Bölüm 6

Fourier Serileri

Fourier serileri elemanter bir çok kaynakta kapsamlı olarak incelenmiştir, örneğin [1],[2],[3],[5]. Bu çalışmada mevcutlarından biraz farklı bir yaklaşımla Fourier serileri konusunu Sturm-Liouville problemleri ile olan yakın ilişkilerini *her aşamada* ve *sürekli olarak* vurgulamak suretiyle inceliyoruz. Böylece seçilen bir aralık ve periyotta, seri açılımlarının nasıl elde edilebileceğine daha iyi bir biçimde kavramış olacağız.

Önceki bölümde incelediğimiz *Peryodik* ve *Regüler Sturm-Liouville*(RSL) problemlerinin özfonksiyonlarının "**tamlığı**" kriterinin pratik uygulamalarda Fourier serisi olarak bildiğimiz açılımların gerçekleştirilebilmesine imkan sağladı ğı nı gözlemlemiştik. Bu bölümde ise verilen bir periyodik f fonksiyonun sırasıyla

- periyodik sınır şartlarını $[-1, 1]$ aralığı üzerinde sağlayan PSL problemi,
- Neumann sınır şartlarını $[0, 1]$ aralığı üzerinde sağlayan RSL problemi ve
- Dirichlet sınır şartlarını $[0, 1]$ aralığı üzerinde sağlayan RSL probleminin özfonksiyonlarını lineer kombinasyonu olarak ifadelerinin sırasıyla Fourier serisi, Fourier kosinüs serisi ve Fourier sinüs serisi olarak adlandırıldığına dikkat çekiyor ve bu açılımlarlada ilgili katsayıların nasıl hesaplandığını inceliyoruz. Ayrıca
- elde edilen seri açılımlarının yakınsadıkları noktaları ve yakınsamanın düzgün veya noktasallığı hakkında analiz gerçekleştiriyor ve grafiksel sunumlarla elde edilen sonuçları destekliyoruz.

- Kompleks katsayılı ve reel katsayılı Fourier seri açılımlarının sadece farklı özfonksiyon seçimi sonucu olarak farklı gözüktüklerini ve aralarındaki ilişkileri inceliyoruz,

- Gibbs olayı adı verilen süreksiz nokta komşuluğundaki davranışın çoğunlukla doğru olsa bile her zaman gerçekleşmesinin gerekmediğine ait **orijinal örnekler oluşturuyoruz** ve *Maxima sembolik cebirsel yazılımı* desteği ile sunuyoruz.

- $[-1,1]$ aralığında gerçekleştirdiğimiz açılımların herhangi $[-b,b]$aralığına, $[0,1]$ aralığındaki açılımların $[0,b]$ aralığına ve en genel olarak ta yapılan her türlü seri açılım işleminin $[a,b]$ aralığına nasıl genelleştirildiğini ilgili periyodik ve regüler Sturm-Liouville problemleri yardımıyla inceliyoruz.

6.1 Giriş

TANIM 6.1. *$f(x+p) = f(x)$ özelliğini sağlayan en küçük $p > 0$ sayısına f nin peryodu adı verilmektedir. Örneğin*

- $f(x) = sin(x)$ için

  $$\sin(x+p) = \sin(x) = \sin(x+2\pi)$$

  den $p = 2\pi$ elde ederiz.

- $f(x) = sin(2x)$ için

  $$\sin(2(x+p)) = \sin(2x+2p) = \sin(2x) = \sin(2x+2\pi)$$

  den $p = \pi$ elde ederiz.

- $f(x) = sin(\pi x)$ için

  $$\sin(\pi(x+p)) = \sin(\pi x+\pi p) = \sin(\pi x) = \sin(\pi x+2\pi)$$

  olup, $p = 2$ dir.

- Genelleştirecek olursak $\sin(kx)$ fonksiyonunun periyodunu

  $$\sin(k(x+p)) = \sin(kx+kp) = \sin(kx) = \sin(kx+2\pi) \text{ den } p = \frac{2\pi}{k}$$

  olarak elde ederiz. Benzer biçimde $\cos(kx)$ fonksiyonunun da periyodu $p = \frac{2\pi}{k}$ dır.

TANIM 6.2. *f fonksiyonunun herhangi bir süreksizlik noktasında sağdan ve soldan limitleri mevcut ve sonlu ise bu tür süreksizliklere* ***sıçramalı süreksizlik*** *adı verilir.*

Örneğin

- $$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le 1 \end{cases} \tag{6.1}$$

  fonksiyonu $x = 0$ noktasında sıçramalı süreksizliğe sahiptir çünkü fonksiyonun süreksiz olduğu bu noktada sağdan ve ve soldan limitleri sonludur.

  $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Öte yandan

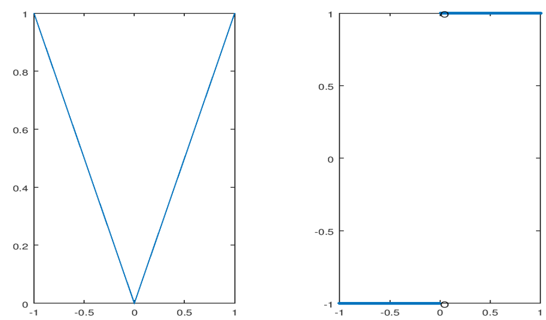
- $$f(x) = \frac{1}{x-1} \tag{6.2}$$

  fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki süreksizliği sıçramalı süreksizlik değildir, çünkü bu noktada soldan ve sağdan limitler sonlu değildir:

  $$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \infty$$

TANIM 6.3. *Tanım kümesi içerinde en fazla sonlu sayıda sıçramalı süreksizliğe sahip olan fonksiyonlara* parçalı(piecewise) sürekli fonksiyon *adı verilmektedir.*

Örneğin (6.1) ile tanımlanan fonksiyon parçalı sürekli bir fonksiyon iken, (6.2) ile tanımlanan fonksiyon $x = 1$ noktasını içeren hiç bir aralıkta parçalı sürekli değildir.



