# İkinci basamaktan sabit katsayılı homojen denklemler ve Dalga denklemi

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi,
Kısmi Diferensiyel Denklemler
Ders-II

9 Nisan, 2020

# Özet

Bu derste ikinci basamaktan

- $$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy}=0 \tag{1}$$

  denklemlemi kapsamında Hiperbolik denklem örneklerinin genel çözümümlerini ve bu kapsamda

# Özet

Bu derste ikinci basamaktan

- $$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy}=0 \tag{1}$$

  denklemlemi kapsamında Hiperbolik denklem örneklerinin genel çözümümlerini ve bu kapsamda
- Dalga denkleminin genel çözümü ve

# Özet

Bu derste ikinci basamaktan

- $$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy}=0 \tag{1}$$

  denklemlemi kapsamında Hiperbolik denklem örneklerinin genel çözümümlerini ve bu kapsamda
- Dalga denkleminin genel çözümü ve
- D'Alembert çözümünü interaktif Maxima uygulamalarıyla birlikte inceleyeceğiz.

# Hatırlatma

- Önceki dersimizden hiperbolik denklemler için $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ve dolayısıyla

# Hatırlatma

- Önceki dersimizden hiperbolik denklemler için $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ve dolayısıyla
- $$ax^2 + bx + c = 0$$

  denkleminin $b_1, b_2$ gibi iki reel çözümü olduğunu ve keyfi $F$ ve $G$ fonksiyonları için genel çözümün

  $$u = F(b_1x + y) + G(b_2x + y) \tag{2}$$

  ile verildiğini hatırlayalım.

# Hatırlatma

- Önceki dersimizden hiperbolik denklemler için $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ve dolayısıyla
- $$ax^2 + bx + c = 0$$
  denkleminin $b_1, b_2$ gibi iki reel çözümü olduğunu ve keyfi $F$ ve $G$ fonksiyonları için genel çözümün
  $$u = F(b_1x + y) + G(b_2x + y) \tag{2}$$
  ile verildiğini hatırlayalım.
- Bu durumda

# Hatırlatma

- Önceki dersimizden hiperbolik denklemler için $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ve dolayısıyla
-
$$ax^2 + bx + c = 0$$

  denkleminin $b_1, b_2$ gibi iki reel çözümü olduğunu ve keyfi $F$ ve $G$ fonksiyonları için genel çözümün

$$u = F(b_1x + y) + G(b_2x + y) \tag{2}$$

  ile verildiğini hatırlayalım.
- Bu durumda
- $y + b_2x = c_1$ ve $y + b_1x = c_2$ doğruları ise denklemin karakteristik doğrularıdırlar.

# Karakteristikler yöntemi ile genel çözüm

## Örnek 1

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

*denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.*

- Bu örnekte

$$a = 1, b = 0, c = -1$$

$$\Delta = 4 \neq 0$$

ve karakteristik denklem

$$ax^2 + bx + c = x^2 - 1 = 0$$

olup, denklemin kökleri

$$b_1 = 1, b_2 = -1$$

dir. Genel çözüm keyfi F ve G fonksiyonları için

- Bu örnekte

$$a = 1, b = 0, c = -1$$

$$\Delta = 4 \neq 0$$

ve karakteristik denklem

$$ax^2 + bx + c = x^2 - 1 = 0$$

olup, denklemin kökleri

$$b_1 = 1, b_2 = -1$$

dir. Genel çözüm keyfi F ve G fonksiyonları için

- $$u = F(y + x) + G(y - x)$$

# Karakteristikler yöntemi ile genel çözüm

## Örnek 2

$$u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = 0$$

*denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.*

- $\Delta = 3^2 - 4 > 0$ olup, denklem hiperbolik türdendir. Karakteristik denklem

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

olup, kökleri

$$b_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, b_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

- $\Delta = 3^2 - 4 > 0$ olup, denklem hiperbolik türdendir. Karakteristik denklem
$$x^2 + 3x + 1 = 0$$
olup, kökleri
$$b_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ b_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$
- Genel çözüm keyfi F ve G fonksiyonları için
$$u = F((-3+\sqrt{5})x/2 + y) + G((-3-\sqrt{5})x/2 + y)$$

