Elektronik ortamda Ayrık Fourier Dönüşümü

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi,
Fen Fakültesi,
Matematik Bölümü
MAT4012 Endüstriyel Matematik
Uzaktan Eğitim Ders-III
E-posta:erhan@ktu.edu.tr

14 Nisan 2020

Özet

- **Ayrık(discrete) Fourier dönüşümünün** elektronik ortamda nasıl gerçekleştirileceğini

Özet

- **Ayrık(discrete) Fourier dönüşümünün** elektronik ortamda nasıl gerçekleştirileceğini
  - klasik yöntem ve

Özet

- **Ayrık(discrete) Fourier dönüşümünün** elektronik ortamda nasıl gerçekleştirileceğini
  - klasik yöntem ve
  - Hızlı Fourier Dönüşüm algoritması yardımıyla inceleyeceğiz.

Hatırlatma

- $c = [f_0, f_1, \cdots, f_{N-1}]^T$ vektörünün ayrık Fourier dönüşümünü hatırlayalım.

Hatırlatma

- $c = [f_0, f_1, \cdots, f_{N-1}]^T$ vektörünün ayrık Fourier dönüşümünü hatırlayalım.
- $$w = e^{2\pi i/N},$$

Hatırlatma

- $c = [f_0, f_1, \cdots, f_{N-1}]^T$ vektörünün ayrık Fourier dönüşümünü hatırlayalım.
- $$w = e^{2\pi i/N},$$
- $B = [W_0 \;\, W_1 \cdots W_{N-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & w^{(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$ matrisi

  için

Hatırlatma

- $c = [f_0, f_1, \cdots, f_{N-1}]^T$ vektörünün ayrık Fourier dönüşümünü hatırlayalım.
- $$w = e^{2\pi i/N},$$
- $B = [W_0 \ W_1 \cdots W_{N-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & w^{(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$ matrisi

  için
- Ayrık Fourier->

$$c = F(f) = \frac{1}{N}\overline{B}f \tag{1}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Hatırlatma

- $c = [f_0, f_1, \cdots, f_{N-1}]^T$ vektörünün ayrık Fourier dönüşümünü hatırlayalım.
- $$w = e^{2\pi i/N},$$
- $B = [W_0 \; W_1 \cdots W_{N-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & w^{(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$ matrisi

  için
- Ayrık Fourier->
$$c = F(f) = \frac{1}{N}\overline{B}f \tag{1}$$
  olarak tanımlanmaktadır.
- Ters Fourier ->
$$f = Bc \tag{2}$$

Ayrık Fourier interaktif Uygulamaları

* fourier.m

```
function c=fourier(f)
f=f'; %f sutun vektörü
N=length(f);
kuvvet=0:(N-1); %kuvvet vektörü
w=exp(-2*pi*i/N); % 1 in N-inci kok
c=zeros(1,N); % donusum vektörü
for k=1:N
k_kuvvet=kuvvet*(k-1);
wk=w.^k_kuvvet; % eslenik(B) nin k-yıncı
c(k)=wk*f; %
end
```

Örnek 1

$>> f = [1 \ -1]'$ *sütun vektörünün Ayrık Fourier dönüşümünü yukarıda verilen Program yardımıyla hesaplayınız.*

$>>$ c=fourier(f)

c =

0.00000 - 0.00000i

1.00000 - 0.00000i

elde ederiz.

Ayrık Fourier interaktif Uygulamaları

Örnek 2

$>>f = [1\ 1\ 1\ -1]'$ sütun vektörünün Ayrık Fourier dönüşümünü yukarıda verilen program yardımıyla hesaplayınız.

```
>> f=[1 1 1 -1]';
>> fourier(f)
0.50000 + 0.00000i
0.00000 - 0.50000i
0.50000 + 0.00000i
-0.00000 + 0.50000i
```

Hızlı Fourier dönüşüm yöntemi

- Yukarıda ifade edilen Ayrık fourier dönüşümü B matrisinin $N \times N$ boyutunda bir matris olması durumunda N^2 adet çarpma işlemi yapılmasını gerektirir.

Hızlı Fourier dönüşüm yöntemi

- Yukarıda ifade edilen Ayrık fourier dönüşümü B matrisinin $N \times N$ boyutunda bir matris olması durumunda N^2 adet çarpma işlemi yapılmasını gerektirir.
- Bu ise çok sayıda elemana sahip olan f dizileri veya f matrisleri için çok fazla bilgisayar sistem kaynağı kullanımını gerektirir.