Şekil 6.1: Mutlak değer fonksiyonu ve türevi

TANIM 6.4. *Kendisi parçalı sürekli olan ve süreksizlik noktaları hariç türevi parçalı sürekli olan fonksiyonlara* parçalı düzgün(smooth) fonksiyon *adı verilmektedir.*

Örneğin

$$f(x) = |x| \tag{6.3}$$

fonksiyonu sürekli ve

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases} \tag{6.4}$$

ise parçalı süreklidir. O halde 6.3 parçalı düzgün bir fonksiyondur, Şekil 6.1.

ÖRNEK 6.1. *İşaret fonksiyonu olarak bilinen*

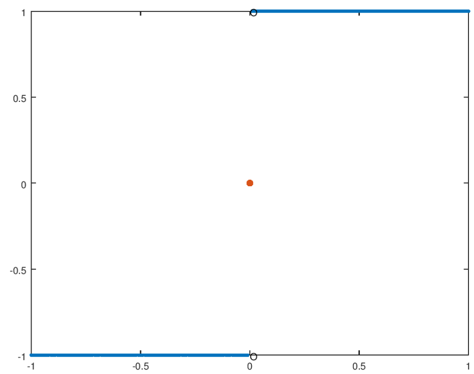
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

fonksiyonu sıfır noktasını içeren herhangi bir kapalı $[-a, a]$,$a > 0$ *aralığında parçalı düzgün bir fonksiyondur.*

İşaret fonksiyonunun $[-1, 1]$ aralığındaki grafiği Şekil 6.2 ile sunulmaktadır.

İşaret fonksiyon sadece $x = 0$ noktasında süreksiz olup

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$



Şekil 6.2: İşaret fonksiyonun [-1,1] aralığındaki grafiği

sonlu limitlerine sahiptir. Dolayısıyla fonksiyon parçalı süreklidir. Ayrıca sıçramalı süreksizlik noktası hariç her yerde türevi mevcut ve süreklidir, çünkü $f'(x) = 0$, $\forall x \neq 0$.

ÖRNEK 6.2.

$$f(x) = x^{1/4}$$

funksiyonu heryerde sürekli ve fakat sıfır noktasını içeren hiç bir aralıkta parçalı düzgün değildir.

Fonksiyon grafiği Şekil 6.3 ile verilmektedir.

$$f'(x) = \frac{1}{4x^{3/4}}$$

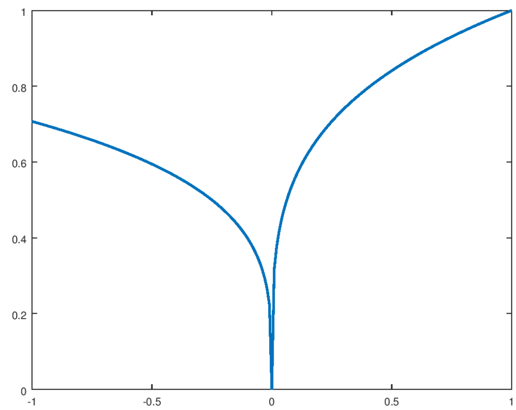
fonksiyonu $x = 0$ noktasında sıçramalı olmayan süreksizliğe sahiptir:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{4x^{3/4}} = \infty$$

6.2 Periyodik Sturm-Liouville Probleminin Özfonksiyonları ve özellikleri

Önceki bölümde *Kanonik PSL* problemi olarak adlandırdığımız

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y(-1) &= y(1) \\ y'(-1) &= y'(1) \end{aligned} \tag{6.6}$$



Şekil 6.3: $f(x) = x^{1/4}$ fonksiyonunun grafiği

probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını

$$\lambda_0 = 0, u_0 = 1/2, \lambda_n = (n\pi)^2, u_n = \cos(n\pi x), n = 1, 2, . \tag{6.7}$$
$$v_n = \sin(n\pi x), n = 1, 2, . \tag{6.8}$$

olarak elde etmiştik.

- Yukarıdaki incelememize göre u_n ve v_n fonksiyonlarının periyodu $p = \frac{2}{n}$ dir. Ancak

$$\{1/2, \cos(\pi x\}, \sin(\pi x), \cos(2\pi x, \sin(2\pi x), \cdots\} \tag{6.9}$$

özfonksiyonlar kümesinin periyodu, ortak periyot olan 2 dir. Her pozitif sayı sabit sayının periyodu olduğu için 1/2 sayısının periyodunu da diğerleriyle ortak olan periyot, yani 2 kabul ediyoruz.

iddia: (6.9) kümesi $[-1, 1]$ *aralığı üzerinde ortogonal bir kümedir.*

İspat
Öncelikle

-

$$\sin(mx \mp nx) = \sin mx \cos nx \mp \cos mx \sin nx$$
$$\cos(mx \mp nx) = \cos mx \cos nx \pm \sin mx \sin nx$$

açılımlarından

•

$$\begin{aligned}
\cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)\\
\sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)\\
\sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right)
\end{aligned}$$

trigonometrik özdeşlikleri ve özel olarak

$$\begin{aligned}
\cos^2(mx) &= \cos mx \cos mx = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2mx)\right)\\
\sin^2(mx) &= \sin mx \sin mx = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2mx)\right)
\end{aligned}$$

özdeşlikleri hatırlayalım.