# Karakteristikler yöntemi ile genel çözüm

## Örnek 3

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

*dalga denkleminin genel çözümünü belirleyiniz*

- $$\Delta = 4c^2 > 0$$

  ve karakteristik denklem

  $$x^2 - c^2 = 0$$

  olup, denklemin kökleri

  $$b_1 = c, b_2 = -c$$

-

$$\Delta = 4c^2 > 0$$

ve karakteristik denklem

$$x^2 - c^2 = 0$$

olup, denklemin kökleri

$$b_1 = c, b_2 = -c$$

- O halde keyfi $F$ ve $G$ fonksiyonları için

$$u = F(x+ct) + G(x-ct) \tag{3}$$

- $$\Delta = 4c^2 > 0$$

  ve karakteristik denklem

  $$x^2 - c^2 = 0$$

  olup, denklemin kökleri

  $$b_1 = c, b_2 = -c$$

- O halde keyfi $F$ ve $G$ fonksiyonları için

  $$u = F(x+ct) + G(x-ct) \tag{3}$$

- Karakteristikler $x + ct = sabit$, $x - ct = sabit$ doğrularıdır.

# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü

## Örnek 4

*Bir önceki örnekte göz önüne aldığımız dalga denklemini $x - t$ düzleminin $t > 0$ bölgesine kısıtlamak suretiyle yeniden gözönüne alalım.*

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), \\
u_t(x,0) &= g(x).
\end{aligned}
$$

- Genel çözümümüz

$$u = F(x+ct) + G(x-ct) \tag{4}$$

# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü

- Başlangıç konum ve hız yardımıyla

$$
\begin{aligned}
F(x) + G(x) &= f(x) && (5)\\
cF'(x) - cG'(x) &= g(x) && (6)
\end{aligned}
$$

# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü

- Başlangıç konum ve hız yardımıyla

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= f(x) \qquad (5) \\ cF'(x) - cG'(x) &= g(x) \qquad (6) \end{aligned}$$

- Ayrıca f ve g fonksiyonlarının $f, g \to 0, x \to \pm\infty$ özelliğine sahip olduğunu kabul edelim

# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü

- Başlangıç konum ve hız yardımıyla

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= f(x) && (5) \\ cF'(x) - cG'(x) &= g(x) && (6) \end{aligned}$$

- Ayrıca f ve g fonksiyonlarının $f, g \to 0, x \to \pm\infty$ özelliğine sahip olduğunu kabul edelim
- (6) bağıntısını $(-\infty, x)$ aralığı üzerinde integre ederek,

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{x} g(z)dz \qquad (7)$$

bağıntısını elde ederiz.

# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü

- (7) denklemini (5) den çıkararak

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} g(z)dz \tag{8}$$

elde ederiz.

# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü

- (7) denklemini (5) den çıkararak

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} g(z)dz \tag{8}$$

elde ederiz.

- (5) ve (7) denklemlerini tarafa tarafa toplayarak

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} g(z)dz \tag{9}$$

# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü

- (7) denklemini (5) den çıkararak

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} g(z)dz \tag{8}$$

elde ederiz.

- (5) ve (7) denklemlerini tarafa tarafa toplayarak

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} g(z)dz \tag{9}$$

- ve (7) denklemini (5) den çıkararak

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} g(z)dz \tag{10}$$

elde ederiz

# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü

- F ve G fonksiyonlarına karşılık gelen ifadeleri (3) genel çözümünde yerine yazarak,

- F ve G fonksiyonlarına karşılık gelen ifadeleri (3) genel çözümünde yerine yazarak,
-

$$
\begin{aligned}
u &= F(x+ct)+G(x-ct) \\
&= \frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x+ct} g(s)ds+\frac{1}{2}f(x-ct)-\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x-ct} g(z)dz \\
&= \frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)dz \qquad (11)
\end{aligned}
$$

D'Alembert çözümünü elde ederiz.