Hızlı Fourier dönüşüm yöntemi

- Yukarıda ifade edilen Ayrık fourier dönüşümü B matrisinin $N \times N$ boyutunda bir matris olması durumunda N^2 adet çarpma işlemi yapılmasını gerektirir.
- Bu ise çok sayıda elemana sahip olan f dizileri veya f matrisleri için çok fazla bilgisayar sistem kaynağı kullanımını gerektirir.
- Bu durumda B matrisinin özelliklerinde faydalanmak suretiyle verilen dizi alt parçalara bölünmek suretiyle ayrık Fourier dönüşümü gerçekleştirir.

Hızlı Fourier dönüşüm yöntemi

- Yukarıda ifade edilen Ayrık fourier dönüşümü B matrisinin $N \times N$ boyutunda bir matris olması durumunda N^2 adet çarpma işlemi yapılmasını gerektirir.
- Bu ise çok sayıda elemana sahip olan f dizileri veya f matrisleri için çok fazla bilgisayar sistem kaynağı kullanımını gerektirir.
- Bu durumda B matrisinin özelliklerinde faydalanmak suretiyle verilen dizi alt parçalara bölünmek suretiyle ayrık Fourier dönüşümü gerçekleştirir.
- Söz konusu yönteme *Hızlı Fourier Dönüşümü(Fast Fourier Transform)* adı verilir ve MATLAB/OCTAVE ortamında *fft()* fonksiyonu yardımıyla gerçekleştirilir.

Örnek 3

$f = [1\ 1\ 1\ -1]'$ *nin Ayrık Fourier Dönüşümünü fft programı yardımıyla hesaplayınız.*

- $>>f = [1\ 1\ 1\ -1]';$

$>>$ *fft(f)*

ans $=$
2 + 0i
0 - 2i
2 + 0i
0 + 2i

Uyarı

- *fft* ile elde ettiğimiz sonuçların, fourier programı ile elde edilenlerin 4 katı olduğuna dikkat ediniz.

Uyarı

- *fft* ile elde ettiğimiz sonuçların, fourier programı ile elde edilenlerin 4 katı olduğuna dikkat ediniz.
- Uzunluğu N olan vektör için *fft()* ile elde edilen sonuçlar, *fourier()* ile elde ettiğimiz sonucların N katına eşit olur.

Uyarı

- *fft* ile elde ettiğimiz sonuçların, fourier programı ile elde edilenlerin 4 katı olduğuna dikkat ediniz.
- Uzunluğu N olan vektör için *fft()* ile elde edilen sonuçlar, *fourier()* ile elde ettiğimiz sonucların N katına eşit olur.
- Bileşen sayısı fazla olan uygulamalar için *fft()* kullanılmalıdır.

Uyarı

- *fft* ile elde ettiğimiz sonuçların, fourier programı ile elde edilenlerin 4 katı olduğuna dikkat ediniz.
- Uzunluğu N olan vektör için *fft()* ile elde edilen sonuçlar, *fourier()* ile elde ettiğimiz sonucların N katına eşit olur.
- Bileşen sayısı fazla olan uygulamalar için *fft()* kullanılmalıdır.
- *fourier()* programını sadece yöntemin nasıl çalıştığını göstermek amacıyla inceliyoruz.

Hızlı Fourier dönüşümü

- 1967 yılında J. Cooley ve J. Tukey, B matrisinin özelliklerini inceleyerek söz konusu çarpma işleminin

Hızlı Fourier dönüşümü

- 1967 yılında J. Cooley ve J. Tukey, B matrisinin özelliklerini inceleyerek söz konusu çarpma işleminin
- $N = 2^l$ için N^2 adet çarpma işlemi yerine çok daha küçük olan $\frac{1}{2}Nl = \frac{1}{2}N\log_2(N)$ adet çarpma işlemi ile hızlı biçimde gerçekleştirilebileceğini göstermişlerdir.