Bu özdeşlikler ve trigonometrik fonksiyonların integral kuralları yardımıyla,

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \cos(n\pi x)dx = \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big|_{-1}^{1} = 0, n = 1, 2, \cdots$

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sin(n\pi x)dx = -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_{-1}^{1} = 0, n = 1, 2, \cdots$

- Yukarıdaki iki sonuç kümemizin ilk elemanı olan $1/2$ nin diğer her bir eleman ile ortogonal olduğunu gösterir. Şimdi sırasıyla kosinüslü elemanların kendi aralarında, sinüslü elemanların kendi aralarında ve ayrıca kosinüs ve sinüslü eleman ikililerinin ortogonal olduğunu gözlemleyelim:

- $n, m \in N$ ve $n \neq m$ için

$$\int_{-1}^{1} \cos(m\pi x)\cos(n\pi x)dx \tag{6.10}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((m+n)\pi x)}{(m+n)\pi} + \frac{\sin((m-n)\pi x)}{(m-n)\pi}\Big|_{-1}^{1}\right) = 0$$

- $n, m \in N$ ve $n \neq m$ için

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx && (6.11)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((m-n)\pi x)}{(m-n)\pi} - \frac{\sin((m+n)\pi x)}{(m+n)\pi}\Bigg|_{-1}^{1}\right) = 0
\end{aligned}$$

- $n, m \in N$ ve $n \neq m$ için

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \cos(m\pi x)\sin(n\pi x)dx && (6.12)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos((m+n)\pi x)}{(m+n)\pi} + \frac{\cos((m-n)\pi x)}{(m-n)\pi}\Bigg|_{-1}^{1}\right) = 0
\end{aligned}$$

- $n, m \in N$ ve $n = m \neq 0$ için

$$\int_{-1}^{1} \cos(n\pi x)\sin(n\pi x)dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2(n\pi x)}{n\pi}\Bigg|_{-1}^{1}\right) = 0 \qquad (6.13)$$

O halde (6.9) kümesi ortogonal bir kümedir.

Ayrıca

- $n, m \in N$ ve $n = m \neq 0$ için

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sin^2(n\pi x)dx &= \left(\frac{2n\pi x - \sin(2n\pi x) +}{4\pi n}\Bigg|_{-1}^{1}\right) && (6.14)\\
&= 1
\end{aligned}$$

- $n, m \in N$ ve $n = m \neq 0$ için

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \cos^2(n\pi x)dx &= \left(\frac{\sin(2n\pi x) + 2n\pi x}{4\pi n}\Bigg|_{-1}^{1}\right) && (6.15)\\
&= 1
\end{aligned}$$

elde ederiz.

6.3 Fourier serisi

Sturm-Liouville problemlerinin özfonksiyonların "*tamlık*" özelliği, özfonksiyonlarla aynı periyoda sahip olan *peryodik bir fonksiyonun* sözkonusu özfonksiyonların lineer kombinasyonu olarak ifade edilebileceği anlamını taşır.

Özel olarak Kanonik Periyodik Sturm-Liouville problemleminin (6.9) ile verilen ve ortogonal olan özfonksiyonları yardımıyla, $[-1,1)$ aralığı üzerinde tanımlı 2 periyotlu bir f fonksiyonunu

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n v_n \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) \end{aligned} \tag{6.16}$$

biçiminde ifade edebiliriz. Bu seriye f fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığındaki *Fourier açılımı* veya Fourier serisi adı verilmektedir. Açılımdaki reel

$$a_n, n = 0, 1, \cdots ; b_n = 1, 2, \cdots$$

katsayılarına *Fourier katsayıları* adı verilmektedir.

Şimdi de Fourier katsayılarını belirleyelim.

Fourier katsayıları

- Öncelikle (6.16) açılımının her iki yanının $[-1,1]$ aralığı üzerinde integralini alarak ve yukarıda ifade ettiğimiz integral özelliklerininde ilk ikisini kullanarak

  $$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

  elde ederiz.

- Şimdi seçilen bir $n \geq 1$ için (6.16) açılımının her iki yanını $\cos(n\pi x)$ ile iç çarpımını alarak, (6.10)-(6.15) özellikler yardımıyla

  $$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx &= \int_{-1}^{1} a_n \cos^2(n\pi x)dx \\ &= a_n \end{aligned}$$

elde ederiz.

- Benzer biçimde seçilen bir $n \geq 1$ için (6.16) açılımının her iki yanını $\sin(n\pi x)$ ile iç çarpımını alarak, (6.10)-(6.15) özellikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx &= \int_{-1}^{1} b_n \sin^2(n\pi x)dx \\ &= b_n\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde (6.16) açılımının katsayılarını

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx, n = 0, 1, \cdots \tag{6.17}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx, n = 1, 2, \cdots \tag{6.18}$$

olarak elde ederiz.

