Leontief input-output Modeli

Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Şubat, 2020

Leontief Input-Output Modeli

- Wassily Leontief

Leontief Input-Output Modeli

- Wassily Leontief
- (1906-1999) Rus asıllı Amerikalı ekonomist

Leontief Input-Output Modeli

- Wassily Leontief
- (1906-1999) Rus asıllı Amerikalı ekonomist
- Nobel Ekonomi Ödül (1973)

Leontief Input-Output Modeli

- Wassily Leontief
- (1906-1999) Rus asıllı Amerikalı ekonomist
- Nobel Ekonomi Ödül (1973)
- https://tr.wikipedia.org/wiki/Wassily_Leontief

Leontief Input-Output Modeli

- Ülke ekonomisinin farklı sektörlerini dikkate alıyor

Leontief Input-Output Modeli

- Ülke ekonomisinin farklı sektörlerini dikkate alıyor
- Her bir sektörde birim değer üretimin diğer sektörlerden kullandığı miktarları esas alarak

Leontief Input-Output Modeli

- Ülke ekonomisinin farklı sektörlerini dikkate alıyor
- Her bir sektörde birim değer üretimin diğer sektörlerden kullandığı miktarları esas alarak
- İç tüketimi hesaplıyor ve

Leontief Input-Output Modeli

- Ülke ekonomisinin farklı sektörlerini dikkate alıyor
- Her bir sektörde birim değer üretimin diğer sektörlerden kullandığı miktarları esas alarak
- İç tüketimi hesaplıyor ve
- İç tüketim çıktıktan sonra dış talebi karşılayacak biçimde her bir sektörün üretmesi gereken miktarı belirlemeyi amaçlıyor,

Leontief Input-Output Model örneği

- Sadece tarım ve sanayiden oluşan iki sektörlü basit bir ekonomi gözönüne alalım.

Leontief Input-Output Model örneği

- Sadece tarım ve sanayiden oluşan iki sektörlü basit bir ekonomi gözönüne alalım.
- Tarım sektöründeki 1 birim değerindeki üretimin

Leontief Input-Output Model örneği

- Sadece tarım ve sanayiden oluşan iki sektörlü basit bir ekonomi gözönüne alalım.
- Tarım sektöründeki 1 birim değerindeki üretimin
- tarım sektörünün kendisinden 0.2 birim

Leontief Input-Output Model örneği

- Sadece tarım ve sanayiden oluşan iki sektörlü basit bir ekonomi gözönüne alalım.
- Tarım sektöründeki 1 birim değerindeki üretimin
- tarım sektörünün kendisinden 0.2 birim
- sanayi sektöründen ise 0.3 birimlik ürüne ihtiyaç duyduğunu kabul edelim .

- sanayi sektöründeki 1 birim değerindeki üretimin ise

- sanayi sektöründeki 1 birim değerindeki üretimin ise
- tarım sektöründen 0.3 ve

- sanayi sektöründeki 1 birim değerindeki üretimin ise
- tarım sektöründen 0.3 ve
- sanayi sektöründen ise 0.4 birimlik ürüne ihtiyaç duyduğunu kabul edelim.

Leontief Input-Output Model örneği

- Bu verileri aşağıdaki Tabloda sunalım:

Leontief Input-Output Model örneği

- Bu verileri aşağıdaki Tabloda sunalım:
-

		1 birim değerindeki tarımsal(T) üretim(output) için
		T
Gerekli(input) Tarım $\longrightarrow$	T	0.2
Gerekli(input) Sanayi	S	0.3

- 1 birim değerindeki sanayi(S) üretim için

		S
Gerekli Tarım→	T	0.3
Gerekli Sanayi	S	0.4

Leontief Input-Output Model örneği

- Bu iki tabloyu birleştirerek

Leontief Input-Output Model örneği

- Bu iki tablonu birleştirerek
-

		1 birim değerindeki üretim için	
		T	S
Gerekli Tarım	T	0.2	0.3
Gerekli Sanayi	S	0.3	0.4

Leontief Input-Output Model örneği

- Tablodaki verileri içeren

Leontief Input-Output Model örneği

- Tablodaki verileri içeren
- $$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

  matrisine tüketim-üretim matrisi adı verilmektedir.

Leontief Input-Output Model örneği

- Şimdi 46 birimlik tarım ve 12 birimlik sanayi dış ürün talebinin olduğunu kabul edelim.