Hızlı Fourier dönüşümü

- 1967 yılında J. Cooley ve J. Tukey, B matrisinin özelliklerini inceleyerek söz konusu çarpma işleminin
- $N = 2^l$ için N^2 adet çarpma işlemi yerine çok daha küçük olan $\frac{1}{2}Nl = \frac{1}{2}N\log_2(N)$ adet çarpma işlemi ile hızlı biçimde gerçekleştirilebileceğini göstermişlerdir.
- B Fourier matrisi ile hızlı çarpma işlemini gerçekleştiren bu algoritma Hızlı Fourier Algoritması olarak adlandırılmıştır.

- Hızlı Fourier algoritması, $B_{2m\times 2m}$ matrisi ile $B_{m\times m}$ matrisinin elemanları arasındaki aşağıdaki gözlemi esas alır:
- $$n = 2m \text{ için } w_n^2 = w_m, w_m = e^{2\pi i/m}$$
  dir.
- Gerçekten de
  $$w_n^2 = \left(e^{2\pi i/n}\right)^2 = e^{4\pi i/n} = e^{4\pi i/(2m)} = e^{2\pi i/m} = w_m$$
  dir.

- $N = 4$ için algoritmayı inceleyelim:$w_4 = e^{2\pi i/4} = i$,

- $N = 4$ için algoritmayı inceleyelim: $w_4 = e^{2\pi i/4} = i$,
- $$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

-
$$
\begin{aligned}
c &= F(f) \\
&= \frac{1}{4}\overline{B_4}f \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \\ f_0 - if_1 - f_2 + if_3 \\ f_0 - f_1 + f_2 - f_3 \\ f_0 + if_1 - f_2 - if_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

- $N = 2$ için $w_2 = e^{2\pi i/2} = -1,$

Hızlı Fourier Dönüşümü

- $N = 2$ için $w_2 = e^{2\pi i/2} = -1$,
- $$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

  dir.

Hızlı Fourier Dönüşümü

- $N = 2$ için $w_2 = e^{2\pi i/2} = -1$,
- $$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
  dir.
- $f' = [f_0, f_2], f'' = [f_1, f_3]$ olmak üzere f nin tek ve çift indisli terimleri ile iki alt dizi oluşturalım:

- $$y' = \overline{B_2} f' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 + f_2 \\ f_0 - f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0' \\ y_1' \end{bmatrix}$$

- $$y'' = \overline{B_2} f'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + f_3 \\ f_1 - f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0'' \\ y_1'' \end{bmatrix}$$

  tanımlayalım.

-
$$\begin{aligned} y_0 &= y_0' + (\overline{w_4})^0 y_0'' = f_0 + f_2 + f_1 + f_3, \\ y_1 &= y_1' + (\overline{w_4})^1 y_1'' = f_0 - f_2 - i(f_1 - f_3) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} y_0 &= y_0' + (\overline{w_4})^0 y_0'' = f_0 + f_2 + f_1 + f_3, \\ y_1 &= y_1' + (\overline{w_4})^1 y_1'' = f_0 - f_2 - i(f_1 - f_3) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} y_2 &= y_0' - (\overline{w_4})^0 y_0'' = f_0 + f_2 - (f_1 + f_3), \\ y_3 &= y_1' - (\overline{w_4})^1 y_1'' = f_0 - f_2 + i(f_1 - f_3) \end{aligned}$$

  olarak tanımlayalım.

Hızlı Fourier Dönüşümü

- Bu durumda

- Bu durumda
- $$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \\ f_0 - if_1 - f_2 + if_3 \\ f_0 - f_1 + f_2 - f_3 \\ f_0 + if_1 - f_2 - if_3 \end{bmatrix} = \overline{B_4} f$$

- Bu durumda
- $$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \\ f_0 - if_1 - f_2 + if_3 \\ f_0 - f_1 + f_2 - f_3 \\ f_0 + if_1 - f_2 - if_3 \end{bmatrix} = \overline{B_4} f$$
- olup,

$$c = F(f) = \frac{1}{4}\overline{B_4} f = \frac{1}{4} y$$

elde ederiz.

- Bu durumda
- $$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \\ f_0 - if_1 - f_2 + if_3 \\ f_0 - f_1 + f_2 - f_3 \\ f_0 + if_1 - f_2 - if_3 \end{bmatrix} = \overline{B_4} f$$
- olup,
  $$c = F(f) = \frac{1}{4}\overline{B_4} f = \frac{1}{4} y$$
  elde ederiz.
- Yukarıda özetlenen işlemler Hızlı Fourier yönteminin bir adımını oluşturmaktadır.

