-h)}{2h} \tag{1.6}$$

olarak tanımlanır.

ÖRNEK 1.7. $f(t) = t^3, t \in [-1, 1]$, $h = 0.2$ *adım uzunluğu ile belirtilen T noktalarında birinci türev için ileri fark ve merkezi fark yaklaşımı, gerçek türev değeri ve her noktada oluşan hatayı hesaplayarak tablo halinde sunalım.*

Çözüm.

Verilen adım uzunluğu ile oluşan alt aralık sayısı

$$h = (b-a)/n = 2/n = 0.2 \Rightarrow n = 10$$

dur. Bu durumda nokta sayısı ise $n+1 = 11$ adet olup, alt aralık uç noktaları

$$t_i = a + (i-1)h = -1 + (i-1)0.2, i = 1, 2, \cdots, 11$$

.olarak tanımlanır. Uç noktalar vektörü

$$T = [-1, -0.8, -0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]$$

olup, ileri fark yöntemi ile yaklaşımlar ilk 10 noktada, merkezi fark yöntemi ile ise ilk ve son nokta dışındaki noktalarda hesaplanmaktadır.

İleri Fark				Merkezi Fark	
T	Türev	Yaklaşım	Hata	Yaklaşım	Hata
0.0000	0.0000	0.0400	0.0400	0.0400	-0.0400
0.2000	0.1200	0.2800	-0.1600	0.1600	-0.0400
0.4000	0.4800	0.7600	-0.2800	0.5200	-0.0400
0.6000	1.0800	1.4800	-0.4000	1.1200	-0.0400
0.8000	1.9200	2.4400	-0.5200	1.9600	-0.0400

Tablo 1.1: Örnek 1.7 için bazı İleri Fark ve Merkezi Fark yaklaşımları

$f(t) = t^3$ fonksiyonu, $t < 0$ için iç bükey ve $t > 0$ için ise dış bükeydir. Özetle

- İleri fark yönteminde hatanın işareti yukarıda belirtildiği üzere iç bükey bölgede pozitif ve dış bükey bölgede ise negatiftir.
- Sıfır noktasından uzaklaştıkça ikinci türev değerinin büyümesine bağlı olarak ileri fark yöntemine göre hatanın mutlak değerce artmaktadır.
- Merkezi fark yaklaşımında hatanın, türevi hesaplanan fonksiyonun üçüncü türevini içerdiğini(Alıştırma 7) biliyoruz. Göz önüne aldığımız örnekte fonksiyonun üçüncü türevi sabit olduğu için hata formülü bu durumda gerçek hatayı da vermektedir.

$$(-h^2 f'''(c)/6 = -h^2 = -(0.2)^2 = -0.04)$$

- Merkezi fark yaklaşımı üçüncü türevi sıfıra eşit olan iki veya daha düşük dereceli polinomların türevini hatasız olarak hesaplar.

ÖRNEK 1.8. *f fonksiyonu ve gerçek türevi ile $[\mathsf{a}, \mathsf{b}]$ aralığı ve bu aralıkta kullanılması istenilen alt aralık sayısını(n) kullanıcıdan alarak, birinci türev için ileri fark, geri fark ve merkezi fark yaklaşımı ile gerçek türev değerini hesaplayan programı hazırlayalım*

