Ayrık Fourier Dönüşümü

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi,
Fen Fakültesi,
Matematik Bölümü
MAT4012 Endüstriyel Matematik
Uzaktan Eğitim Ders-II
E-posta:erhan@ktu.edu.tr

9 Nisan 2020

Özet

- Bu derste bir sinyal veya matematiksel ifadesiyle bir vektörün **Ayrık(discrete) Fourier dönüşümünü** inceleyeceğiz.

Hatırlatma(Bir fonksiyonun Kompleks Fourier serisi)

- 2π peryotlu parçalı sürekli bir f fonksiyonunun, $[-\pi, \pi]$ aralığı gibi 2π uzunluklu aralık üzerinde ortogonal olan

$$\beta = \{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}, i = \sqrt{-1} \tag{1}$$

kümesinin lineer kombinasyonu olarak ve fonksiyonun sürekli olduğu x noktalarında

Hatırlatma(Bir fonksiyonun Kompleks Fourier serisi)

- 2π peryotlu parçalı sürekli bir f fonksiyonunun, $[-\pi, \pi]$ aralığı gibi 2π uzunluklu aralık üzerinde ortogonal olan

$$\beta = \{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}, i = \sqrt{-1} \tag{1}$$

kümesinin lineer kombinasyonu olarak ve fonksiyonun sürekli olduğu x noktalarında

- $$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{2}$$

biçiminde ifade edilebildiğini hatırlayalım.

Hatırlatma(Bir fonksiyonun Kompleks Fourier serisi)

- 2π peryotlu parçalı sürekli bir f fonksiyonunun, $[-\pi, \pi]$ aralığı gibi 2π uzunluklu aralık üzerinde ortogonal olan

$$\beta = \{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}, i = \sqrt{-1} \tag{1}$$

kümesinin lineer kombinasyonu olarak ve fonksiyonun sürekli olduğu x noktalarında

-

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{2}$$

biçiminde ifade edilebildiğini hatırlayalım.

- (2) ye f fonksiyonunun Fourier serisi ve c_k katsayılarına da Fourier katsayıları adı verildiğini hatırlayalım.

Hatırlatma(reel katsayılı Fourier serisi ve katsayıları)

- Kısmi Dif. uygulamalarımızda daha çok

Hatırlatma(reel katsayılı Fourier serisi ve katsayıları)

- Kısmi Dif. uygulamalarımızda daha çok
-
$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \tag{3}$$

ile verilen reel katsayılı versiyonunu kullanırız, burada

Hatırlatma(reel katsayılı Fourier serisi ve katsayıları)

- Kısmi Dif. uygulamalarımızda daha çok
- $$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \tag{3}$$

  ile verilen reel katsayılı versiyonunu kullanırız, burada
- $$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx,\ k = 0, 1, \ldots$$

  ve

Hatırlatma(reel katsayılı Fourier serisi ve katsayıları)

- Kısmi Dif. uygulamalarımızda daha çok
- $$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \tag{3}$$

  ile verilen reel katsayılı versiyonunu kullanırız, burada
- $$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 0, 1, \ldots$$

  ve
- $$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, k = 1, 2, \ldots$$

  olarak elde edilir.

Hatırlatma(reel katsayılı Fourier serisi ve katsayıları)

- Kısmi Dif. uygulamalarımızda daha çok
- $$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \tag{3}$$

  ile verilen reel katsayılı versiyonunu kullanırız, burada
- $$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 0, 1, \ldots$$

  ve
- $$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, k = 1, 2, \ldots$$

  olarak elde edilir.
- Yukarıda tanımlanan a_k, b_k katsayıları ile (2) ile verilen ifade deki c_k katsayıları arasında ilişki mevcuttur(Alıştırma 1).

Taban fonksiyonları ve ortogonalliği

- **İddia:**

$$\beta = \{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}, i = \sqrt{-1}$$

kümesi ortogonal bir kümedir.

- **İddia:**

$$\beta = \{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}, i = \sqrt{-1}$$

kümesi ortogonal bir kümedir.

