Bölüm 4

Sabit katsayılı lineer denklemler için değişkenlerine ayırma yöntemi

Bu bölümde özellikle iki değişkenli ve sabit katsayılı homojen bir denklemin

- değişkenlerine ayrılabilen çözümler ailesini belirleyerek,
- karakteristikler yöntemi ile de çözümün elde edilebilmesi durumunda, elde edittiğimiz çözümleri karşılaştırıyor,
- değişlenlerine ayrılabilir çözümlerin özel fonksiyon aileleri ile ifade edilirken, genel çözümün çok daha geniş bir sınıfı içerdiğini ve
- genel çözümde seçilen uygun fonksiyonlar ile değişkenlerine ayrılabilen çözümlerin elde edilebildiğini gözlemliyoruz.

4.1 Değişkenlerine ayırma yöntemi

$u = u(x, y)$ ve L sabit katsayılı bir lineer operatör olması durumunda

$$Lu = 0 \tag{4.1}$$

homojen denklemini gözönüne alalım. İkinci bölümde sadece birinci basamaktan ve üçüncü bölümde ise sadece ikinci basamaktan türevler içeren L operatörleri için karakteristikler yöntemi ile (4.1) denkleminin çözümünün nasıl bulunabileceğini incelemiştik. Bu bölümde aynı denklemleri bir kez de değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözeceğiz ve ayrıca hem birinci ve hem de ikinci basamaktan terimler içeren ve karakteristikler yöntemiyle inceleyemediğimiz bazı denklemlerin değişkenlerine ayrılabilençözümlerini elde edeceğiz.

Değişkenlerine ayırma yöntemi, verilen problemin her çözümünü bulmak yerine

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{4.2}$$

biçimindeki çözümlerini araştırır. Öncelikle birinci basamaktan denklemlerle başlayalım.

ÖRNEK 4.1.

$$u_x + u_y = 0 \tag{4.3}$$

denkleminin değişkenlerine ayrılabilen çözüm ailelerini belirleyiniz. Elde ettiğiniz çözüm ailelerini karakteristikler yöntemiyle elde edeceğiniz genel çözüm ile karşılaştırınız.

(4.2) biçimde çözüm arayarak,

$$X'(x)Y(y) + X(x)Y'(y) = 0$$

veya her iki yanı sıfırdan farklı kabul ettiğimiz $X(x)Y(y)$ ile bölerek,

$$\frac{X'(x)}{X(x)} + \frac{Y'(y)}{Y(y)} = 0$$

veya

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = -\frac{Y'(y)}{Y(y)} \tag{4.4}$$

elde ederiz. (4.4) ün sol tarafı yalnızca x in fonksiyonu iken sağ taraf ise yalnız y nin fonksiyonudur ve bu durumuda söz konusu eşitliğin sağlanabilmesi için her ikisi de bir sabite eşit olmalıdır, bu sabit için geleneksel olarak λ notasyonu kullanılır, yani

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = -\frac{Y'(y)}{Y(y)} = -\lambda, \lambda \in R \tag{4.5}$$

sağlanmalıdır. Böylece (4.5) den

$$X'(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{4.6}$$

$$Y'(y) - \lambda Y(y) = 0 \tag{4.7}$$

bayağı diferensiyel denklemlerini elde ederiz. Bu denklemlerin genel çözümlerini ise sırasıyla keyfi c_1, c_2 sabitleri ile

$$X(x) = c_1 e^{-\lambda x}, Y(y) = c_2 e^{\lambda y}$$

olarak elde ederiz. O halde değişkenlerine ayırma yöntemi ile (4.3) için elde ettiğimiz çözümler ailesini, $c = c_1 c_2$ olmak üzere,

$$u = ce^{-\lambda x} e^{\lambda y} = ce^{\lambda(y-x)} \tag{4.8}$$

olarak elde ederiz.

