İkinci basamaktan sabit katsayılı homojen denklemler ve Laplace denklemi

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi,
Kısmi Diferensiyel Denklemler
Ders-I

6 Nisan, 2020

Özet

Bu derste ikinci basamaktan

- $$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 0 \tag{1}$$

  denklemlerinin genel çözümlerini inceleyeceyiz ve özel olarak Laplace denkleminin bazı çözümlerini araştıracağız.

I. Durum

- $a = 0$ olması durumu

I. Durum

- $a = 0$ olması durumu
- Bu durumda denklem

$$bu_{xy} + cu_{yy} = (bu_x + cu_y)_y = 0 \tag{2}$$

olarak yazılır. Buradan x değişkenine göre integral alarak

$$bu_x + cu_y = f(x)$$

elde ederiz. Eğer $b = 0$ ise $(c \neq 0)$ olmak üzere $u_y = f(x)/c$ den

$$u = F(x)y + G(x)$$

elde ederiz, burada $F(x) := 1/c \int f(x)dx$.

I. Durum

- $a = 0$ olması durumu
- Bu durumda denklem

$$bu_{xy} + cu_{yy} = (bu_x + cu_y)_y = 0 \tag{2}$$

olarak yazılır. Buradan x değişkenine göre integral alarak

$$bu_x + cu_y = f(x)$$

elde ederiz. Eğer $b = 0$ ise $(c \neq 0)$ olmak üzere $u_y = f(x)/c$ den

$$u = F(x)y + G(x)$$

elde ederiz, burada $F(x) := 1/c \int f(x)dx$.

- $b \neq 0$ olması durumunda ise her iki tarafı b ye bölerek,

I. Durum

- $a = 0$ olması durumu
- Bu durumda denklem

$$bu_{xy} + cu_{yy} = (bu_x + cu_y)_y = 0 \tag{2}$$

olarak yazılır. Buradan x değişkenine göre integral alarak

$$bu_x + cu_y = f(x)$$

elde ederiz. Eğer $b = 0$ ise $(c \neq 0)$ olmak üzere $u_y = f(x)/c$ den

$$u = F(x)y + G(x)$$

elde ederiz, burada $F(x) := 1/c \int f(x)dx$.

- $b \neq 0$ olması durumunda ise her iki tarafı b ye bölerek,
- $$u_x + \frac{c}{b}u_y = f(x)/c$$

  elde ederiz.

Karakteristikler yöntemi ile genel çözüm

- $$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{b} \tag{3}$$

  denklemini sağlayan

  $$y - \frac{c}{b}x = sabit$$

  doğruları üzerinde

  $$\frac{du(x, y(x))}{dx} = u_x + u_y \frac{dy}{dx} = u_x + \frac{c}{b}u_y = f(x)/c$$

  elde ederiz. Karakteristikler üzerinde integral almak suretiyle

Karakteristikler yöntemi ile genel çözüm

- $$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{b} \tag{3}$$
  denklemini sağlayan
  $$y - \frac{c}{b}x = sabit$$
  doğruları üzerinde
  $$\frac{du(x, y(x))}{dx} = u_x + u_y \frac{dy}{dx} = u_x + \frac{c}{b} u_y = f(x)/c$$
  elde ederiz. Karakteristikler üzerinde integral almak suretiyle
- $$\begin{aligned} u &= \int f(x)/c\,dx + G(sabit) \\ &= F(x) + G(y - \frac{c}{b}x) \end{aligned}$$
  genel çözümünü elde ederiz, burada $F(x) := 1/c \int f(x)dx$ dir.

II. durum

- $a \neq 0$ ve $Delta = b^2 - 4ac \neq 0$ durumu

II. durum

- $a \neq 0$ ve $Delta = b^2 - 4ac \neq 0$ durumu
- Bu durumda $Delta = b^2 - 4ac$ diskriminantını hesaplayalım.

II. durum

- $a \neq 0$ ve $Delta = b^2 - 4ac \neq 0$ durumu
- Bu durumda $Delta = b^2 - 4ac$ diskriminantını hesaplayalım.
- Öncelikle $Delta \neq 0$,yani (1) denkleminin hiperbolik veya eliptik olduğunu kabul edelim.