ÖRNEK 6.3. $[-1, 1)$ *aralığında* $f(x) = x+1$ *olarak tanımlı* $p = 2$ *periyotlu* f *fonksiyonunun Fourier seri açılımını belirleyiniz.*

(6.16) den

$$a_0 = \int_{-1}^{1} (x+1)dx = 2$$

ve kısmi integrasyonla

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x+1)\cos(n\pi x)dx \\
&= \frac{1}{n\pi}(x+1)\sin(n\pi x)\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\sin(n\pi x)dx \\
&= \frac{1}{n\pi}\,\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_{-1}^{1} \\
&= 0, n = 1, 2,
\end{aligned}
$$

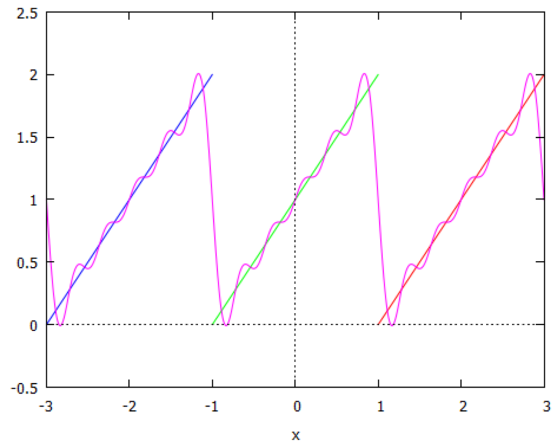
elde ederiz. Benzer biçimde,

$$
\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x+1)\sin(n\pi x)dx \\
&= -\frac{(x+1)}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\cos(n\pi x)dx \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

O halde

$$
\begin{aligned}
f_N &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(n\pi x) + b_n\sin(n\pi x) \\
&= 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x)
\end{aligned}
$$



Şekil 6.4: Örnek 6.3 ile verilen f fonksiyonu ve $N = 5$ için f_N kısmi toplamı.

açılımını elde ederiz. $N = 5$ için 2 periyotlu f fonksiyonu(doğrular) ve f_N kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği(pembe eğri) Şekil 6.4 ile verilmektedir.

ÖRNEK 6.4. *Örnek 6.3 de verilen periyodik fonksiyonun* $[-3, 3]$ *aralığındaki parçalı düzgün olduğunu gösteriniz.*

Şekil 6.4 deki doğrular Örnek 6.3 ile verilen periyodik f fonksiyonunun [-3,3] aralığı üzerindeki grafiğini temsil etmektedir. f fonksiyonunun $x = -1$ ve $x = 1$ noktalarında süreksiz olduğu görülmektedir. Fakat bu noktalarda fonksiyon sonlu limit değerlerine sahiptir:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^-} f(x) &= 2, \lim_{x\to -1^+} f(x) = 0, \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= 2, \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0. \end{aligned}$$

Diğer tüm noktalarda f süreklidir. O halde f fonksiyonu $[-3, 3]$ kapalı aralığında parçalı süreklidir. f fonksiyonun $[-3, 3]$ aralığındaki türevi ise

$$f'(x) = 1, x \in (-3, 3) \backslash \{-1, 1\}$$

olarak tanımlanır. O halde f' fonksiyonu $[-3, 3]$ aralığında $\{-3, -1, 1, 3\}$ noktaları dışında her yerde süreklidir. O halde f aynı zamanda parçalı düzgündür.

Öte yandan her N için $x = -1$ ve $x = 1$ noktalarında

$$f_N(1) = 1 = f_N(-1)$$

dir, dolayısısyla

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{N\to\infty} f_N(1) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 1^-} f(x) + \lim_{x\to 1^+} f(x)\right) \\ 1 &= \lim_{N\to\infty} f_N(-1) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -1^-} f(x) + \lim_{x\to -1^+} f(x)\right) \end{aligned}$$

olduğunu gözlemliyoruz. Bu sonuç genelde de doğrudur.

TEOREM 6.1. *Parçalı sürekli ve süreksizlik noktaları hariç parçalı düzgün periyodik f fonksiyonun Fourier seri açılımının kısmi toplamı f_N ise her x noktasında*

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \left(\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}\right)$$

dir, burada $f(x^-)$ ve $f(x^+)$ sırasıyla x noktasındaki soldan ve sağdan limitlerdir. f fonksiyonu x noktasında sürekli ise, bu limitler fonksiyonunun x noktasındaki değerine eşit olacağından

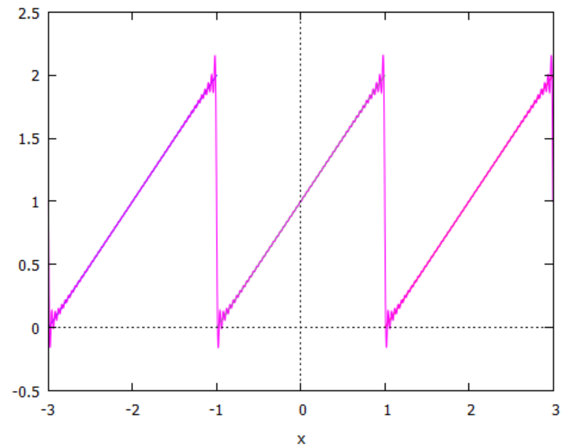
$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x)$$

sağlanır ve bu yakınsama noktasaldır.

N nin artan değerleri için f_N kısmi toplamının f ye yakınsamasını bekleriz. $N = 50$ için Örnek 6.3 ile verilen f fonksiyonu(doğrular) ve f_N kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği(sürekli eğri) Şekil 6.5 ile verilmektedir.

Şekil 6.5 deki sonucumuz Teorem 6.1 i doğrulamaktadır:

- $(-1, 1)$ aralığında $f(x) = x + 1$ olup, bu aralıktaki her noktada artan N değeri için $f_N(x) -> f(x)$ yakınsaklığını gözlemliyoruz.
- 2 birim periyotlu fonksiyonumuz $(-3, -1)$ aralığında 2 birim sola kaydırılarak $(x + 2) + 1 = x + 3$' e eşittir.
- Ayrıca periyodik fonksiyonumuz $(1, 3)$ aralığında 2 birim sağa kaydırılarak $(x - 2) + 1 = x - 1$'e eşittir.