Öteyandan 2. Bölümde incelediğimiz karakteristikler yöntemi ile de aynı denklemin genel çözümünü keyfi f fonksiyonu ile

$$u = f(y-x) \tag{4.9}$$

olarak elde ederiz. (4.8) ve (4.9) çözümlerini karşılaştırdığımızda değişkenlerine ayırma yönteminin, genel çözüm fonksiyonlar ailesinden elde edilebilen özel çözümler ailesini belirlediğini görüyoruz, örneğin (4.9) da $f(x) = ce^x$ alarak (4.8) ile verilen çözümü elde ederiz.

ÖRNEK 4.2.

$$u_{xx} + u_{yx} = 0 \tag{4.10}$$

denkleminin değişkenlerine ayrılabilen çözüm ailelerini ve karakteristikler yöntemi ile de genel çözümünü belirleyiniz. Sonuçlarınızı karşılaştırınız. Ne gözlemliyorsunuz?

Çözüm.

(4.2) biçimde çözüm arayarak,

$$X''(x)Y(y) + X'(x)Y'(y) = 0$$

veya her iki yanı sıfırdan farklı kabul ettiğimiz $X'(x)Y(y)$ ile bölerek,

$$\frac{X''(x)}{X'(x)} = -\frac{Y'(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

veya

$$X''(x) + \lambda X'(x) = 0, \tag{4.11}$$
$$Y' - \lambda Y = 0 \tag{4.12}$$

elde ederiz. Öncelikle (4.11) den $V := X'$ ile

$$V' + \lambda V = 0$$

ve bu denklemi çözerek,

$$V = c_1 e^{-\lambda x}$$

elde ederiz, o halde

$$X' = V = c_1 e^{-\lambda x}$$

denkleminin her iki yanının x e göre integrali ile

$$X = -\frac{c_1}{\lambda} e^{-\lambda x} + c_2$$

elde ederiz. Benzer biçimde (4.11) den

$$Y = c_3 e^{\lambda y}$$

elde ederek, değişkenlerine ayrılabilen çözümü, $X(x)$ ve $Y(y)$ nin çarpımı olarak,

$$u = ce^{\lambda y} + d/\lambda e^{\lambda(y-x)} \tag{4.13}$$

biçiminde ifade edebiliriz, burada $c = c_2 c_3, d = -c_1 c_3$ keyfi sabitlerdir.

Öte yandan verilen denkleme karakteristikler yöntemini uygulayacak olursak,

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 0$$

genel formatına göre, örneğimiz için

$$a = 1, b = 1, c = 0$$

olup,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 > 0$$

olup, denklemimiz hiperbolik bir denklemdir ve

$$ax^2 + bx + c = x^2 + x = x(x+1) = 0$$

dan köklerimizi $b_1 = 0, b_2 = -1$ ve genel çözümümüzü

$$\begin{aligned} u &= F(y + b_1 x) + G(y + b_2 x) \\ &= F(y) + G(y - x) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Elde ettiğimiz bu çözümü değişkenlerine ayırma yöntemi ile elde ettiğimiz (4.13) ile karşılaştırdığımızda, değişkenlerine ayırma yöntemi ile elde ettiğimiz çözümün karakteristikler yöntemi ile elde edilen çözümden elde edilebilen özel bir çözüm ailesi olduğunu görüyoruz:

$$F = ce^{\lambda x}, G = d/\lambda e^{\lambda x}, \text{ for } \lambda, c, d \in R.$$

ÖRNEK 4.3.

$$u_{xx} + u_x + u_y = 0$$

denkleminin değişkenlerine ayrılabilen çözüm ailelerini belirleyiniz.