II. durum

- $a \neq 0$ ve $Delta = b^2 - 4ac \neq 0$ durumu
- Bu durumda $Delta = b^2 - 4ac$ diskriminantını hesaplayalım.
- Öncelikle $Delta \neq 0$,yani (1) denkleminin hiperbolik veya eliptik olduğunu kabul edelim.
- b_1, b_2 skalerleri

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4}$$

denkleminin kökleri olmak üzere (1) denkleminin genel çözümü, keyfi F ve G fonksiyonları için

$$u = F(y + b_1x) + G(y + b_2x) \tag{5}$$

olarak elde ederiz.

III. durum

- $a \neq 0$ ve $Delta = b^2 - 4ac = 0$ durumu

III. durum

- $a \neq 0$ ve $Delta = b^2 - 4ac = 0$ durumu
- Bu durumda denklem parabolik denklemdir ve

$$b_1 = b_2 = -\frac{b}{2a}$$

olup genel çözüm keyfi F ve G fonksiyonları için

$$u = F(y - \frac{b}{2a}x)x + G(y - \frac{b}{2a}x) \tag{6}$$

olarak elde edilir.(Bknz ders notları)

Laplace denklemi

Örnek 1

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Laplace denkleminin genel çözümünü belirleyiniz. Bu denklem, $\Delta := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ *türev operatörü olmak üzere*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

biçiminde de ifade edilir.

Laplace denklemi

- $$a = 1, b = 0, c = 1$$

  olup,

  $$Delta = -4 \neq 0$$

  ve karakteristik denklem

  $$ax^2 + bx + c = x^2 + 1 = 0$$

  olup, denklemin kökleri

  $$b_1 = i, b_2 = -i$$

  dir

Laplace denklemi

- (5) den, denklemin gerektirdiği basamaktan türevleri mevcut ve sürekli olan keyfi F ve G fonksiyonları için genel çözümümüzü

$$u = F(y + ix) + G(y - ix) \tag{7}$$

olarak ifade edebiliriz.

- (5) den, denklemin gerektirdiği basamaktan türevleri mevcut ve sürekli olan keyfi F ve G fonksiyonları için genel çözümümüzü

$$u = F(y + ix) + G(y - ix) \tag{7}$$

olarak ifade edebiliriz.

- Eliptik türden olan denklemin karakteristiklerinin karakteristikleri

$$y + ix = sabit, y - ix = sabit$$

sanal doğrularıdır.

Laplace denkleminin fiziksel anlamı

- Fizikte, Laplace denklemi elektrik yük yoğunluğunun olmadığı bir ortamda Maxwell denklemlerinden birisini oluşturur ve çözümü, yani u, potansiyel fonksiyonu olarak adlandırılır ve $E = -(u_x, u_y)$ ise söz konusu ortamdaki elektrik alanını temsil eder.

Laplace denkleminin fiziksel anlamı

- Fizikte, Laplace denklemi elektrik yük yoğunluğunun olmadığı bir ortamda Maxwell denklemlerinden birisini oluşturur ve çözümü, yani u, potansiyel fonksiyonu olarak adlandırılır ve $E = -(u_x, u_y)$ ise söz konusu ortamdaki elektrik alanını temsil eder.
- Akışkanlar mekaniğinde, düşük hızda ve uygun bazı şartlarda u hız potansiyeli olarak adlandırılır ve örneğin iki boyutlu akışkan hareketinde (u_x, u_y) sırasıyla akışkanın x ve y yönündeki hızını temsil eder.