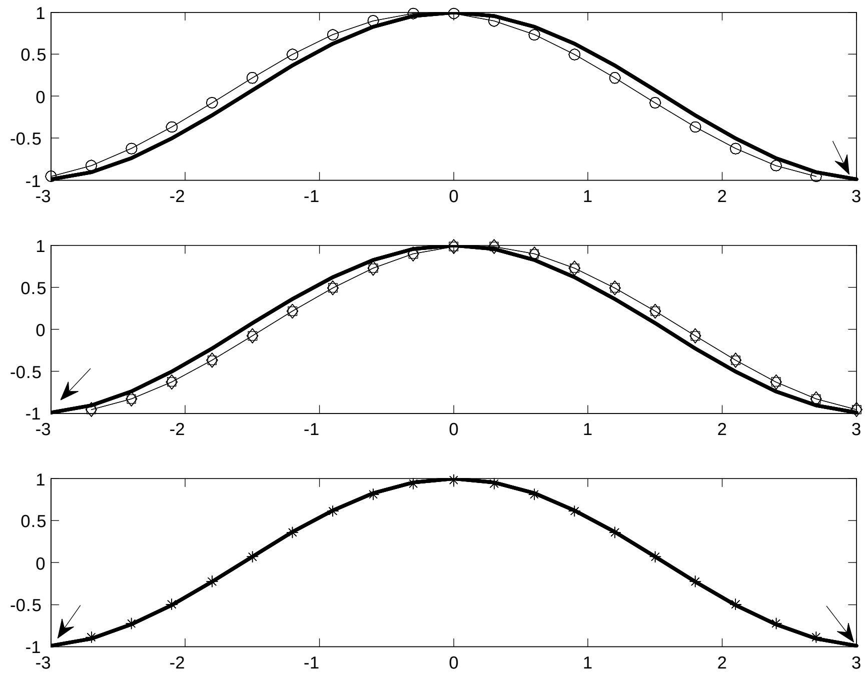
Örnekte belirtilen işlemler Program 1.2 ile gerçekleştirilmiştir. Ayrıca

```
%-------------------------------------------------------
function asturev(f,df,a,b,n)
 h=(b-a)/n;
 T=a:h:b;
 Ti=T(1:n);
 Tg=T(2:end);
 Tm=T(2:n);
 ifark=(f(Ti+h)-f(Ti))/h;
 mfark=(f(Tm+h)-f(Tm-h))/(2*h);
 gfark=(f(Tg)-f(Tg-h))/h;
  subplot(3,1,1);
  plot(Ti,ifark,'-o');hold on; plot(T,df(T),'-r','linewidth',2);
  subplot(3,1,2);
  plot(Tg,gfark,'-d'); hold on; plot(T,df(T),'-r','linewidth',2);
  subplot(3,1,3);
  plot(Tm,mfark,'-*'); hold on; plot(T,df(T),'-r','linewidth',2);
%------------------------------------------------------------
```

Program 1.2: Gerçek türev ile farklıyöntemlerle aralık üzerinde sayısal türev

>> f=@(t) sin(t)
>> df=@(t) cos(t)
ile
>>asturev(f,df,-3,3,20)
komutu ile elde edilen sonuçlar Şekil 1.3 de sunulmaktadır.

Şekilde oklarla belirtildiği üzere İleri fark yöntemi ile sayısal türevin aralığın sağ uzunda, geri fark ile hesaplanan sayısal türevin aralığın sol ucunda ve merkezi fark ile hesaplanan türevin ise aralığın uç noktalarında hesaplanmadığına dikkat ediniz.



Şekil 1.3: İleri fark(o), geri fark(kare) ve merkezi fark(*) yaklaşımları ile gerçek türev(-)

Alıştırmalar 1.1.

1. *Aşağıda verilen fonksiyonların karşılarında verilen noktalardaki sayısal türevlerini ileri fark yöntemi ve $h = 0.1$ adım uzunluğu ile hesaplayınız.*

   - $f(t) = \sin(t), t = 1$
   - $f(t) = \ln(t), t = 1$
   - $f(t) = e^{2t}, t = 0$

2. *Soru 1 de verilen fonksiyonların gerçek türevlerini de karşılarında verilen noktalarda hesaplayınız.*

3. *Soru 1 de elde ettiğiniz sayısal türev değerleri ile Soru 2 de elde ettiğiniz sayısal türev değerlerinin farkı ile oluşturacağınız sayısal türev hata değerlerini hesaplayınız.*