Şekil 6.5: Örnek 6.3 ile verilen f fonksiyonu ve $N = 50$ için f_N kısmi toplamı.

- Bu aralıklarda da yakınsamayı gözlemliyoruz.
- $x = -1$ noktasında periyodik fonksiyonumuz sürekli değildir.

$$\begin{aligned} f(-1^-) &= \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x+3) = 2 \\ f(-1^+) &= \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x+1) = 0 \end{aligned}$$

olup,

$$\frac{f(-1^-) + f(-1^+)}{2} = 1$$

elde ederiz. Şekil 6.5 den de bu sonucu gözlemliyoruz.

- Benzer biçimde

$$f(1^-) = 2, f(1^+) = 0, \frac{f(-1^-) + f(-1^+)}{2} = 1$$

olup, bu sonuç Şekil 6.5 ile uyumludur.

ÖRNEK 6.5. $[-1, 1)$ *aralığında*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanan $p = 2$ periyotlu f fonksiyonunun Fourier seri açılımını belirleyiniz

- $$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} dx = 1$$

- $$a_n = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx = \int\limits_{0}^{1} \cos(n\pi x)dx = 0$$

- $$\begin{aligned} b_n &= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx = \int\limits_{0}^{1} \sin(n\pi x)dx \\ &= -\frac{1}{n\pi}(\cos(n\pi x)|_0^1) = -\frac{1}{n\pi}((-1)^n - 1) = \frac{1-(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned}$$

olup,

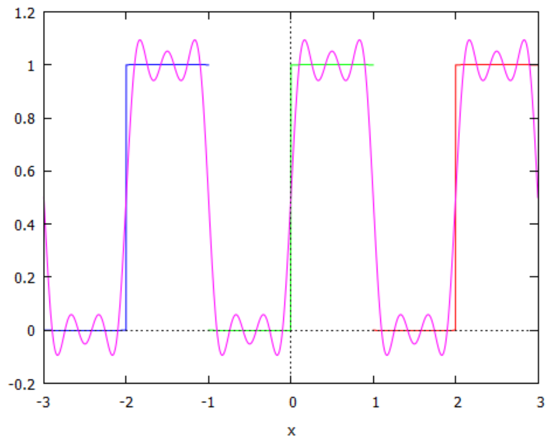
$$\begin{aligned} f_N(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(n\pi x) + b_n\sin(n\pi x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1-(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x) \end{aligned} \tag{6.19}$$

elde ederiz.

$N = 5$ için 2 periyotlu f fonksiyonu(mavi, yeşil, kırmızı) ve f_N kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği(pembe) Şekil 6.6 ile verilmektedir.

Şekil 6.6 den görüleceği üzere f fonksiyonu

- $[-3, -2), [-1, 0), [1, 2)$ aralıkları üzerinde 0 sabit değeri almakta ve
- $[-2, -1), [0, 1), [2, 3)$ aralıkları üzerinde 1 sabit değerini almaktadır.
- O halde fonksiyon parçalı süreklidir, herhangi bir kapalı aralıktaki süreksizlik noktaları söz konusu aralık içerindeki tamsayılar kümesidir. O halde f fonksiyonu parçalı süreklidir.
- Ayrıca, süreksizlik noktaları hariç diğer her noktada f türevlenebilirdir ve türevi de süreklidir çünkü sabittir. O halde fonksiyonun türevi de



Şekil 6.6: Örnek 6.5 ile verilen f fonksiyonu ve $N = 5$ için f_N kısmi toplamı.

parçalı süreklidir. Dolayısıyla f süreksizlik noktaları hariç heryerde parçalı düzgün bir fonksiyondur.

N nin artan değerleri için f_N kısmi toplamının f ye yakınsamasını bekleriz. $N = 50$ için Örnek 6.5 ile verilen f fonksiyonu ve f_N kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği Şekil 6.7 ile verilmektedir.

- Ayrıca $n_{çift}$ ile göstereceğimiz her çift tamsayı için

$$f(n_{cift}^-) = 0, f(n_{cift}^+) = 1$$

olup, Teorem 6.1 gereği

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} f_N(n_{cift}) = \frac{f(n_{cift}^-) + f(n_{cift}^+) = 1}{2} = \frac{1}{2}$$

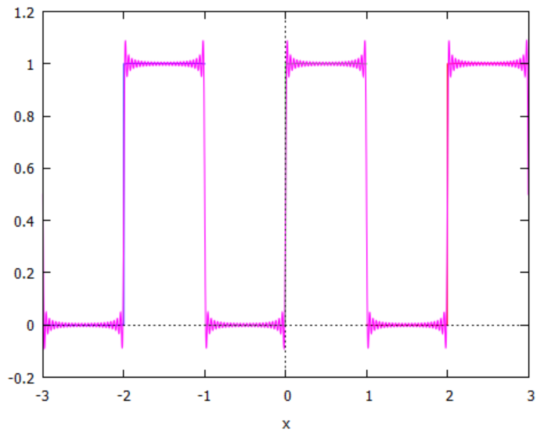
- n_{tekt} ile göstereceğimiz herhangi bir tek tamsayı için

$$f(n_{tek}^-) = 1, f(n_{tek}^+) = 0$$

Teorem 6.1 gereği

$$\lim_{N\to\infty} f_N(n_{cift}) = \frac{f(n_{tek}^-) + f(n_{tek}^+)}{2} = \frac{1}{2}$$

elde ederiz.