Denklem ikinci basamaktandır, ancak düşük basamaktan türevler de içerdiği için 3. Bölümde incelediğimiz karakteristikler yöntemini doğrudan uygulayamayız. (4.2) ile verilen biçimde çözüm arayarak,

$$X''Y + X'Y + XY' = 0$$

veya her iki yanı sıfırdan farklı kabul ettiğimiz $X(x)Y(y)$ ile bölerek,

$$\frac{X''}{X} + \frac{X'}{X} + \frac{Y'}{Y} = 0$$

veya

$$\frac{X''}{X} + \frac{X'}{X} = -\frac{Y'}{Y} = -\lambda$$

bağıntısından

$$X'' + X' + \lambda X = 0 \tag{4.15}$$

$$Y' - \lambda Y = 0 \tag{4.16}$$

bayağı diferensiyel denklemlerini elde ederiz.(4.16) denkleminin çözümleri

$$Y(y) = e^{\lambda y}$$

şeklindeki üstel fonksiyonlardır.

(4.15) denkleminin çözümleri ise

$$X(x) = e^{rx}$$

şeklinde olup, yerine yazılırsa r değerlerini

$$r^2 + r + \lambda = 0$$

denkleminin kökleri olarak

$$r_1(\lambda) = \frac{-1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}, r_2(\lambda) = \frac{-1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}$$

elde ederiz.

- $\lambda < 1/4$ için $r_1(\lambda)$ ve $r_2(\lambda)$ reel ve birbirinden farklıdır, o halde (4.15) denkleminin lineer bağımsız çözüm kümesi

  $$\left\{e^{r_1(\lambda)x}, e^{r_2(\lambda)x}\right\}$$

  dir. O halde (4.2) denkleminin çözümler ailesini keyfi c_1, c_2 sabitler ile

  $$u = \left(c_1 e^{r_1(\lambda)x} + c_2 e^{r_2(\lambda)x}\right) e^{\lambda y}$$

  olarak ifade edebiliriz.

- $\lambda = 1/4$ için $r_1(\lambda) = r_2(\lambda) = -1/2$ olup, lineer bağımsız çözüm kümesi

  $$\left\{e^{-x/2}, xe^{-x/2}\right\}$$

  dir ve keyfi c_1, c_2 sabitleri ile (4.2) denkleminin çözümler ailesini

  $$u = (c_1 + c_2 x)\, e^{-x/2} e^{y/4}$$

  biçiminde ifade edebiliriz.

- $\lambda > 1/4$ için $r_1(\lambda)$ ve $r_2(\lambda)$ kompleks eşlenik sayılardır:

  $$r_1(\lambda) = \frac{-1+i\sqrt{4\lambda-1}}{2}, r_2(\lambda) = \frac{-1-i\sqrt{4\lambda-1}}{2}$$

  Bu durumda (4.2) denkleminin çözümler ailesini keyfi c_1, c_2 sabitleri ile

  $$u = e^{-1/2x}\left(c_1 \cos(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}x) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}x)\right) e^{\lambda y}$$

  biçiminde ifade edebiliriz.

ÖRNEK 4.4.

$$u_t = au_{xx}, a > 0$$

ısı denkleminin değişkenlerine ayrılabilen çözüm ailelerini belirleyiniz.

$$u = X(x)T(t) \tag{4.17}$$

biçiminde değişkenlerine ayrılabilen çözümleri araştıralım. Bu çözüm formunu denklemde yazarak,

$$X(x)T'(t) = aX''(x)T(t)$$

veya her iki yanı sıfırdan farklı kabul ettiğimiz $aX(x)T(t)$ ile bölerek,

$$\frac{T'(t)}{aT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

bağıntısını düzenleyerek

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{4.18}$$

$$T'(t) + \lambda aT(t) = 0 \tag{4.19}$$

denklemlerini elde ederiz. (4.19) denkleminin bir çözümü

$$T(t) = e^{-\lambda at}$$

olup, diğer çözümleri de sabit katlarıdır. λ sabitinin pozitif, sıfır veya negatif olması durumuna göre problemimizin çözümünü formüle edebiliriz.