4. *Soru* $1-3$*'ü* $h = 0.05$ *için tekrarlayınız. Elde ettiğiniz yeni hata değerleri ile* $h = 0.1$ *için elde ettiğiniz hata değerlerini karşılaştırınız. Adım uzunluğunu ikiye bölmek suretiyle elde ettiğiniz yaklaşımlarda oluşan hata değerleri, önceki değerlerin yaklaşık olarak ne kadarıdır. Elde ettiğiniz sonuç hatanın* $O(h)$ *büyüklüğünde olması ile uyumlu mudur?*

5. *(Birinci basamaktan türev için geri fark yaklaşımı)* $f \in C^2[a,b]$ *ve küçük pozitif* h *sabiti için,* t *ve* $t-h \in (a,b)$ *olsun. Bu taktirde*

$$f\prime(t) = (f(t) - f(t-h))/h + O(h), h \to 0$$

olduğunu gösteriniz.

6. *Soru* $1-4$*'ü geri fark yaklaşımı için tekrar ediniz.*

7. *(Birinci basamaktan türev için merkezi fark yaklaşımı)* $f \in C^3[a,b]$ *ve küçük pozitif* h *sabiti için,* $t-h, t+h \in (a,b)$ *olsun. Bu taktirde*

$$\begin{aligned} f\prime(t) &= (f(t+h) - f(t-h))/2h + O(h^2), \\ O(h^2) &= -h^2/6f'''(c), h \to 0, c \in (a,b) \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.

8. *Soru* $1-4$*'ü merkezi fark yaklaşımı için tekrar ediniz. Elde ettiğiniz sonuçlar hataların* $O(h^2)$ *büyüklüğünde olması ile uyumlu mudur?*

Alıştırmalar 1.2. *(Bilgisayar destekli alıştırmalar)*

1. $f(t) = sin(t)$ *fonksiyonunun ileri fark yöntemine göre birinci basmaktan sayısal türevini* $[-2,2]$ *aralığını* 10 *adet alt aralığa bölerek elde edilen alt aralık uç noktalarında hesaplayarak, gerçek ve sayısal türevin grafiğini aynı ekranda çizdiriniz.*

2. *Yukarıda verilen aralığı* 20 *adet alt aralığa bölerek her bir noktada oluşan hatanın yaklaşık olarak kaç kat azaldığını gözlemlemeye çalışınız.*

3. $t = 2$ *noktasında oluşan hatanın kaç kat azaldığını hesaplayınız.*

4. *Elde ettiğiniz sonuç yöntemin hata tahmini ile uyumlu mu?*

5. *Soru* $1-4$*'ü geri fark yöntemi için tekrar ediniz.*

6. *Soru* $1-4$*'ü merkezi fark yöntemi için tekrar ediniz.*

1.6 İkinci türev ve merkezi fark yaklaşımı

İkinci türev için genellikle kullanılan sonlu fark yaklaşımı merkezi fark yaklaşımıdır. Yaklaşım formülü ve hata terimi aşağıdaki gibidir:

TEOREM 1.2. *Teorem (İkinci basamaktan türev için merkezi fark yaklaşımı) $f \in C^4[a,b]$ ve küçük pozitif h sabiti için, $t-h$ ve $t+h \in (a,b)$ olsun. Bu taktirde*

$$f''(t) = (f(t+h) - 2f(t) + f(t-h))/h^2 + O(h^2), h -> 0$$

dır.

İspat: Taylor teoreminden

$$f(t+h) - f(t) = hf'(t) + h^2 f''(t)/2 + h^3 f'''(t)/6 + h^4 f^{(iv)}(c_1)/24, c_1 \in (a,b)$$

$$f(t-h) - f(t) = -hf'(t) + h^2 f''(t)/2 - h^3 f'''(t)/3! + h^4 f^{(iv)}(c_2)/24, c_2 \in (a,b)$$

Açılımları taraf tarafa toplanarak düzenlenirse,

$$f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) = h^2 f''(t) + h^4/12((f^{(iv)}(c_1) + f^{(iv)}(c_2))/2), \quad (1.7)$$

$c_1, c_2 \in (a,b)$ elde ederiz. Sürekli fonksiyonlar için ara değer teoreminden

$$f^{(iv)}(c) = ((f^{(iv)}(c_1) + f^{(iv)}(c_2))/2)$$

bağıntısı sağlanacak biçimde (a,b) aralığında bir c elemanı mevcuttur.