## Örnek 5

*Aşağıda tanımlanan*

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= \frac{1}{1+x^2}, \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

*Cauchy probleminin çözümünü belirleyiniz*

# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü

- Çözüm formülünde $c = 1, f(x) = 1/(1+x^2), g(x) = 0$ alarak

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+t)^2+1} + \frac{1}{(x-t)^2+1}\right)$$

elde ederiz.

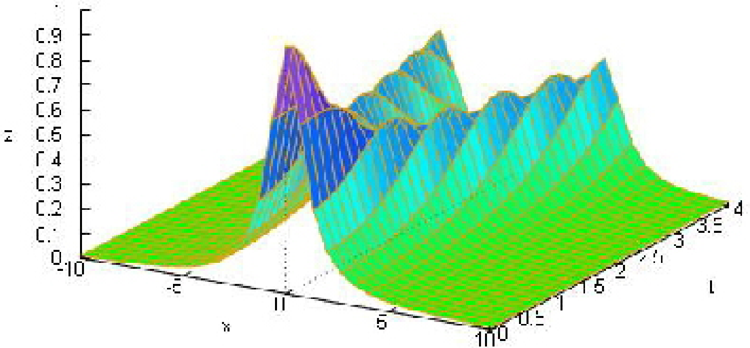
- Çözüm formülünde $c = 1, f(x) = 1/(1 + x^2), g(x) = 0$ alarak

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+t)^2+1} + \frac{1}{(x-t)^2+1}\right)$$

elde ederiz.

- Çözümümüzün Maxima ortamında ve $[-10, 10] \times [0, 4]$ bölgesi üzerindeki grafiği Şekil 1 ile sunulmaktadı

# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü



### Örnek 6

*Aşağıda tanımlanan*

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= 0, \\ u_t(x,0) &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

*Cauchy probleminin çözümünü belirleyiniz.*

- Çözüm formülünde $c = 1, f(x) = 0, g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ alarak

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$

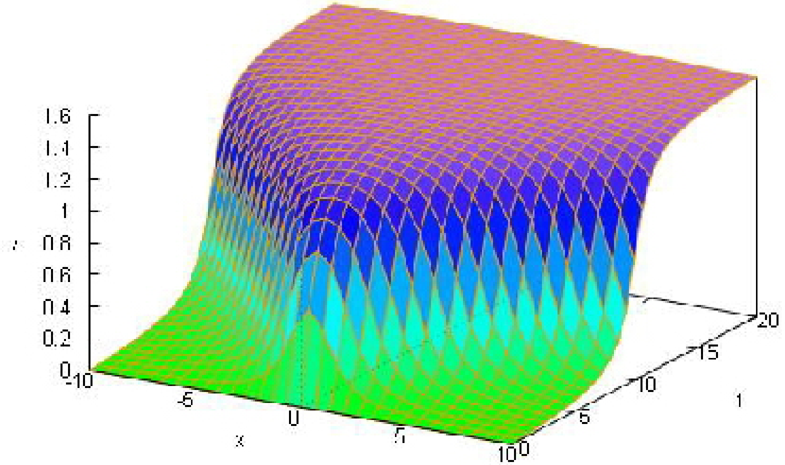
- Çözüm formülünde $c = 1, f(x) = 0, g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ alarak

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$

- $$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\arctan(x+t) - \arctan(x-c)\right)$$

  elde ederiz.

# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü



## Örnek 7

*Aşağıda tanımlanan*

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \textit{diğer } x \textit{ değerleri} \end{cases} \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