Kelebek diyagramı ile Hızlı Fourier Dönüşümü

- Öteyandan

$$\overline{B_2} f' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 + f_2 \\ f_0 - f_2 \end{bmatrix}$$

işleminin çarpma işlemi yapmaksızın gerçekleştirilebileceğine dikkat edelim

- Birinci satır f' nün bileşenler toplamı, ikinci satır ise bileşenler farkıdır.

Kelebek diyagramı ile Hızlı Fourier Dönüşümü

- Birinci satır f' nün bileşenler toplamı, ikinci satır ise bileşenler farkıdır.
- Benzer sonuç $\overline{B_2} f''$ için de geçerlidir.

Kelebek diyagramı ile Hızlı Fourier Dönüşümü

- Birinci satır f' nün bileşenler toplamı, ikinci satır ise bileşenler farkıdır.
- Benzer sonuç $\overline{B_2}f''$ için de geçerlidir.
- 16 adet çarpma işlemi ile gerçekleştirilebilen $\overline{B_4}f$ çarpımı, çarpma işlemi gerektirmeyen

Kelebek diyagramı ile Hızlı Fourier Dönüşümü

- Birinci satır f' nün bileşenler toplamı, ikinci satır ise bileşenler farkıdır.
- Benzer sonuç $\overline{B_2}f''$ için de geçerlidir.
- 16 adet çarpma işlemi ile gerçekleştirilebilen $\overline{B_4}f$ çarpımı, çarpma işlemi gerektirmeyen
- $\overline{B_2}f'$ ve $\overline{B_2}f''$ ile sadece y' ve y'' den y nin elde edilmesi için gerekli 4 adet çarpma işlemi ile gerçekleştirilmiştir.

Kelebek diyagramı ile Hızlı Fourier Dönüşümü

- Birinci satır f' nün bileşenler toplamı, ikinci satır ise bileşenler farkıdır.
- Benzer sonuç $\overline{B_2} f''$ için de geçerlidir.
- 16 adet çarpma işlemi ile gerçekleştirilebilen $\overline{B_4} f$ çarpımı, çarpma işlemi gerektirmeyen
- $\overline{B_2} f'$ ve $\overline{B_2} f''$ ile sadece y' ve y'' den y nin elde edilmesi için gerekli 4 adet çarpma işlemi ile gerçekleştirilmiştir.
- Yani $N^2 = 16$ işlem , $2^l = N = 4$ için $l = 2 = \log_2(N)$ ile $\frac{1}{2} N l = \frac{1}{2} N \log_2(N) = 4$ adet çarpma işlemi ile gerçekleştirilmiştir.

Kelebek diagramı ile Hızlı Fourier Dönüşümü

- Kelebek diagramı adı verilen diagramla, yukarıdaki işlemler aşağıdaki gibi şematik olarak gösterilebilir:

Kelebek diagramı ile Hızlı Fourier Dönüşümü

- Kelebek diagramı adı verilen diagramla, yukarıdaki işlemler aşağıdaki gibi şematik olarak gösterilebilir:
-

$$\begin{array}{lllll}
f_0 & \longrightarrow & y_0' := f_0 + f_2 & \longrightarrow & y_0 := y_0' + \overline{w_4}^0 y_0'' \\
f_2 & & y_1' := f_0 - f_2 & \longrightarrow & y_1 := y_1' + \overline{w_4}^1 y_1'' \\
f_1 & & y_0'' := f_1 + f_3 & & y_2 := y_0' - \overline{w_4}^0 y_0'' \\
f_3 & & y_1'' := f_1 - f_3 & & y_3 := y_1' - \overline{w_4}^1 y_1''
\end{array}$$

Kelebek diyagramı ile Hızlı Fourier Dönüşümü

- f nin çift ve tek indisli bileşenlere ayrıldığına dikkat edelim.