O halde (1.7) denkleminin her iki yanı h^2 ile bölünürse,

$$(f(t+h) - 2f(t) + f(t-h))/h^2 = f''(t) + h^2/12(f^{(iv)}(c))$$

veya

$$f''(t) = (f(t+h) - 2f(t) + f(t-h))/h^2 + O(h^2), h -> 0$$

elde ederiz.

Tanım kümesi içerindeki bir t noktasında f fonksiyonunun ikinci basamaktan merkezi fark yöntemiyle sayısal türevi

$$D2(f,t,h) := \frac{f(t+h) - 2f(t) + f(t-h)}{h^2} \quad (1.8)$$

olarak tanımlanır.

ÖRNEK 1.9. *$f(t) = cos(t)$ fonksiyonunun $t = \pi/4$ noktasındaki ikinci türev yaklaşımını ve yaklaşım hatalarını $h = 0.2$ ve $h = 0.1$ adım uzunlukları için hesaplayalım.*

Çözüm.

Belirtilen h değerleri için elde edilen yaklaşımlar ve hataları aşağıdaki tabloda verilmektedir:

$h = 0.2$			$h = 0.1$	
t_i	Yaklaşım	Hata($h = 0.2$)	Yaklaşım	Hata($h = 0.1$)
$\pi/4$	$-\ 0.7048$	$-\ 0.0024$	-0.7066	$-\ 5.89E - 04$

$$Hata(h = 0.2)/Hata(h = 0.1) = 4.074$$

olup, bu sonuç Teorem 1.2 ile elde edilen $O(h^2)$ teorik hatasını doğrulamaktadır: adım uzunluğu ikiye bölününce hata dört kat azalmaktadır.

Alıştırmalar 1.3.

1. *Aşağıda verilen fonksiyonların karşılarında verilen noktalardaki ikinci basamaktan sayısal türevlerini merkezi fark yöntemi ve $h = 0.1$ adım uzunluğu ile hesaplayınız.*

   - $f(t) = \sin(t), t = 1$
   - $f(t) = \ln(t), t = 1$
   - $f(t) = e^{2t}, t = 0$

2. *Soru 1'de verilen fonksiyonların karşılarında verilen noktalardaki ikinci basamaktan türevlerini(gerçek) hesaplayınız.*

3. *Soru 1 ve 2'deki sonuçlarınızı karşılaştırarak, sayısal türev işleminde oluşan hataları hesaplayınız.*

4. *Soru $1 - 3$'ü $h = 0.05$ adım uzunluğu ile tekrar ediniz. Elde ettiğiniz yeni hata değerlerini $h = 0.1$ için elde ettiğiniz hata değerleri ile karşılaştırınız. Gözlemleriniz hatanın $O(h^2)$ büyüklüğünde olması ile uyumlu mudur?*

5. *İkinci basamaktan türev için merkezi fark formülü ile, birinci basamaktan türev için ileri ve geri fark formülleri arasında aşağıdaki bağıntıların mevcut olduğunu gözlemleyiniz:*

$$D_2(f,t,h) = (D_g o D_i)(f,t,h) = (D_i o D_g)(f,t,h)$$

6. $f(t) = sin(t)$ *fonksiyonunun merkezi fark yöntemine göre ikinci basamaktan sayısal türevini* $[0,1]$ *aralığını* 10 *adet alt aralığa bölerek elde edilen alt aralık uç noktalarında hesaplayınız. Gerçek ve sayısal türev farkını hesaplayınız.*