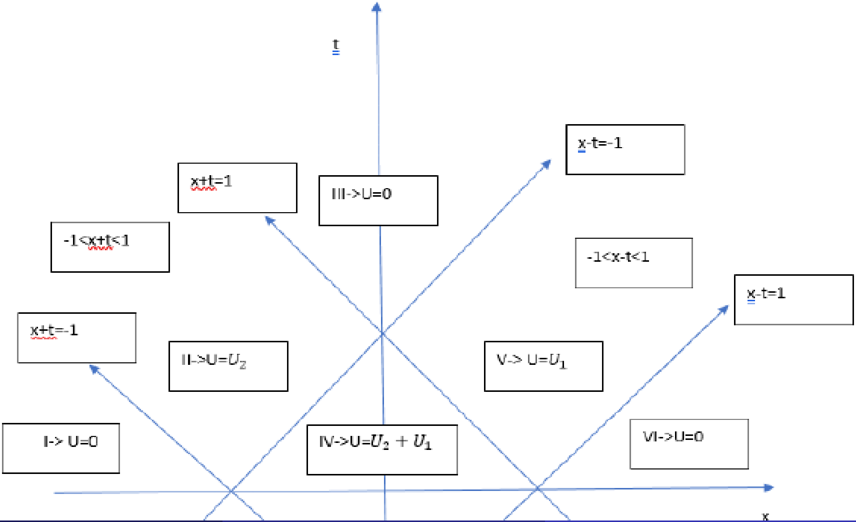
*Cauchy probleminin çözümünü belirleyiniz*

# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü

- Yukarıda verilen D'Alembert çözüm formülünden

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}(f(x-t)+f(x+t)) \\
&= U_1 + U_2 \\
&= \frac{1}{2}\begin{cases} 1-(x-t)^2 & -1 \leq x-t \leq 1 \\ 0 & \text{diğer } x \text{ değerleri} \end{cases} \\
&\quad + \frac{1}{2}\begin{cases} 1-(x+t)^2 & -1 \leq x+t \leq 1 \\ 0 & \text{diğer } x \text{ değerleri} \end{cases}
\end{aligned} \tag{12}
$$

# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü



# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü

1. $x - t < -1$ Şekilde I, II ve III ile gösterilen bölgelerden
   (a) $x + t < -1$ eşitsizliğini sağlayan I. bölgede $u = 0$ dır.
   (b) $-1 \leq x + t \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan $II$. bölgede

$$u = u_2 = 1/2(1 - (x + t)^2)$$

   (c) $x + t > 1$ eşitsizliğini sağlayan $III$. bölgede $u = 0$ dır.

2 $-1 \leq x - t \leq 1$ eşitsizliği ile

(a) $-1 \leq x + t \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan $IV$. bölgede

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= 1/2(1 - (x-t)^2) + 1/2(1 - (x+t)^2) \\ &= 1 - [(x-t)^2 + (x+t)^2] \end{aligned}$$

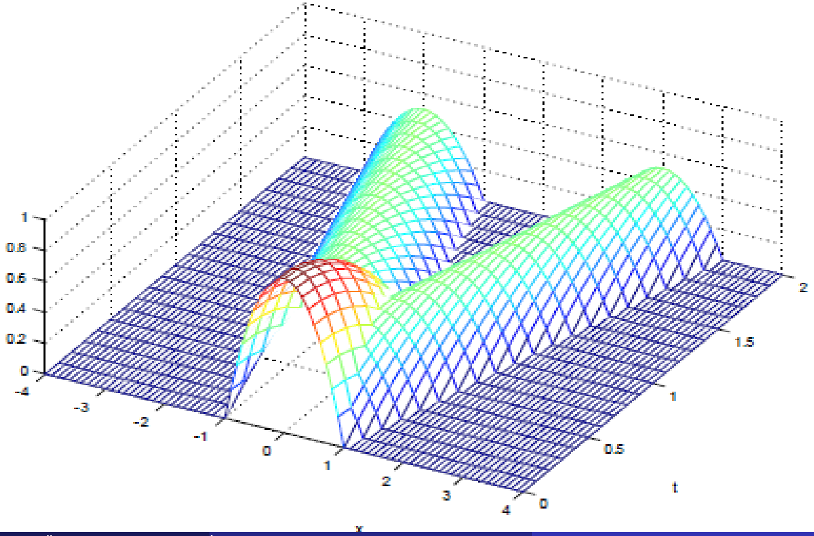
dir.