- $k \neq l$ için β nın ilgili elemanlarının iç çarpımı

$$< e^{ikx}, e^{ilx} >= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx = \frac{1}{i(k-l)} e^{i(k-l)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad (4)$$

ve ayrıca

- **İddia:**

$$\beta = \{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty},\ i = \sqrt{-1}$$

kümesi ortogonal bir kümedir.

- $k \neq l$ için β nın ilgili elemanlarının iç çarpımı

$$< e^{ikx}, e^{ilx} >= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx = \frac{1}{i(k-l)} e^{i(k-l)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad (4)$$

ve ayrıca

- $$< e^{ikx}, e^{ikx} >= 2\pi \qquad (5)$$

dir.

Kompleks Fourier Katsayıları

- (2) ifadesinin her iki yanını e^{-ikx} ile çarpıp, $[-\pi, \pi]$ aralığı üzerinden integral alarak, (4) ve (5) den c_k değerlerini

Kompleks Fourier Katsayıları

- (2) ifadesinin her iki yanını e^{-ikx} ile çarpıp, $[-\pi, \pi]$ aralığı üzerinden integral alarak, (4) ve (5) den c_k değerlerini
-
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \;\; k \in Z \text{ (tamsayılar kümesi)} \qquad (6)$$

olarak elde ederiz.

- Peryodik fonksiyonlar için geçerli olan bu açılıma paralel olarak f fonksiyonun

$$\Delta x = 2\pi / N$$

aralıklı

$$x_k, k = 0, 1, ..., N - 1$$

noktalarındaki değerlerinden oluşmuş olduğunu kabul ebileceğimiz peryodik

$$f = [f_0, f_1, ..., f_{N-1}]^T$$

vektörü için de geçerlidir.

f vektörünün kompleks Fourier serisi

- Peryodik fonksiyonlar için geçerli olan bu açılıma paralel olarak f fonksiyonun
$$\Delta x = 2\pi / N$$
aralıklı
$$x_k, k = 0, 1, ..., N-1$$
noktalarındaki değerlerinden oluşmuş olduğunu kabul ebileceğimiz peryodik
$$f = [f_0, f_1, ..., f_{N-1}]^T$$
vektörü için de geçerlidir.
- Bu durumda (1) de fonksiyonlardan oluşan β taban rolünü
$$w = e^{2\pi i / N}$$
(1 in N inci primitif kökü, $w^N = 1$) olmak üzere C^N ($N-$bileşenli ve kompleks elemanlı vektör uzayı) nin bir ortogonal tabanı olan

- $$W_k = \begin{bmatrix} 1 \\ w \\ w^2 \\ \vdots \\ w^{N-1} \end{bmatrix}^k, k = 0, 1, ..., N-1 \tag{7}$$

  vektörler kümesi üstlenir, yani

f vektörünün kompleks Fourier serisi

- $$W_k = \begin{bmatrix} 1 \\ w \\ w^2 \\ \vdots \\ w^{N-1} \end{bmatrix}^k, k = 0, 1, ..., N-1 \tag{7}$$

  vektörler kümesi üstlenir, yani

- $$f = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k W_k \tag{8}$$

  elde ederiz.

Wk lar ortogonal bir kümedir.

- $k \neq l$ olmak üzere, $r = \overline{w}^k w^l$ olarak tanımlayarak

Wk lar ortogonal bir kümedir.

- $k \neq l$ olmak üzere, $r = \overline{w}^k w^l$ olarak tanımlayarak
- $$\begin{aligned} < \quad W_k, W_l >= [1 \; \overline{w}^k \; \overline{w}^{2l} ... \overline{w}^{(N-1)k}] & \begin{bmatrix} 1 \\ w^l \\ \vdots \\ w^{l(N-1)} \end{bmatrix} \\ = \quad 1 + \overline{w}^k w^l + ... + \overline{w}^{(N-1)k} w^{\ell(N-1)} \\ = \quad 1 + r + ... + r^{N-1} = \frac{1 - r^N}{1 - r} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

  elde ederiz, çünkü

Wk lar ortogonal bir kümedir.