7. *Yukarıda verilen aralığı 20 adet alt aralığa bölerek her bir noktada oluşan hatanın yaklaşık olarak kaç kat azaldığını gözlemlemeye çalışınız.*

8. $t = 1/2$ *noktasında oluşan hatanın kaç kat azaldığını hesaplayınız.*

9. *Elde ettiğiniz sonuç yöntemin hata tahmini ile uyumlu mudur?*

10. *Soru* $1-4$*'ü* $f(t) = \cos(t)$ *fonksiyonu için tekrar ediniz.*

1.7 Proje çalışmaları

1. (Birinci basamaktan türev için merkezi fark formülü için farklı bir yaklaşım)

   f fonksiyonunun t_i noktasındaki birinci mertebeden türevi için ileri fark yöntemi $(t_i, f_i), (t_{i+1}, f_{i+1})$ noktalarından geçen kirişin eğimini yaklaşım olarak kullandığını biliyoruz, burada $f_i = f(t_i)$ dir. Benzer olarak geri fark yaklaşımı $(t_{i-1}, f_{i-1}), (t_i, f_i)$ noktaları; merkezi fark yaklaşımı ise $(t_{i-1}, f_{i-1}), (t_{i+1}, f_{i+1})$ noktalarından geçen kirişin eğimini t_i noktasındaki türev için yaklaşım kabul etmektedir. Bu noktada aklımıza şu soru gelebilir: Belirtilen noktalardan geçen kirişin eğimini kullanmak yerine, söz konusu noktalardan geçen parabolün t_i noktasındaki eğiminin bu noktadaki türev için yaklaşım olarak kabulü daha iyi sonuç vermez mi?

   Ancak parabol için üç nokta çiftine ihtiyacımız olacaktır. Örneğin apsisleri arasındaki uzaklığı h ya eşit olan (t_{i-1}, f_{i-1}), (t_i, f_i) , (t_{i+1}, f_{i+1}) nokta çiftlerini göz önüne alalım. Newton formülü yardımıyla bu noktalardan geçen ikinci dereceden polinomun

$$P(t) = f_{i-1} + f[t_{i-1}, t_i](t - t_{i-1}) + f[t_{i-1}, t_i, t_{i+1}](t - t_{i-1})(t - t_i)$$

olarak verildiğini hatırlayalım. Burada

$$f[t_{i-1}, t_i] = (f_i - f_{i-1})/h$$

$$f[t_{i-1}, t_i, t_{i+1}] = (f[t_i, t_{i+1}] - f[t_{i-1}, t_i])/2h = (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})/(2h^2)$$

Newton bölünmüş farklarıdır. Bu değerler yukarıda verilen $P(t)$ ifadesinde yerine yazarak

$$P(t) = f_{i-1}+(f_i-f_{i-1})/h(t-t_i)+(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})/(2h^2)(t-t_{i-1})(t-t_i)$$

elde ediniz. Buradan

$$P'(t_i) = (f_{i+1} - f_{i-1})/2h$$

olduğunu gösteriniz.

Ancak bu eğimi $f'(t_i)$ için yaklaşım olarak kullandığımızda merkezi fark yaklaşımını elde ederiz!

O halde merkezi fark yaklaşımının (t_{i-1}, f_{i-1}), (t_{i+1}, f_{i+1}) noktalarından geçen kirişin eğimini, fonksiyonun t_i noktasındaki teğetinin eğimine yaklaşım olarak almak suretiyle, aynı zamanda (t_{i-1}, f_{i-1}), (t_i, f_i) , (t_{i+1}, f_{i+1}) noktalarından geçen ikinci dereceden polinomun t_i noktasındaki türevini fonksiyonun bu noktadaki türevi için bir yaklaşım olarak kabul ettiğini görüyoruz.