Leontief Input-Output Model örneği

- Şimdi 46 birimlik tarım ve 12 birimlik sanayi dış ürün talebinin olduğunu kabul edelim.
- Bu verileri içeren

$$D = \begin{bmatrix} 46 \\ 12 \end{bmatrix}$$

vektörüne dış talep vektörü adı verilmektedir.

Leontief Input-Output Model örneği

- Problemimiz, iç tüketimi karşıladıktan sonra dış talebi de karşılayacak olan tarım ve sanayi üretim miktarlarını belirlemektir.

Leontief Input-Output Model örneği

- Problemimiz, iç tüketimi karşıladıktan sonra dış talebi de karşılayacak olan tarım ve sanayi üretim miktarlarını belirlemektir.
- Problemi matematiksel platforma taşımaya çalışalım:

Leontief Input-Output Model örneği

- Problemimiz, iç tüketimi karşıladıktan sonra dış talebi de karşılayacak olan tarım ve sanayi üretim miktarlarını belirlemektir.
- Problemi matematiksel platforma taşımaya çalışalım:
- $x-$ile üretilmesi gereken tarımsal ürün miktarını ve

Leontief Input-Output Model örneği

- Problemimiz, iç tüketimi karşıladıktan sonra dış talebi de karşılayacak olan tarım ve sanayi üretim miktarlarını belirlemektir.
- Problemi matematiksel platforma taşımaya çalışalım:
- $x-$ile üretilmesi gereken tarımsal ürün miktarını ve
- $y-$ile de sanayi ürün miktarını gösterelim.

- Problemimiz, iç tüketimi karşıladıktan sonra dış talebi de karşılayacak olan tarım ve sanayi üretim miktarlarını belirlemektir.
- Problemi matematiksel platforma taşımaya çalışalım:
- $x-$ile üretilmesi gereken tarımsal ürün miktarını ve
- $y-$ile de sanayi ürün miktarını gösterelim.
- Belirtilen miktardaki üretimlerin öncelikle tarım sektöründen ne kadar bir ürün talep ettiğini belirleyelim:

Leontief Input-Output Model örneği

- 1 birim değerindeki tarımsal üretim 0.2 birimlik tarımsal ürüne ihtiyaç duyduğuna göre,

Leontief Input-Output Model örneği

- 1 birim değerindeki tarımsal üretim 0.2 birimlik tarımsal ürüne ihtiyaç duyduğuna göre,
- x birimlik tarımsal üretim $0.2x$ birimlik tarımsal ürüne ihtiyaç duyar.

Leontief Input-Output Model örneği

- 1 birim değerindeki tarımsal üretim 0.2 birimlik tarımsal ürüne ihtiyaç duyduğuna göre,
- x birimlik tarımsal üretim $0.2x$ birimlik tarımsal ürüne ihtiyaç duyar.
- Benzer biçimde,

Leontief Input-Output Model örneği

- 1 birim değerindeki tarımsal üretim 0.2 birimlik tarımsal ürüne ihtiyaç duyduğuna göre,
- x birimlik tarımsal üretim $0.2x$ birimlik tarımsal ürüne ihtiyaç duyar.
- Benzer biçimde,
- 1 birim değerindeki sanayi üretimi 0.3 birimlik tarımsal ürüne ihtiyaç duyduğuna göre,

Leontief Input-Output Model örneği

- 1 birim değerindeki tarımsal üretim 0.2 birimlik tarımsal ürüne ihtiyaç duyduğuna göre,
- x birimlik tarımsal üretim $0.2x$ birimlik tarımsal ürüne ihtiyaç duyar.
- Benzer biçimde,
- 1 birim değerindeki sanayi üretimi 0.3 birimlik tarımsal ürüne ihtiyaç duyduğuna göre,
- y birimlik sanayi üretimi $0.3y$ birimlik tarımsal ürüne ihtiyaç duyar.

Leontief Input-Output Model örneği

- O halde bu üretim için gerekli tarımsal ürün miktarı

$$0.2x + 0.3y \tag{1}$$

kadardır.

Leontief Input-Output Model örneği

- O halde bu üretim için gerekli tarımsal ürün miktarı

$$0.2x + 0.3y \tag{1}$$

kadardır.

- Benzer biçimde söz konusu üretim için gerekli sanayi ürün miktarı

$$0.3x + 0.4y \tag{2}$$

kadardır.