- $k \neq l$ olmak üzere, $r = \overline{w}^k w^l$ olarak tanımlayarak
- $$\begin{aligned} < \quad W_k, W_l >= [1\ \overline{w}^k\ \overline{w}^{2l} ... \overline{w}^{(N-1)k}] \begin{bmatrix} 1 \\ w^l \\ \vdots \\ w^{l(N-1)} \end{bmatrix} \qquad (9) \\ = \quad 1 + \overline{w}^k w^l + ... + \overline{w}^{(N-1)k} w^{\ell(N-1)} \\ = \quad 1 + r + ... + r^{N-1} = \frac{1 - r^N}{1 - r} = 0 \end{aligned}$$

  elde ederiz, çünkü
- $$r^N = (\overline{w}^k w^l)^N = \overline{w}^{kN} w^{lN} = (\overline{w}^N)^k (w^N)^l = 1$$

  dir.

Wk lar ortogonal bir kümedir.

- Öteyandan

$$< W_l, W_l >= 1 + \overline{w}^l w^l + ... + \overline{w}^{(N-1)l} w^{(N-1)\ell} = N \qquad (10)$$

dir, çünkü

$$\overline{w}^l w^l = (\overline{w} w)^l = 1, ..., \overline{w}^{(N-1)l} w^{(N-1)\ell} = (\overline{w} w)^{(N-1)l} = 1.$$

Wk lar ortogonal bir kümedir.

- Öteyandan

$$< W_l, W_l >= 1 + \overline{w}^l w^l + ... + \overline{w}^{(N-1)l} w^{(N-1)\ell} = N \tag{10}$$

dir, çünkü

$$\overline{w}^l w^l = (\overline{w} w)^l = 1, ..., \overline{w}^{(N-1)l} w^{(N-1)\ell} = (\overline{w} w)^{(N-1)l} = 1.$$

- $\{W_k\}_{k=0}^{N-1}$ kümesinin ortogonalliği ve (10) yardımıyla (8) in her iki yanını $\overline{W}_k^T$ ($\overline{W}_k$ nin transpozu) ile çarparak

- $$\overline{W}_k^T f = [1 \ \overline{w}^k \ \overline{w}^{2k} ... \overline{w}^{(N-1)k}] \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} = Nc_k \qquad (11)$$

  veya

  $$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N}\overline{W}_k^T f = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j(\overline{w}^k)^j = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j(e^{-2\pi i/N})^{kj}, \qquad (12) \\ k &= 0, 1, ..., N-1 \end{aligned}$$

  elde ederiz.

Ayrık Fourier Dönüşümü

- $$c = [c_0, c_1, \cdots, c_{N-1}]^T$$

  vektörüne f nin ayrık Fourier dönüşümü adı verilir. Ayrık Fourier dönüşümü için genelde kullanılan bir özel notasyon yoktur, ancak burada biz kolaylık açısından $c = F(f)$ notasyonunu kullanacağız.

- $$c = \left[c_0, c_1, \cdots, c_{N-1}\right]^T$$

  vektörüne f nin ayrık Fourier dönüşümü adı verilir. Ayrık Fourier dönüşümü için genelde kullanılan bir özel notasyon yoktur, ancak burada biz kolaylık açısından $c = F(f)$ notasyonunu kullanacağız.
- Matris-vektör notasyonu yardımıyla da c yi ifade edebiliriz

- Bu amaçla $\{W_k\}_{k=0}^{N-1}$ kümesi yardımıyla

$$B = [W_0 \; W_1 \cdots W_{N-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & w^{(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

matrisini tanımlayalım. (11) den

Ayrık Fourier Dönüşümü

- $$\overline{B} = [\overline{W_0}\ \overline{W_1} \cdots \overline{W_{N-1}}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{w} & \cdots & \overline{w}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \overline{w}^{(N-1)} & \cdots & \overline{w}^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

  olmak üzere

- $$\overline{B} = [\overline{W_0}\ \overline{W_1} \cdots \overline{W_{N-1}}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{w} & \cdots & \overline{w}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \overline{w}^{(N-1)} & \cdots & \overline{w}^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

  olmak üzere

- $$\overline{B}f = \overline{W_0}\ f_0 + \overline{W_1} f_1 + \cdots + \overline{W_{N-1}} f_{N-1} = Nc$$

  veya

  $$c = F(f) := \frac{1}{N}\overline{B}f$$

  elde ederiz.