Şekil 6.7: Örnek 6.5 ile verilen f fonksiyonu ve $N = 50$ için f_N kısmi toplamı.

- Diğer noktalarda f süreklidir ve herhangi $x \in (n_{tek}, n_{çift})$ için

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) \to f(x) = 0$$

ve herhangi $x \in (n_{\text{çift}}, n_{tek})$ için

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) \to f(x) = 1$$

olduğunu gözlemliyoruz.

ÖRNEK 6.6. $[-1, 1)$ *aralığında*

$$f(x) = 1 - x^2, x \in [-1, 1)$$

ile tanımlanan $p = 2$ *periyotlu* f *fonksiyonunun Fourier seri açılımını belirleyiniz*

Önceki örneklerimizin aksine bu kez periyodik fonksiyonumuz süreklidir.

Şimdi Fourier katsayılarını hesaplayalım:

- $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = 2\int_0^1(1 - x^2)dx = 2(x - \frac{x^3}{3})|_0^1 = 4/3$

- Öncelikle kısmi integrasyonla

$$\begin{aligned}\int x\cos(n\pi x)dx &= \frac{n\pi x\sin(n\pi x)+\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\\ \int x^2\cos(n\pi x)dx &= \frac{(n^2\pi^2x^2-2)\sin(n\pi x)+2n\pi x\cos(n\pi x)}{n^3\pi^3}\end{aligned}$$

integrallerini hesaplayalım.. Bu durumda

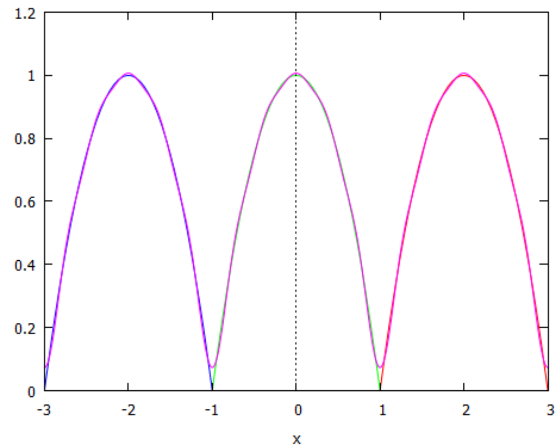
$$\begin{aligned}a_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx\\ &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos(n\pi x)dx\\ &= 2\int_{0}^{1}(1-x^2)\cos(n\pi x)dx\\ &= \frac{2}{n\pi}\left(\sin(n\pi x)-\frac{(n^2\pi^2x^2-2)\sin(n\pi x)+2n\pi x\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Bigg|_0^1\right)\\ &= \frac{2}{n\pi}(-\frac{2n\pi(-1)^n}{n^2\pi^2})=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}b_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx\\ &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)\sin(n\pi x)dx\\ &= 0\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde

$$\begin{aligned}f_N(x) &= \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)\\ &= \frac{2}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(n\pi x) \qquad (6.20)\end{aligned}$$



Şekil 6.8: Örnek 6.6 ile verilen fonksiyonun ve Fourier serisi kısmi toplam(N=5) grafiği

elde ederiz.

$N = 5$ için 2 periyotlu f fonksiyonu ve f_N kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği Şekil 6.8 ile verilmektedir.

Fonksiyon sürekli olduğu için önceki örneklerde olduğu üzere kısmi toplamlar grafiğinde sıçramalar söz konusu değildir. Ayrıca $N = 5$ için elde edilen Fourier kısmi toplam grafiği ve fonksiyon grafiği, süreksizlik içeren örneklere kıyasla tüm bölgede örtüşmektedir. Bu davranış düzgün yakınsamanın tipik bir örneğidir.

Bu durumu izah edebilmek için aşağıdaki teoremi inceleyelim:

TEOREM 6.2. *Sürekli ve parçalı düzgün periyodik f fonksiyonun Fourier seri açılımının kısmi toplamı f_N ise her x noktasında*

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x)$$

dir, ve bu yakınsama düzgündür.

Gerçekten de *Weierstrass M-testi* yardımıyla Örnek 6.6 ile elde edilen f_N kısmi toplamlar dizisi düzgün yakınsaktır.

Hatırlatma 6.1. *Eğer bir küme üzerinde*

$$|u_n(x)| \leq M_n$$

ve

$$\sum M_n$$

yakınsak bir sayı serisi ise bu taktirde

$$\sum u_n(x)$$

serisi söz konusu küme üzerinde düzgün yakınsaktır.

Örneğimiz için R de

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(n\pi x)\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}(\text{Euler sayısı})$$

yakınsak olup, $f_N(x)$ fonksiyonlar dizisi R üzerinde düzgün yakınsaktır, dolayısıyla

$$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(n\pi x)$$

düzgün yakınsaktır.

Özel olarak her $x \in [-1, 1]$ için

$$1 - x^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(n\pi x)$$

eldee ederiz. $x = 0$ için

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

veya

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{12}\pi^2$$

elde ederiz. Buradan da görüleceği üzere Fourier serileri bazı sayı serilerinin yakınsadığı değerleri belirleyebilmek için de kullanılır.