- $\lambda > 0$ ise formüllerimizde köklü ifadelerin yer almaması için $\lambda = k^2, k > 0$ olarak yazabiliriz. Böylece (4.18) denklemi

  $$X''(x) + k^2X(x) = 0$$

  olarak ifade edilebilir. Bu denklemin lineer bağımsız çözüm kümesi

  $$\{\sin(kx), \cos(kx)\}$$

  dir. O halde (4.17) çarpımı ile tanımlanan çözümümüzü keyfi c_1, c_2 sabitleri ile

  $$u(x,t) = (c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx))e^{-ak^2t}$$

  biçiminde ifade edebiliriz. Bu çözümün $t \to \infty$ için $u \to 0$ özelliğini sağladığını kolayca görürüz.

- $\lambda = 0$ ise
$$X''(x) = 0$$
denklemini elde ederiz ki bu denklemin lineer bağımsız çözümleri
$$\{1, x\}$$
dir. O halde çözümümüzü keyfi c_1, c_2 sabitleri ile
$$u(x,t) = c_1 + c_2 x$$
biçiminde ifade edebiliriz. Bu çözümü verilen ısı denkleminin zamanla değişmeyen, yani
$$u_t = 0$$
bağıntısını sağlayan çözümü olarak yorumlayabiliriz.

- $\lambda < 0$ ise formüllerimizde köklü ifadelerin yer almaması için $\lambda = -k^2, k > 0$ olarak yazabiliriz. Böylece (4.18) denklemi
$$X''(x) - k^2 X(x) = 0$$
olarak ifade edilebilir. Bu denklemin lineer bağımsız çözüm kümesi
$$\left\{e^{-kx}, e^{kx}\right\}$$
dir, ancak ilerleyen bölümlerimizde sınır-değer problemleri için daha uygun olduğu gerekçesiyle bu küme yerine, bu kümenin elemanları yardımıyla elde edilebilen
$$\sinh(kx) = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}, \cosh(kx) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$$
ile tanımlanan
$$\{\sinh(kx), \cosh(kx)\}$$
kümesini dikkate alacağız. O halde (4.17) çarpımı ile tanımlanan çözümümüzü keyfi c_1, c_2 sabitleri ile
$$u(x,t) = (c_1 \sinh(kx) + c_2 \cosh(kx))e^{ak^2 t}$$
biçiminde ifade edebiliriz. Bu çözümün $t \to \infty$ için $u \to \infty$ özelliğini sağladığını ve dolayısıyla fiziksel özellik sağlamadığını ifade edebiliriz. Çünkü ısı denklemi olarak düşündüğümüzde denklem hiç bir ısı kaynağı içermezken bu durum fiziksel olarak kabul edilebilir değildir, denklem sıcak olan bölgelerdeki ısıyı daha düşük sıcaklık bölgelerine difüze eder, kendiliğinden ısı üretmez!

ÖRNEK 4.5.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

dalga denkleminin değişkenlerine ayrılabilen çözümünü belirleyiniz.

$$u = X(x)T(t) \tag{4.20}$$

biçiminde değişkenlerine ayrılabilen çözümleri araştıralım. Bu çözüm formunu denklemde yazarak,

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

veya her iki yanı sıfırdan farklı kabul ettiğimiz $c^2X(x)T(t)$ ile bölerek,

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

bağıntısını düzenleyerek

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{4.21}$$

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \tag{4.22}$$

denklemlerini elde ederiz. λ sabitinin pozitif, sıfır veya negatif olması durumuna göre problemimizin çözümünü formüle edebiliriz.

- $\lambda > 0$ ise formüllerimizde köklü ifadelerin yer almaması için $\lambda = k^2, k > 0$ olarak yazabiliriz. Böylece denklemlerimiz

  $$\begin{aligned} X''(x) + k^2X(x) &= 0 \\ T''(t) + k^2c^2T(t) &= 0 \end{aligned}$$

  olarak ifade edilebilir. Bu denklemlerin lineer bağımsız çözüm kümesi sırasıyla

  $$\{\sin(kx), \cos(kx)\}, \{\sin(kct), \cos(kct)\}$$

  dir. O halde (4.20) çarpımı ile tanımlanan çözümümüzü keyfi c_1, c_2, c_3, c_4 sabitleri ile

  $$u(x,t) = (c_1\sin(kx) + c_2\cos(kx))(c_3\sin(kct) + c_4\cos(kct))$$

  biçiminde ifade edebiliriz.