Laplace denkleminin fiziksel anlamı

- Fizikte, Laplace denklemi elektrik yük yoğunluğunun olmadığı bir ortamda Maxwell denklemlerinden birisini oluşturur ve çözümü, yani u, potansiyel fonksiyonu olarak adlandırılır ve $E = -(u_x, u_y)$ ise söz konusu ortamdaki elektrik alanını temsil eder.
- Akışkanlar mekaniğinde, düşük hızda ve uygun bazı şartlarda u hız potansiyeli olarak adlandırılır ve örneğin iki boyutlu akışkan hareketinde (u_x, u_y) sırasıyla akışkanın x ve y yönündeki hızını temsil eder.
- Statikte u yer değişmeyi temsil eder, Laplace denkleminin çözümü ile statikte yer değiştirme ve gerilme gibi ilgili fiziksel özellikler belirlenebilir.

Laplace denkleminin özel çözümleri

- Laplace denklemi kompleks fonksiyonlar terisinde de önemli rol oynar:

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

olarak tanımlanan komplek değerli fonksiyonun bir nokta komşuluğunda analitik olması(türevlenebilir ve türevi sürekli) olması için Cauchy-Rieman denklemleri olarak bilinen

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

denklemlerinin sağlanması gerektiğini hatırlayalım.

Laplace denkleminin özel çözümleri

- Laplace denklemi kompleks fonksiyonlar terisinde de önemli rol oynar:

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

olarak tanımlanan komplek değerli fonksiyonun bir nokta komşuluğunda analitik olması(türevlenebilir ve türevi sürekli) olması için Cauchy-Rieman denklemleri olarak bilinen

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

denklemlerinin sağlanması gerektiğini hatırlayalım.

- Bu durumda

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ve

$$v_{xx} + v_{yy} = 0$$

sağlanır.

Laplace denkleminin özel çözümleri

- Laplace denklemi kompleks fonksiyonlar terisinde de önemli rol oynar:

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

olarak tanımlanan komplek değerli fonksiyonun bir nokta komşuluğunda analitik olması(türevlenebilir ve türevi sürekli) olması için Cauchy-Rieman denklemleri olarak bilinen

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

denklemlerinin sağlanması gerektiğini hatırlayalım.

- Bu durumda

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ve

$$v_{xx} + v_{yy} = 0$$

sağlanır.

- Yani analitik bir fonksiyonun hem reel ve hem de sanal kısmı Laplace denkleminin çözümüdür.

Bazı analitik fonksiyonlar

- Analitik fonksiyon denilince aklımıza gelen örneklerden bazıları

$$z^n, n \geq 0, \sin(z), \cos(z), e^z,$$

dirler.

Bazı analitik fonksiyonlar

- Analitik fonksiyon denilince aklımıza gelen örneklerden bazıları

$$z^n, n \geq 0, \sin(z), \cos(z), e^z,$$

  dirler.
- O halde bu fonksiyonların reel ve sanal kısımları Laplace denkleminin çözümleridir:

Bazı analitik fonksiyonlar

- Analitik fonksiyon denilince aklımıza gelen örneklerden bazıları

$$z^n, n \geq 0, \sin(z), \cos(z), e^z,$$

dirler.

- O halde bu fonksiyonların reel ve sanal kısımları Laplace denkleminin çözümleridir:
- Örneğin

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

olup

$$\begin{aligned} u &= reel(f) = x^2 - y^2, \\ v &= sanal(f) = 2xy \end{aligned}$$

fonksiyonları Laplace denkleminin çözümleridir.

Laplace denkleminin özel çözümleri

- Bu çözümler (7) ile verilen genel çözümde uygun F ve G ile elde edilebilir: Örneğin $F(z) = G(z) = z^2/2$ için

$$\begin{aligned} & F(x+iy) + G(x-iy) \\ = \; & \frac{(x+iy)^2}{2} + \frac{(x-iy)^2}{2} \\ = \; & x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Laplace denkleminin özel çözümleri

- Bu çözümler (7) ile verilen genel çözümde uygun F ve G ile elde edilebilir: Örneğin $F(z) = G(z) = z^2/2$ için

$$\begin{aligned} & F(x+iy) + G(x-iy) \\ = \; & \frac{(x+iy)^2}{2} + \frac{(x-iy)^2}{2} \\ = \; & x^2 - y^2 \end{aligned}$$

- Benzer biçimde

$$F(z) = z^2/2i, G(z) = -z^2/2i$$

için

$$\begin{aligned} & F(x+iy) + G(x-iy) \\ = \; & \frac{(x+iy)^2}{2i} - \frac{(x-iy)^2}{2i} \\ = \; & 2xy \end{aligned}$$

çözümünü elde ederiz.