(b) $x + t > 1$ eşitsizliğiniğ sağlayan $V$. bölgede

$$u = u_2 = 1/2(1 - (x-t)^2)$$

3 $x - t > 1$ ve $x + t > 1$ eşitsizliğini sağlayan $VI$. bölgede $u = 0$ dır.

# Dalga denkleminin D'Alembert çözümü



# Alıştırmalar

1. Aşağıda verilen Dalga problemlerinin D'Alembert çözümlerini belirleyiniz. Bunun için Şekil 3 benzeri birer diyagram hazırlayınız.

   (a)
   $$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= e^{-2x^2}, u_t(x,0) = 1/(4+x^2) \end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned} u_{tt} &= 2u_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= \begin{cases} 1 & -2 < x < 2 \\ 0 & \text{diğer x ler} \end{cases}, u_t(x,0) = 0 \end{aligned}$$

   (c)
   $$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= 0, u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & -2 < x < 2 \\ 0 & \text{diğer x ler} \end{cases} \end{aligned}$$

# Alıştırmalar

(2) (Bilgisayar uygulaması) Maxima ortamında D'Alembert çözümü interaktif olarak incelenebilir. Örneğin

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 16u_{xx} \\ u(x,0) &= x/(1+x^2) \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

başlangıç değer problemi [2](sayfa 134) te hazırlanan ve aşağıda verilen

(3)

```
dalembert(f,g):=block([x,t],
        disp("Utt=c^2Uxx,  U(x,0)=f(x),Ut(x,0)=g(x)"),
        c:read("c="),
        a:x-c*t,
        b:x+c*t,
        define(u1(x,t),1/2*(f(a)+f(b))),
        define(u2(x,t),1/(2*c)*integrate(g(z),z,a,b)),
        define(u(x,t),u1(x,t)+u2(x,t)),
        display(u(x,t)),
        Tmax:read(" Tmax="),
        wxplot3d(u(x,t),[x,-10,10],[t,0,Tmax],[legend,false])
        );
```

# Alıştırmalar

Maxima blokunu

$$\begin{aligned} f(x) &: \ = x/(1+x^2) \\ g(x) &: \ = 0 \end{aligned}$$

tanımlamaları ve aşağıda belirtilen komut ile çalıştırılarak analitik çözümü ve çizilen grafiğini elde ediniz.

# Alıştırmalar

(%i13) f(x):=x/(1+x^2);g(x):=0;

(%o12) $f(x):=\frac{x}{1+x^2}$

(%o13) $g(x):=0$

(%i14) dalembert(f,g);

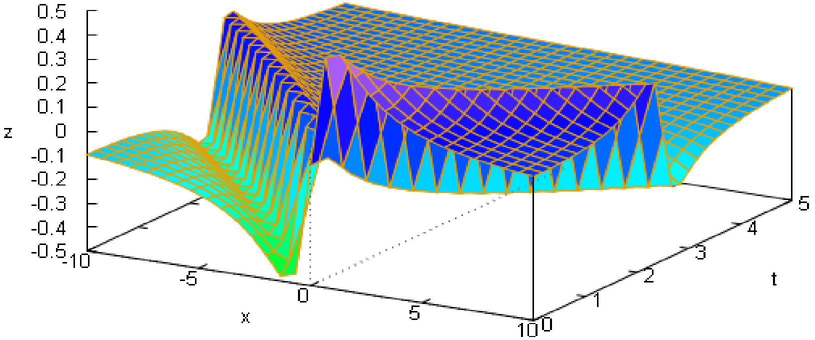
*Utt=c^2Uxx, U(x,0)=f(x), Ut(x,0)=g(x)*

*c=* 4;

$$u(x,t)=\frac{\frac{x+4t}{(x+4t)^2+1}+\frac{x-4t}{(x-4t)^2+1}}{2}$$

*Tmax=* 5;

# Alıştırmalar



- Coşkun, E., Kısmi Diferensiyel Denklem(Ders Notu, 3. Bölüm).

- Coşkun, E., Kısmi Diferensiyel Denklem(Ders Notu, 3. Bölüm).
- Coşkun, E. Maxima ile sembolik hesaplama ve kodlama, erhancoskun.com.tr