- $\lambda = 0$ ise
$$X''(x) = 0, T''(t) = 0$$
denklemlerini elde ederiz ki bu denklemlerin lineer bağımsız çözümleri sırasıyla
$$\{1, x\}, \{1, t\}$$
dir. O halde çözümümüzü keyfi c_1, c_2, c_3, c_4 sabitleri ile
$$u(x,t) = (c_1 + c_2 x)(c_3 + c_4 t)$$
biçiminde ifade edebiliriz.

- $\lambda < 0$ ise formüllerimizde köklü ifadelerin yer almaması için $\lambda = -k^2, k > 0$ olarak yazabiliriz. Böylece (4.21),(4.22) denklemleri sırasıyla
$$\begin{aligned} X''(x) - k^2 X(x) &= 0 \\ T''(t) - k^2 c^2 T(t) &= 0 \end{aligned}$$
olarak ifade edilebilir. Bu denklemlerin lineer bağımsız çözüm kümesi sırasıyla
$$\{\sinh(kx), \cosh(kx)\}, \{\sinh(kct), \cosh(kct)\}$$
dir. . O halde (4.20) çarpımı ile tanımlanan çözümümüzü keyfi c_1, c_2, c_3, c_4 sabitleri ile
$$u(x,t) = (c_1 \sinh(kx) + c_2 \cosh(kx))(c_3 \sinh(kct) + c_4 \cosh(kct))$$
olarak elde ederiz.

ÖRNEK 4.6. *Yukarıda Örnek 4.5 ile $\lambda > 0$ için elde edilen değişkenlerine ayrılabilir çözüm ailesinin bir elemanının, örneğin*
$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$$
seçeneği ile elde edilen çözümünü, D'Alembert çözümü ile karşılaştırınız. Değişkenlerine ayrılabilen çözüm hangi başlangıç değerleri ile D'Alembert çözümüne karşılık gelmektedir?

Belirtilen parametre seçimleri ile yukarıda elde ettiğimiz
$$\begin{aligned} u(x,t) &= (\sin(kx) + \cos(kx))(\sin(kct) + \cos(kct)) \\ &= \cos(k(x - ct)) + \sin(k(x + ct)) \end{aligned} \tag{4.23}$$

çözümünü göz önüne alalım. Bu çözümün $x - ct = sabit, x + ct = sabit$ karakteristikleri boyunca sabit olan dalga denklemi çözümü olduğu açıkça görülmektedir.

Ayrıca bu çözümün

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds \tag{4.24}$$

D'alembert çözümü ile ilişkisini incelemek istiyoruz. (4.23) den

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) = \sin(kx) + \cos(kx) && (4.25) \\ u_t(x,0) &= g(x) = kc\,(\sin(kx) + \cos(kx)) && (4.26) \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi D'alembert çözümünün (4.23) i verdiğini görmek istiyoruz. Bu nedenle formülde yer alan ifadeleri hesaplamaya çalışalım:

$$\begin{aligned} f(x+ct) &= \sin(k(x+ct)) + \cos(k(x+ct)) \\ &= \sin(kx)\cos(kct) + \cos(kx)\sin(kct) \\ &\quad + \cos(kx)\cos(kct) - \sin(kx)\sin(kct) \\ f(x-ct) &= \sin(k(x-ct)) + \cos(k(x-ct)) \\ &= \sin(kx)\cos(kct) - \cos(kx)\sin(kct) \\ &\quad + \cos(kx)\cos(kct) + \sin(kx)\sin(kct) \end{aligned}$$

ifadelerinden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) \\ = \; & \sin(kx)\cos(kct) + \cos(kx)\cos(kct) \\ = \; & \sin(k(x+ct)) && (4.27) \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca gerekli cebirsel işlemler sonucunda