Leontief Input-Output Model örneği

- $$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Leontief Input-Output Model örneği

- $$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
- üretim vektörü olmak üzere, toplam tarımsal ve sanayi iç tüketimini vektörel formatta

Leontief Input-Output Model örneği

- $$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
- üretim vektörü olmak üzere, toplam tarımsal ve sanayi iç tüketimini vektörel formatta
- $$\begin{bmatrix} 0.2x + 0.3y \\ 0.3x + 0.4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = AX$$

Leontief Input-Output Model örneği

- $$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
- üretim vektörü olmak üzere, toplam tarımsal ve sanayi iç tüketimini vektörel formatta
- $$\begin{bmatrix} 0.2x + 0.3y \\ 0.3x + 0.4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = AX$$
- Üretilen miktardan iç tüketimi çıkardıktan sonra geriye kalan kısım dış talebe eşit olmalıdır:
$$X - AX = D$$

Leontief Input-Output Model örneği

- veya

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  birim matrisi ile,

Leontief Input-Output Model örneği

- veya

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  birim matrisi ile,

- $$(I - A)X = D$$

  elde ederiz.

Leontief Input-Output Model örneği

- veya

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

birim matrisi ile,

- $$(I - A)X = D$$

elde ederiz.

- Örneğimiz için

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Leontief Input-Output Model örneği

- Çözülmesi gereken sistem

Leontief Input-Output Model örneği

- Çözülmesi gereken sistem
- $$\begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Leontief Input-Output Model örneği

- Çözülmesi gereken sistem
- $$\begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 \\ 12 \end{bmatrix}$$
- veya sistemin her iki yanını da 10 ile çarparak,

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 460 \\ 120 \end{bmatrix}$$

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- $AX = b(A_{n\times n}, X_{n\times 1}, b_{n\times 1})$ lineer denklem sistemi için Gauss eliminasyon yöntemini hatırlayalım:

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- $AX = b(A_{n\times n}, X_{n\times 1}, b_{n\times 1})$ lineer denklem sistemi için Gauss eliminasyon yöntemini hatırlayalım:
- Elemanter satır operasyonları ile bu sistem

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- $AX = b(A_{n\times n}, X_{n\times 1}, b_{n\times 1})$ lineer denklem sistemi için Gauss eliminasyon yöntemini hatırlayalım:
- Elemanter satır operasyonları ile bu sistem
- U bir üst üçgensel matris olmak üzere,

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- $AX = b(A_{n\times n}, X_{n\times 1}, b_{n\times 1})$ lineer denklem sistemi için Gauss eliminasyon yöntemini hatırlayalım:
- Elemanter satır operasyonları ile bu sistem
- U bir üst üçgensel matris olmak üzere,
- $$UX = c$$

  biçiminde bir lineer sistemine dönüştürülür.

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- Üç adet elemanter elemanter satır işlemi ise aşağıdaki gibidir:

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- Üç adet elemanter elemanter satır işlemi ise aşağıdaki gibidir:
- herhangi bir satır sıfırdan farklı bir sabitle çarpılabilir.

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- Üç adet elemanter elemanter satır işlemi ise aşağıdaki gibidir:
- herhangi bir satır sıfırdan farklı bir sabitle çarpılabilir.
- herhangi iki satır yer değiştirebilir.

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- Üç adet elemanter elemanter satır işlemi ise aşağıdaki gibidir:
- herhangi bir satır sıfırdan farklı bir sabitle çarpılabilir.
- herhangi iki satır yer değiştirebilir.
- herhangi bir satır sıfırdan farklı bir sabitle çarpılarak diğer satıra ilave edilebilir.

- Buna göre ekli matris

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- Buna göre ekli matris
-

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -3 & 460 \\ -3 & 6 & 120 \end{array}\right] \quad 3/8 \times S_1 + S_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -3 & 460 \\ 0 & 39/8 & 585/2 \end{array}\right]$$

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- Buna göre ekli matris
- $$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -3 & 460 \\ -3 & 6 & 120 \end{array}\right] \; 3/8 \times S_1 + S_2$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -3 & 460 \\ 0 & 39/8 & 585/2 \end{array}\right]$$
- O halde üst üçgensel sistem
$$\begin{aligned} 8x - 3y &= 460 \\ 39/8y &= 585/2 \end{aligned}$$
olarak elde edilir

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- Buna göre ekli matris
- $$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -3 & 460 \\ -3 & 6 & 120 \end{array}\right] \quad 3/8 \times S_1 + S_2$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -3 & 460 \\ 0 & 39/8 & 585/2 \end{array}\right]$$
- O halde üst üçgensel sistem
$$\begin{aligned} 8x - 3y &= 460 \\ 39/8y &= 585/2 \end{aligned}$$
olarak elde edilir
- Bu sistemi çözerek
$$x = 80, \;\; y = 60$$

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- Bu değerler belirtilen dış talebi karşılayabilmek için sırasıyla üretilmesi gereken tarım ve sanayi ürün miktarlarıdır.