Sonuç olarak eğer türevini hesaplamak istediğimiz fonksiyon ikinci dereceden polinom olsaydı, merkezi fark yaklaşımı ile fonksiyon türevini neden hatasız olarak hesaplayabileceğimizi de görmüş olduk. Bu sonucu şüphesiz hata formülünden de elde edebiliriz. Çünkü hata, f fonksiyonunun üçüncü mertebeden türevini içermektededir.

2. (Birinci basamaktan türev için yüksek basamaktan hata içeren formül arayışı)

   Birinci basamaktan türev için daha yüksek basamaktan hata içeren türev yaklaşım arayışımızı sürdürelim:

   a, b, c, d ve e sabitleri h adım uzunluğuna bağlı olmak üzere

$$D(f, t_i) = af_{i-2} + bf_{i-1} + cf_i + df_{i+1} + ef_{i+2} = f'(t_i) \qquad (1.9)$$

şeklinde ifade edilebilen bir türev formülü arayalım. Elde edeceğimiz formülün $f(t) = 1, t, t^2, t^3, t^4$ fonksiyonlarının herhangi bir t_i noktasındaki türevlerini doğru hesaplamasını istiyoruz. Kolaylık olsun diye $t_i = 0$ alalım. Bu durumda eşit aralıklı noktalarımız

$$t_{i-2} = -2h, t_{i-1} = -h, t_i = 0, t_{i+1} = h, t_{i+2} = 2h$$

dır.

- Yukarıda verilen fonksiyonların $t_i = 0$ noktasındaki birinci basamaktan türevlerinin doğru hesaplanması gerekliliğinden hareketle, çözülmesi gereken denklem sisteminin

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e &= 0 \\ -2a-b+d+2e &= 1/h \\ 4a+b+d+4e &= 0 \\ -8a-b+d+8e &= 0 \\ 16a+b+d+16e &= 0 \end{aligned}$$

olduğunu belirleyiniz.

- Yukarıdaki denklem sistemini çözerek türev yaklaşım katsayıların

$$a = \frac{1}{12}h, b = \frac{-2}{3}h, c = 0, d = \frac{2}{3}h, e = -\frac{1}{12}h$$

olduğunu gösteriniz. Böylece türev yaklaşımımız

$$D(f, t_i) = (1/12 f_{i-2} - 2/3 f_{i-1} + 2/3 f_{i+1} - 1/12 f_{i+2})/h$$

olarak elde edilir.

- $f \in C^m[a, b]$ ve $t - 2h, t - h, t, t + h, t + 2h \in (a, b)$ olmak üzere türev yaklaşım hatası

$$f'(t) - D(f, t) = C_1 f^{(m)}(c) h^n, c \in (a, b)$$

olacak biçimdeki pozitif m ve n tamsayılarını belirleyiniz.

- Yukarıda elde ettiğiniz yöntemin $f(t) = 1, t, t^2, t^3, t^4$ fonksiyonlarının türevlerini herhangi $h > 0$ adım uzunluğu ile hata yapmaksızın hesapladığını gösteriniz.

3. (Proje II deki fark formülü için farklı bir yaklaşım)

   - $(t_{i-2}, f_{i-2}), (t_{i-1}, f_{i-1}), (t_i, f_i), (t_{i+1}, f_{i+1}), (t_{i+2}, f_{i+2})$ noktalarından geçen interpolasyon polinomunu belirleyiniz.(Yardım: Eşit aralıklı veriler için Newton formülünü kullanınız.)
   - II. Projede belirtilen

     $$f\prime(t) \cong 1/h(1/12f_{i-2} - 2/3f_{i-1} + 2/3f_{i+1} - 1/12f_{i+2})$$

     yaklaşımının yukarıda belirlediğiniz polinomun t_i noktasındaki türevine eşit olduğunu gösteriniz.