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds \\
=\ & \frac{k}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} \left(\sin(ks)+\cos(ks)\right) ds \\
=\ & \frac{1}{2}\left[-\cos(ks)+\sin(ks)\right]_{x-ct}^{x+ct} \\
=\ & \cos(kx)\sin(kct)+\sin(kx)\sin(kct) \\
=\ & \cos(k(x-ct)) \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

elde ederiz. (4.27) ve (4.28) ile elde ettiğimiz sonuçları toplayarak

$$u(x,t)=\sin(k(x+ct))+\cos(k(x-ct))$$

elde ederiz ki bu sonuç değişkenlerine ayırma yöntemi ile elde ettiğimiz (4.23) ile aynıdır.

ÖRNEK 4.7. *Sönümlü dalga denklemi olarak bilinen*

$$u_{tt}+\alpha u_t=c^2u_{xx}, \alpha>0, -\infty<x<\infty$$

denkleminin değişkenlerine ayrılabilen çözümlerini belirleyiniz.

$$u=X(x)T(t) \qquad (4.29)$$

biçiminde değişkenlerine ayrılabilen çözümleri araştıralım. Bu çözüm formunu denklemde yazarak,

$$X(x)T''(t)+\alpha X(x)T'(t)=c^2X''(x)T(t)$$

veya her iki yanı sıfırdan farklı kabul ettiğimiz $c^2X(x)T(t)$ ile bölerek,

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)}+\frac{\alpha}{c^2}\frac{T'}{T}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

bağıntısını düzenleyerek

$$\begin{aligned}
X''(x)+\lambda X(x) &= 0 \\
T''(t)+\alpha T'(t)+\lambda c^2T(t) &= 0
\end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. λ sabitinin pozitif, sıfır veya negatif olması durumuna göre problemimizin çözümünü formüle edebiliriz.

- $\lambda > 0$ ise formüllerimizde köklü ifadelerin yer almaması için $\lambda = k^2, k > 0$ olarak yazabiliriz. Böylece denklemlerimiz

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0 \tag{4.30}$$
$$T''(t) + \alpha T'(t) + k^2 c^2 T(t) = 0 \tag{4.31}$$

(4.30) denklemin lineer bağımsız çözüm kümesi

$$\{\sin(kx), \cos(kx)\}$$

dir. (4.30) denkleminin lineer bağımsız çözüm kümesi ise

$$\Delta = \alpha^2 - 4k^2$$

nin işaratine göre değişir.

  - eğer $\Delta > 0$ ise $\alpha > 0$ olduğu için $\alpha > 2k$ sağlanmalıdır. Bu durumda
$$r_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\Delta}}{2} < 0$$
olup (4.31) denkleminin lineer bağımsız çözüm kümesi
$$\left\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\right\}$$
dir ve (4.29) ile tanımlanan çözümümüzü keyfi c_1, c_2, c_3, c_4 sabitleri ile
$$u = (c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx))(c_3 e^{r_1 t} + c_4 e^{r_2 t})$$
olarak ifade edebiliriz.Bu çözümden $t \to \infty$ için $u \to 0$ elde ederiz ki bu sonuç sönümlü dalga denkleminin beklenen özelliğidir. Bu durumda dalga hareketi salım yapmadan söner ki budurum aşırı sönüm olarak adlandırılır.
  - eğer $\Delta = 0$ ise bu durumda
$$r_1 = r_2 = \frac{-\alpha}{2}$$
olup, (4.31) denkleminin lineer bağımsız çözüm kümesi
$$\left\{e^{-\alpha t/2}, te^{-\alpha t/2}\right\}$$

dir ve (4.29) ile tanımlanan çözümümüzü keyfi c_1, c_2, c_3, c_4 sabitleri ile

$$u = (c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx))(c_3 e^{-\alpha t/2} + c_4 t e^{-\alpha t/2})$$

olarak ifade edebiliriz. Bu çözümden de $t \to \infty$ için $u \to 0$ elde ederiz.