- Bu değerler belirtilen dış talebi karşılayabilmek için sırasıyla üretilmesi gereken tarım ve sanayi ürün miktarlarıdır.
- iç tüketim=toplam üretim-dış talep bağıntısından

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- Bu değerler belirtilen dış talebi karşılayabilmek için sırasıyla üretilmesi gereken tarım ve sanayi ürün miktarlarıdır.
- iç tüketim=toplam üretim-dış talep bağıntısından
- $$AX = X - D = \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 46 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 48 \end{bmatrix}$$

  birim değerinde olduğunu elde ederiz.

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- Bu değerler belirtilen dış talebi karşılayabilmek için sırasıyla üretilmesi gereken tarım ve sanayi ürün miktarlarıdır.
- iç tüketim=toplam üretim-dış talep bağıntısından
- $$AX = X - D = \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 46 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 48 \end{bmatrix}$$

  birim değerinde olduğunu elde ederiz.
- Bu örnekte pozitif bileşelere sahip bir D dış talep vektörü için yine pozitif bileşenlere sahip tek bir X üretim vektörü belirlemiş bulunmaktayız.

Leontief Input-Output Model(Gauss Eliminasyon)

- Bu değerler belirtilen dış talebi karşılayabilmek için sırasıyla üretilmesi gereken tarım ve sanayi ürün miktarlarıdır.
- iç tüketim=toplam üretim-dış talep bağıntısından
- $$AX = X - D = \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 46 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 48 \end{bmatrix}$$

  birim değerinde olduğunu elde ederiz.
- Bu örnekte pozitif bileşelere sahip bir D dış talep vektörü için yine pozitif bileşenlere sahip tek bir X üretim vektörü belirlemiş bulunmaktayız.
- Bu özellik her zaman doğru olmayabilir.

Çözümün varlık, teklik ve nonnegatifliği

Teorem 1

Bileşenleri nonnegatif $(a, b, c, d \geq 0)$ *olan*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrisi için eğer $a + c < 1$ *ve* $b + d < 1$ *ise bu taktirde herhangi* $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \geq 0$ *için*

$$(I - A)X = D$$

sistemini çözümü mevcut ve tektir;ayrıca çözüm nonnegatif bileşenlere sahiptir, yani $X \geq 0$ *dır. Burada* $X \geq 0$ *ile* X *vektörünün bütün bileşenlerinin nonnegatif olduğunu ifade ediyoruz.*

Çözümün varlık, teklik ve nonnegatifliği(İspat)

$$I - A = \begin{bmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1-d \end{bmatrix}$$

için

$$\det(I - A) = (1-a)(1-d) - bc$$

dir.

- Öte yandan

$$
\begin{aligned}
a + c &< 1 \\
b + d &< 1
\end{aligned}
$$

için

$$
\begin{matrix} 1 - a > c \\ 1 - d > b \end{matrix} \Rightarrow (1-a)(1-d) > bc \Longrightarrow \det(I - A) > 0
$$

elde ederiz.

- Buradan

$$X = (I - A)^{-1} D = \frac{1}{\det(I - A)} \begin{bmatrix} 1 - d & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

elde ederiz.

- Buradan

$$X = (I - A)^{-1} D = \frac{1}{\det(I - A)} \begin{bmatrix} 1 - d & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

elde ederiz.

- Bu sonuç genelleştirilebilir(Proje!)

Teorem 2.1 in varsayımlar yeterli fakat gerekli değildir!

- Teorem 2.1 in varsayımları **yeterli ancak gerekli değildir.** Bu durum aşağıdaki örnekte incelenmektedir.

  $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$ input-output matrisi ile $D = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$ dış talebini karşılayan üretimi belirleyiniz.
  A matrisi teorem 1 in şartlarını sağlamamaktadır. Çünkü ikinci sütun toplamı birden büyüktür. Buna rağmen

  $$B = I - A = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.8 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

  olmak üzere, $BX = D$ sisteminin çözümü olarak

  $$X = \begin{bmatrix} 84.6154 \\ 61.5385 \end{bmatrix}$$

  pozitif üretim vektörünü elde ederiz!

Kaynak

- Tan, S., Applied Finite Mathematics, 1999, ABD.

Kaynak

- Tan, S., Applied Finite Mathematics, 1999, ABD.
- Coşkun, E., Endüstriyel ve Uygulamalı Matematiğe Giriş,URL:erhancoskun.com.tr