Laplace denkleminin özel çözümleri

- Benzer biçimde

$$\cos(iy) = \cosh(y), \sin(iy) = \sinh(y)$$

bağıntıları ile birlikte

Laplace denkleminin özel çözümleri

- Benzer biçimde
$$\cos(iy) = \cosh(y), \sin(iy) = \sinh(y)$$
bağıntıları ile birlikte
- $$\begin{aligned} \sin(z) &= \sin(x + iy) \\ &= \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) \\ &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) \end{aligned}$$

Laplace denkleminin özel çözümleri

- Benzer biçimde

$$\cos(iy) = \cosh(y), \sin(iy) = \sinh(y)$$

  bağıntıları ile birlikte

- $$\begin{aligned} \sin(z) &= \sin(x+iy) \\ &= \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) \\ &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} u &= reel(\sin(z)) = \sin(x)\cosh(y) \\ v &= sanal(\sin(z)) = \cos(x)\sinh(y) \end{aligned}$$

  fonksiyonları Laplace denkleminin çözümleridir.

Laplace denkleminin özel çözümleri

- Benzer biçimde

$$\cos(iy) = \cosh(y), \sin(iy) = \sinh(y)$$

bağıntıları ile birlikte

-

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sin(x+iy) \\ &= \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) \\ &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} u &= reel(\sin(z)) = \sin(x)\cosh(y) \\ v &= sanal(\sin(z)) = \cos(x)\sinh(y) \end{aligned}$$

fonksiyonları Laplace denkleminin çözümleridir.

- Bu çözümleri hangi F ve G için 7 ile verilen genel çözümden elde edebiliriz?

Alıştırmalar

1. $u = u(x, y)$ olmak üzere

$$u_{xx} + u_{yx} = 0, -\infty < x, y < \infty$$

denklemi verilsin.

(a) Verilen denklemi $(u_x + u_y)_x = 0$ yazarak, integral almak suretiyle birinci basamaktan denkleme indirgeyerek çözünüz.
(b) Denklemin türünü belirleyerek çözünüz.
(c) (a) ve (b) de elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırınız.

Alıştırmalar

(2) $u = u(x, y)$ olmak üzere

$$u_{xy} + u_{yy} = 0, -\infty < x, y < \infty$$

denklemi verilsin.

(a) Verilen denklemi $(u_x + u_y)_y = 0$ yazarak, integral almak suretiyle birinci basamaktan denkleme indirgeyerek çözünüz.
(b) Denklemin türünü belirleyerek bu bölümde incelediğimiz karakteristikler yöntemi ile çözünüz.
(c) (a) ve (b) de elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırınız.

Alıştırmalar

(3) Aşağıda verilen denklemlerin genel çözümlerini belirleyiniz.

(a)
$$u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$$

(b)
$$u_{xx} + 4u_{yy} = 0$$

(c)
$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4U_{yy} = 0$$

Alıştırmalar

(4) Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu kontrol ediniz

$$
\begin{aligned}
\cosh(ix) &= \cos(x) \\
\sinh(ix) &= i\sin(x) \\
\cosh(x) &= \cos(ix) \\
\sinh(x) &= -i\sin(ix)
\end{aligned}
$$

Alıştırmalar

(5) $f(z) = \cos(z)$ fonksiyonunun reel ve sanal kısımlarının Laplace denkleminin çözümleri olduğunu gösteriniz. Elde ettiğiniz çözümler hangi F ve G için genel çözümden de elde edilebilir.

(6) $f(z) = e^z$ fonksiyonunun reel ve sanal kısımlarının Laplace denkleminin çözümleri olduğunu gösteriniz. Elde ettiğiniz çözümler hangi F ve G için genel çözümden de elde edilebilir.

- Coşkun, Kısmi Diferensiyel Denklem(Ders Notu, 3. Bölüm).