6.4 Tek ve çift fonksiyonlar ve Fourier serileri

Aşağıdaki kavramları hatırlayalım:

Hatırlatma 6.2. *Eğer* $\forall x \in [-a, a]$ *için*

$$f(-x) = f(x),$$

ise f *fonksiyonuna bu aralıkta çift fonksiyon ve eğer* $\forall x \in [-a, a]$ *için*

$$f(-x) = -f(x)$$

ise f *fonksiyonuna söz konusu aralıkta tek fonksiyon adı verilir.*

Hatırlatma 6.3. *Eğer* f *fonsiyonu* $[-a, a]$ *aralığında çift ise*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \tag{6.21}$$

sağlanır. Çünkü

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

eşitliğinde sağdaki birinci integralde $u = -x$ *dönüşümü yaparak,* f *nin çift olduğunu ve kullanmak suretiyle*

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(x)dx &= -\int_{a}^{0} f(-u)du \\ &= -\int_{a}^{0} f(u)du \\ &= \int_{0}^{a} f(u)du\end{aligned}$$

elde ederiz, burada son eşitlikte integral sınırlarının yer değişiminin, interarilin işaretinin değişimine neden olduğu kuralını kullandık. O halde f *çift ise (6.21) kuralını elde ederiz.*

Hatırlatma 6.4. *Eğer* f *fonsiyonu* $[-a, a]$ *aralığında tek ise*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \tag{6.22}$$

sağlanır. Çünkü

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

eşitliğinde sağdaki birinci integralde $u = -x$ *dönüşümü yaparak,* f *nin tek olduğunu ve kullanmak suretiyle*

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(x)dx &= -\int_{a}^{0} f(-u)du \\ &= \int_{a}^{0} f(u)du \\ &= -\int_{0}^{a} f(u)du\end{aligned}$$

elde ederiz, burada son eşitlikte integral sınırlarının yer değişiminin, interarilin işaretinin değişimine neden olduğu kuralını kullandık. O halde f tek ise (6.22) kuralını elde ederiz.

Hatırlatma 6.5. *Tek fonksiyonun integrali çift ve çift fonksiyonun integrali tek fonksiyondur.*

Hatırlatma 6.6. *Tek fonksiyon ile çift fonksiyonun çarpımı tek, tek fonksiyonla tek fonksiyonun çarpımı çift fonksiyondur.*

Sonuç 6.1. *Eğer* f *fonsiyonu* $[-a, a]$ *aralığında tek ise,* $cos(x)$ *fonksiyonu çift olduğu için, çarpımları tek ve dolayısıyla*

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx = 0$$

dır.

Sonuç 6.2. *Eğer* f *fonsiyonu* $[-a, a]$ *aralığında çift ise,* $sin(x)$ *fonksiyonu tek olduğu için, çarpımları tek ve dolayısıyla*

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx = 0$$

dır.

O halde Örnek 6.6 te

$$b_n = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \sin(n\pi x) dx = 0$$

olduğunu integrali hesaplamadan da kolayca görebiliriz.

Sonuç 6.3. *Eğer f fonksiyonu tek ise (6.16) ile verilen Fourier açılımının katsayıları*

$$\begin{aligned} a_n &= 0, n = 0, 1, \cdots && (6.23) \\ b_n &= \int_{-1}^{1} f(x) \sin(n\pi x) dx \\ &= 2\int_{0}^{1} f(x) \sin(n\pi x) dx, n = 1, 2, \cdots && (6.24) \end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

Sonuç 6.4. *Eğer f fonksiyonu çift ise (6.16) ile verilen Fourier açılımının katsayıları*

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^{1} f(x) \cos(n\pi x) dx && (6.25) \\ &= 2\int_{0}^{1} f(x) \cos(n\pi x) dx, n = 0, 1, 2, \\ b_n &= 0, n = 1, 2, \cdots && (6.26) \end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

ÖRNEK 6.7. $[-1, 1)$ *aralığında*

$$f(x) = x^3, x \in [-1, 1)$$

ile tanımlanan $p = 2$ *periyotlu* f *fonksiyonunun Fourier seri açılımını belirleyiniz ve* $[-3, 3]$ *aralığında Fourier kısmi toplam grafiğini* $N = 5, 50$ *değerleri için çiziniz. Teorem 6.1 yardımıyla Fourier serisinin yakınsaklığını araştırınız.*

f tek olduğu için

$$a_n = 0, n = 0, 1, 2,$$

ve art arda kısmi integerasyon yardımıyla hesaplayabiliriz b_n leri hesaplayabiliriz: Öncelikle

$$\begin{aligned}
\int x\sin(n\pi x)dx &= \frac{\sin(n\pi x) - n\pi x\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2},\\
\int x^2\sin(n\pi x)dx &= \frac{2n\pi x\sin(n\pi x) + (2-(n\pi x)^2)\cos(n\pi x)}{(n\pi)^3},\\
\int x^3\sin(n\pi x)dx &= \frac{(3n^2\pi^2x^2-6)\sin(n\pi x) + (6n\pi x - n^3\pi^3x^3)\cos(n\pi x)}{n^4\pi^4}
\end{aligned}$$

integrallerinden(Alıştırma 2),

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_0^1 x^3\sin(n\pi x)dx\\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n^2\pi^2-6)}{n^3\pi^3}\\
&= (-1)^{n+1}(\frac{1}{n\pi} - \frac{6}{n^3\pi^3})
\end{aligned}$$

katsayılarını elde ederiz. O halde

$$f = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{1}{n\pi} - \frac{6}{n^3\pi^3})\sin(n\pi x)$$

elde ederiz.

$N = 5$ için 2 periyotlu f fonksiyonu ve f_N kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği Şekil 6.9 ile verilmektedir.