4. (II. basamaktan Türev için Yüksek basamaktan yaklaşım arayışı) İkinci basamktan türev için daha yüksek basamaktan hata terimi içeren arayışımızı sürdürelim:

   - a, b, c, d ve e sabitleri h adım uzunluğuna bağlı sabitler olmak üzere

     $$D2(f, t_i) = af_{i-2} + bf_{i-1} + cf_i + df_{i+1} + ef_{i+2} = f''(t_i)$$

     şeklinde ifade edilebilen bir türev formülü arayalım. Elde edeceğimiz formülün $f(t) = 1, t, t^2, t^3, t^4$ fonksiyonlarının herhangi bir t_i noktasındaki türevlerini doğru hesaplamasını istiyoruz. Kolaylık olsun diye $t_i = 0$ alalım. Bu durumda eşit aralıklı noktalarımız

     $$t_{i-2} = -2h, t_{i-1} = -h, t_i = 0, t_{i+1} = h, t_{i+2} = 2h$$

     dır.
   - Yukarıda verilen f fonksiyonlarının $t_i = 0$ noktasındaki türevlerinin doğru hesaplanması gerekliliğinden hareketle, çözülmesi gereken denklem sisteminin

     $$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= 0 \\ -2a - b + d + 2e &= 0 \\ 4a + b + d + 4e &= 2/h^2 \\ -8a - b + d + 8e &= 0 \\ 16a + b + d + 16e &= 0 \end{aligned}$$

     olduğunu belirleyiniz.

- Yukarıdaki denklem sistemini çözerek türev yaklaşım katsayıları

  $$a = -1/12h^2, b = 4/3h^2, c = -5/2h^2, d = 4/3h^2, e = -1/12h^2$$

  olduğunu gösteriniz. Böylece türev yaklaşımımız

  $$D2(f,t) = (-1/12f_{i-2} + 4/3f_{i-1} - 5/2f_i + 2/3f_{i+1} - 1/12f_{i+2})/h^2$$

  olarak elde edilir.
- $f \in C^m[a,b]$ ve $t-2h, t-h, t, t+h, t+2h \in (a,b)$ olmak üzere türev yaklaşım hatasının

  $$f''(t) - D2(f,t) = C_1 f^{(m)}(c)h^n, c \in (a,b)$$

  olacak biçimdeki pozitif m ve n pozitif tamsayılarını belirleyiniz.

5. a, b, c, d ve e sabitleri h adım uzunluğuna bağlı sabitler olmak üzere üçüncü basamaktan türev için

   $$D3(f, t_i, h) = af_{i-2} + bf_{i-1} + cf_i + df_{i+1} + ef_{i+2} = f'''(t_i)$$

   şeklinde ifade edilebilen bir türev formülü arayınız. Elde ettiğiniz yaklaşımın basamağı nedir?

6. a, b, c, d ve e sabitleri h adım uzunluğuna bağlı sabitler olmak üzere dördüncü basamaktan türev için

   $$D4(f, t_i, h) = af_{i-2} + bf_{i-1} + cf_i + df_{i+1} + ef_{i+2} = f^{(iv)}(t_i)$$

   şeklinde ifade edilebilen bir türev formülü arayınız. Elde etttiğiniz yaklaşımın basamağı nedir?

Kaynaklar

[1] Sewell, G., The numerical solution of Ordinary and Partial Differential Equations, Academic Press., 1988.

[2] MATLAB/Octave ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:erhancoskun.com.tr).

[3] Coşkun, E. Maxima ile Sembolik Hesaplama ve Kodlama(URL:erhancoskun.com.tr).

[4] Coşkun, E. Diferensiyel Denklemler için Sonlu Fark Yöntemleri(URL:erhancoskun.com.tr).

[5] Richtmyer, R.,Morton, K.W, Difference methods for initial value problems, Interscience publishers, 1967.

[6] Milne, W. E., Numerical solution of differential equations, Dover publications, 1970.

[7] Smith, G. D., Numerical solution of partial differential equations, Oxford University Press, 2005.

[8] Byrne, G. D., Schiesser, W. E., Recent developments in numerical methods and software for ODEs/DAEs/PDEs.