Kelebek diyagramı ile Hızlı Fourier Dönüşümü

- f nin çift ve tek indisli bileşenlere ayrıldığına dikkat edelim.
- Daha açıkça son sütundan $\overline{w_4} = -i$ için,

Kelebek diyagramı ile Hızlı Fourier Dönüşümü

- f nin çift ve tek indisli bileşenlere ayrıldığına dikkat edelim.
- Daha açıkça son sütundan $\overline{w_4} = -i$ için,
- $$\begin{aligned} y_0 &:= y_0' + \overline{w_4}^0 y_0'' = f_0 + f_2 + f_1 + f_3 && = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \\ y_1 &:= y_1' + \overline{w_4} y_1'' = f_0 - f_2 - i(f_1 - f_3) && = f_0 - if_1 - f_2 + if_3 \\ y_2 &:= y_0' - \overline{w_4}^0 y_0'' = f_0 + f_2 - (f_1 + f_3) && = f_0 - f_1 + f_2 - f_3 \\ y_3 &:= y_1' - \overline{w_4} y_1'' = f_0 - f_2 - (-i)(f_1 - f_3) && = f_0 + if_1 - f_2 - if_3 \end{aligned}$$

  elde ederiz.

- f nin çift ve tek indisli bileşenlere ayrıldığına dikkat edelim.
- Daha açıkça son sütundan $\overline{w_4} = -i$ için,
-

$$
\begin{aligned}
y_0 &:= y_0' + \overline{w_4}^0 y_0'' = f_0 + f_2 + f_1 + f_3 && = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \\
y_1 &:= y_1' + \overline{w_4} y_1'' = f_0 - f_2 - i(f_1 - f_3) && = f_0 - if_1 - f_2 + if_3 \\
y_2 &:= y_0' - \overline{w_4}^0 y_0'' = f_0 + f_2 - (f_1 + f_3) && = f_0 - f_1 + f_2 - f_3 \\
y_3 &:= y_1' - \overline{w_4} y_1'' = f_0 - f_2 - (-i)(f_1 - f_3) && = f_0 + if_1 - f_2 - if_3
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

- Buradan

$$y = \overline{B_4} f$$

ve

$$c = F(f) = \frac{1}{4}\overline{B_4} f = \frac{1}{4} y$$

olduğu kolayca görülür

Örnek 4

Kelebek diyagramı ve klasik yöntem ile $f = [1, 2, 3, 4]$ dizisinin Hızlı Fourier dönüşümünü hesaplayınız.

- Kelebek diyagramı ile

$$\begin{array}{lll}
1 & - \rightarrow & y'_0 := 1 + 3 = 4 \\
3 & \searrow & y'_1 := -2 \\
2 & & y''_0 := 6 \\
4 & \searrow & y''_1 := 2 - 4 = -2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\rightarrow & y_0 := y'_0 + \overline{w_4}^0 y''_0 = 10 \\
\rightarrow & y_1 := y'_1 + \overline{w_4}^1 y''_1 = -2 + 2i \\
\searrow & y_2 := y'_0 - \overline{w_4}^0 y''_0 = -2 \\
\searrow & y_3 := y'_1 - \overline{w_4}^1 y''_1 = -2 - 2i
\end{array}$$

için

$$c = F(f) = \frac{1}{4} y = \frac{1}{4}(10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i)$$

elde ederiz.

Kelebek diyagramı ile Hızlı Fourier Dönüşümü

- Klasik yöntemle de

- Klasik yöntemle de
- $$c = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 10 \\ -2+2i \\ -2 \\ -2-2i \end{bmatrix}$$

  elde ederiz.

Alıştırma 1

1. $f = [1, 0, 2, 1]$ *dizisi verilsin. f nin Ayrık Fourier dönüşümünü*
   - *klasik yöntem ve*
   - *kelebek diyagramı(hızlı Fourier algoritması) yardımıyla hesaplayınız.*
2. $f = [1, -1, 0, 1]$ *dizisi verilsin. f nin Ayrık Fourier dönüşümünü*
   - *klasik yöntem ve*
   - *kelebek diyagramı ile hesaplayınız.*
3. $f = [1, 0, 2, 1, 1, 2, 3, 4]$ *dizisi verilsin. f nin Ayrık Fourier dönüşümünü*
   - *klasik yöntem ve*
   - *kelebek diyagramı yardımıyla hesaplayınız, bu durumda kelebek diyagramı üç aşamalı(sütunlu) olmalıdır.*

Kaynaklar

- Coşkun, E., Endüstriyel ve Uygulamalı Matematiğe Giriş, URL:erhancoskun.com.tr
- Strang, G., Introduction to Applied Mathematics, Wellesley Cambridge Press, ABD, 1986.