– eğer $\Delta < 0$ ise $\alpha > 0$ olduğu için $0 < \alpha < 2k$ sağlanmalıdır. Bu durumda

$$r_{1,2} = \frac{-\alpha \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

olup (4.31) denkleminin lineer bağımsız çözüm kümesi

$$\left\{ e^{-\alpha/2t} \sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t), e^{-\alpha/2t} \cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t) \right\}$$

dir ve (4.29) ile tanımlanan çözümümüzü keyfi c_1, c_2, c_3, c_4 sabitleri ile

$$u = e^{-\alpha/2t}(c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx))(c_3 \cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t) + c_4 \sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t))$$

olarak ifade edebiliriz. Bu çözümden $t \to \infty$ için zaman ekseni boyunca salınımlı sönüm adı verilen bir dalga profili oluşur, yani yine $u \to 0$ dır, fakat $\Delta > 0$ durumuna kıyasla sönüm yavaşça ve salınım yaparak gerçekleşir.

- $\lambda < 0$ ve $\lambda = 0$ durumunda da çözümleri belirleyebilir ve $t \to \infty$ için çözüm davranışını belirleyebiliriz(Alıştırma 10).

Gözlem 4.1.

Özetle bu bölümde,

- sabit katsayılı ve

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0$$

ile verilen lineer ve homojen bir denklemin değişkenlerine ayrılabilen çözümler ailesinin nasıl elde edilebileceğini inceledik.

- Deklemin sadece birinci basamktan türevleri içeren alt sınıfını 2. Bölümde ve sadece ikinci basamaktan türevler içeren alt sınıfını ise 3. Bölümde karakteristikler yöntemi yardımıyla incelemiştik.
- Karakteristikler yönteminin de uygun olduğu durumlarda elde ettiğimiz çözümleri karşılaştırarak, değişkenlerine ayrılabilen çözümlerin genel çözüm içerinde özel bir alt aileye karşılık geldiğini gözlemledik.
- Genel çözüm bağımsız değişkenlerin uygun lineer kombinasyonlarının keyfi fonksiyon ailesi olarak ifade edilirken , değişkenlerine ayrılabilen çözümler ise, her birisi bir bayağı diferensiyel denklem çözümleri olarak, özel eğri ailelerinin çarpımlarından oluşmaktadır.
- Değişkenlerine ayırma yönteminin bir avantajı, değişik basamaktan türev içeren ve karakteristikler yönteminin uygun olmadığı problemlere ait özel çözüm ailelerinin de elde edilmesine imkan sağlamasıdır.
- Bir diğer avantajı ise özel fonksiyonlar içeriyor olması ve dolayısıyla çözüm hakkında daha öz bilgi veriyor olmasıdır. Bu özellik, ileride inceleyeceğimiz üzere sonlu bölge problemlerinde verilen ilave bilgiler yardımıyla istenilen çözümü kolayca seçebilmemize imkan sağlamaktadır. Oysa en genel çözümden verilen yan bilgileri sağlayan çözümü seçmek her zaman kolay veya bazen de mümkün olmayabilir.
- Değişkenlerine ayırma yöntemini homojen denkleme veya verilen bir denklemin homojen kısmına uygulayabiliriz, oysa karakteristikler yönteminde böyle bir kısıtlama yoktur.

Alıştırmalar 4.1.

1. $u = u(x, y)$, ve a, b, c sabitler olmak üzere
   (a)
   $$au_x + bu_y = cu$$
   değişkenlerine ayrılabilen çözüm ailesini belirleyiniz.
   (b) Elde ettğiniz çözüm ailesini 2. Bölümde karakteristikler yöntemi ile elde ettiğimiz genel çözüm ile karşılaştırınız.
   (c) Genel çözümdeki keyfi fonksiyonun uygun seçimi ile değişkenlerine ayrılabilen çözümü elde edebilir misiniz?