- Ayrıca B nin sütunlarının ortogonalliği ve (10) dan

$$B\overline{B} = NI$$

elde ederiz, burada I ise B ile aynı boyutta olan birim matristir. Dolayısıyla

$$B^{-1} = \frac{1}{N}\overline{B}$$

dir.

- Ayrıca B nin sütunlarının ortogonalliği ve (10) dan
$$B\overline{B} = NI$$
elde ederiz, burada I ise B ile aynı boyutta olan birim matristir. Dolayısıyla
$$B^{-1} = \frac{1}{N}\overline{B}$$
dir.
- O halde verilen f vektörünün ayrık Fourier dönüşümü
$$c = \frac{1}{N}\overline{B}f = B^{-1}f \tag{14}$$
ve

- Ayrıca B nin sütunlarının ortogonalliği ve (10) dan

$$B\overline{B} = NI$$

elde ederiz, burada I ise B ile aynı boyutta olan birim matristir. Dolayısıyla

$$B^{-1} = \frac{1}{N}\overline{B}$$

dir.

- O halde verilen f vektörünün ayrık Fourier dönüşümü

$$c = \frac{1}{N}\overline{B}f = B^{-1}f \tag{14}$$

ve

- c nin ayrık ters Fourier dönüşümü ise

$$f = F^{-1}(c) := Bc \tag{15}$$

dir.

Ayrık Fourier Dönüşümü

Örnek 1

$f = [1 \ \ -1]^T$ *vektörünün ayrık Fourier dönüşümünü belirleyiniz.*

$N = 2$ olup, $w = e^{2\pi i/N} = e^{\pi i} = -1$ dir. O halde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olup,

$$c = \frac{1}{N}\overline{B}f = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Ayrık Fourier Dönüşümü

Örnek 2

$f = [1\ 1\ 1\ \ -1]^T$ *vektörünün ayrık Fourier dönüşümünü belirleyiniz.*

- $N = 4$ olup, $w = e^{2\pi i/N} = e^{\pi i/2} = i$ dir. O halde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

- Dolayısıyla

$$c = F(f) = \frac{1}{N}\overline{B}f = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ (-1/2)i \\ 1/2 \\ (1/2)i \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Ayrık Fourier Dönüşümü

Alıştırma 1

1. c_k *kompleks katsayıları ile reel* a_k, b_k *katsayıları arasındaki ilişkiyi belirleyiniz.*
2. $f = [1\ 2]^T, f = [1\ -1\ 1\ 1]^T$ *vektörlerinin ayrık Fourier dönüşümlerini (14) ile belirleyiniz.*
3. *Soru 2 de elde ettiğiniz dönüşümlerinin ters Fourier dönüşümlerini (15) ile belirleyiniz.*
4. *Soru 2 ve 3 yardımıyla* f *nin* $2-$*normu ve* c *ile göstereceğimiz ayrık Fourier dönüşümünün* $2-$*normu arasında nasıl bir ilişki görüyorsunuz?*
5. $f = [f_0, f_1, ..., f_{N-1}]$ *vektörü verilsin ve* c *ile de* f *nin ayrık Fourier dönüşümünü gösterelim*$(c = \frac{1}{N}\overline{B}f)$. *Bu taktirde Parseval bağıntısı adı verilen*

$$||f||_2^2 = N||c||_2^2$$

bağıntısının geçerli olduğunu gösteriniz.

Kaynaklar

Coşkun, E., Endüstriyel ve Uygulamalı Matematiğe Giriş, URL:erhancoskun.com.tr

Strang, G., Introduction to Applied Mathematics, Wellesley Cambridge Press, ABD, 1986.