2. $u = u(x, y)$ olmak üzere

   (a)
   $$u_{xx} - u = 0$$
   denklemlerin değişkenlerine ayrılabilen çözüm ailesini belirleyiniz.

   (b) Elde ettiğiniz çözümü 1. Bölümde bayağı diferensiyel denklem çözüm yöntemi ile elde ettiğimiz genel çözüm ile karşılaştırınız. Genel çözümdeki keyfi fonksiyonun uygun seçimi ile değişkenlerine ayrılabilen çözümü elde edebilir misiniz?

3. $u = u(x, y)$ olmak üzere

   (a)
   $$u_{xx} - u_x - 6u = 0$$
   denkleminin bayağı diferensiyel denklem yöntemiyle genel çözümünü elde ediniz.

   (b) Verilen denklemin değişkenlerine ayrılabilen çözümü ailesini elde ediniz.

   (c) Genel çözümdeki keyfi fonksiyonun uygun seçimi ile değişkenlerine ayrılabilen çözüm ailesini elde edebilir misiniz?

4. $u = u(x, y)$ olmak üzere

   (a)
   $$u_{yy} - 3u_y + 2u = 0$$
   denkleminin bayağı diferensiyel denklem yöntemiyle genel çözümünü elde ediniz.

   (b) Verilen denklemin değişkenlerine ayrılabilen çözüm ailesini elde ediniz.

   (c) Genel çözümdeki keyfi fonksiyonun uygun seçimi ile değişkenlerine ayrılabilen çözümü elde edebilir misiniz?

5. $u = u(x, y)$ olmak üzere
   $$u_{xx} + u_y = 0$$
   denkleminin değişkenlerine ayrılabilen çözüm ailesini belirleyiniz.

6. $u = u(x, y)$ olmak üzere

   (a)
   $$u_{xx} + u_{yy} = 0$$
   Laplace denkleminin değişkenlerine ayrılabilen çözüm ailesini belirleyiniz.

   (b) Parametrelere özel değer vererek elde edeceğiniz herhangi özel çözümü belirleyiniz.

   (c) Belirlediğiniz özel çözümü genel çözümde uygun olarak seçeceğiniz F ve G fonksiyonları yardımıyla elde ediniz?

7. $u = u(x, y)$ olmak üzere Helmholtz denklemi olarak bilinen
   $$u_{xx} + u_{yy} = -k^2 u$$
   denkleminin değişkenlerine ayrılabilen çözüm ailesini belirleyiniz.

8. $u = u(x, t)$ olmak üzere
   $$u_t + cu_x = u_{xx}$$
   denklemine adveksiyon-difüzyon denklemi adı verilir. Bu denklemin
   $$v_t = v_{xx}$$
   ile verilen difüzyon denklemini sağlayan $v = v(x, t)$ fonksiyonu ile
   $$u = e^{at+bx} v$$
   biçiminde çözümüne sahip olabilmesi için a ve b yi c sabiti cinsinden belirleyiniz.

9. Soru 7 ye değişkenlerine ayırma yöntemini doğrudan uygulayarak elde ettiğiniz sonucu karşılaştırınız.

10. Örnek 4.7 de göz önüne aldığımız
    $$u_{tt} + \alpha u_t = c^2 u_{xx}, \alpha > 0, -\infty < x < \infty$$
    sönümlü dalga denkleminin $\lambda < 0$ ve $\lambda = 0$ için değişkenlerine ayrılabilen çözüm ailelerini belirleyiniz. Elde ettiğiniz çözümlerin $t \to \infty$ için davranışını inceleyiniz.

Kaynaklar

[1] Duchateau, P., Zachmann D, Applied Partial Differential Equations, Dover Pub., New York, 1989.

[2] Coleman, P. Matthew, An introduction to Partial Differential Equations with MATLAB, Chapman& Hall/CRC, 2004.

[3] Coskun, E. Maxima ile Sembolik Hesaplama ve Kodlama, http://erhancoskun.com.tr