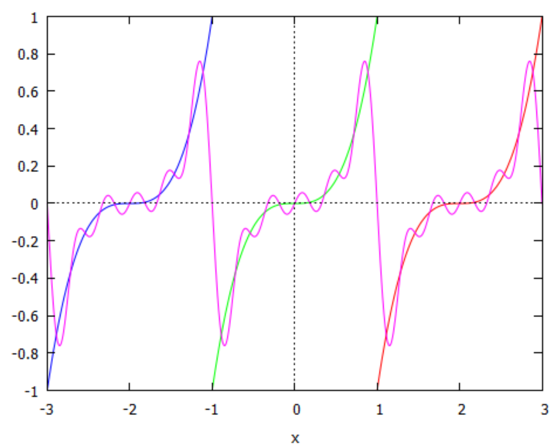
$p = 2$ periyotlu f fonksiyonu parçalı sürekli ve f' de her tek sayı hariç parçalı süreklidir. O halde fonksiyonumuz Teorem 6.1 in hipotezlerini sağlar, dolayısıyla her tek tamsayıda Fouirer serisi her tek tamsayı için

$$\lim_{N\to\infty} f_N(n_{tek}) = \frac{f(n_{tek}^+) + f(n_{tek}^-)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

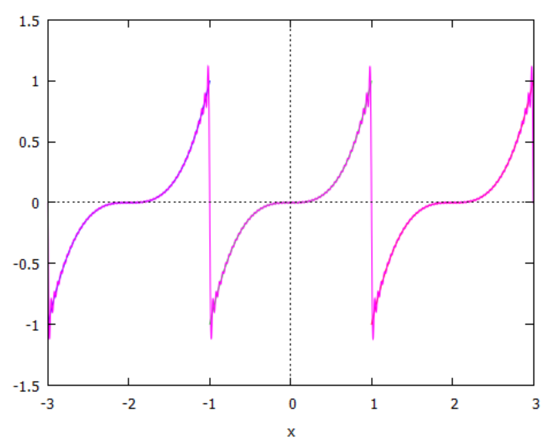
ve diğer her bir nokta için

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x)$$

dir.$N = 50$ çin 2 periyotlu f fonksiyonu ve f_N kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği Şekil 6.10 ile verilmektedir.



Şekil 6.9: Örnek 6.7 ile verilen fonksiyonun ve Fourier serisi kısmi toplam(N=5) grafiği



Şekil 6.10: Örnek 6.7 ile verilen fonksiyonun ve Fourier serisi kısmi toplam($N = 50$) grafiği

Alıştırmalar 6.1.

1. Aşağıda verilen fonksiyonların periyotlarını belirleyiniz

   (a) $\sin(3x)$

   (b) $\sin(2x+1)$

   (c) $\cos(x/2-1)$

   (d) $e^{2ix}, i=\sqrt{-1}$

2. Aşağıda verilen integralleri kısmi integrasyon yardımıyla hesaplayınz.

   (a) $$\int x\cos(n\pi x)dx$$

   (b) $\int x\sin(n\pi x)dx$

   (c) $\int x^2\sin(n\pi x)dx$

   (d) $\int x^3\sin(n\pi x)dx$

   (e) $$\int x^2\cos(n\pi x)dx$$

3. Aşağıdaki verilen fonksiyon çiftlerinin $[-1,1]$ aralığında ortogonal olduğunu gösteriniz.

   (a) $$\{1, \sin(\pi x)\}$$

   (b) $$\{1, \cos(\pi x)\}$$

   (c) $$\{\sin(\pi x), \sin(2\pi x)\}$$

   (d) $$\{\sin(\pi x), \cos(\pi x)\}$$

   (e) $$\{\cos(\pi x), \cos(2\pi x)\}$$

4. Aşağıda verilen fonksiyonların karşılarında verilen aralıklar üzerinde parçalı sürekli olup olmadıklarını araştırınız.

(a) $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = sgn(x), -4 < x < 4$

(c) $f(x) = [x], -4 < x < 4, [x]$: tamdeğer fonksiyonu olup

$$[x] = \{n : n \leq x < n+1, n \in Z\}$$

ile tanımlıdır.

(d) $f(x) = 1/x, -1 < x < 1$

5. Soru 4 te verilen fonksiyonların parçalı düzgün olup olmadıklarını araştırınız.

6. Aşağıda verilen ve 2 periyotlu olarak tanımlanan fonksiyonların $[-3, 3]$ aralığında grafiklerini çiziniz

   (a) $f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 0 \\ 2 & 0 < x < 1 \end{cases}$

   (c) $f(x) = x, -1 < x < 1$

   (d) $f(x) = |x|, -1 < x < 1$

7. Soru 6 daki fonksiyonların $[-3, 3]$ aralığı üzerindeki süreksizlik noktalarını belirleyiniz ve grafik üzerinde işaretleyiniz.

8. Soru 7 de elde ettiğiniz süreksizlik noktalarındaki sağdan ve soldan limitlerini hesaplayınız

9. Soru 6 da verilen fonksiyonların Fourier seri açılımlarını hesaplayınız. Tek veya çift fonksiyon açılımlarında sadece sıfırdan farklı katsayıları hesaplayınız.

10. Soru 9 da elde ettiğiniz Fourier serilerinin süreksizlik noktalarında hangi noktaya yakınsadığını ilgili teorem yardımıyla belirleyiniz.

11. Soru 9 da elde ettiğiniz Fourier serilerinin $[-3, 3]$ aralığında grafiklerini çiziniz.

6.5 Kompleks katsayılı Fourier açılımı

Esasen katsayıların kompleks olduğu eşdeğer bir açılım daha mevcuttur: (??) de

$$\lambda = k^2, k > 0$$

biçiminde aradığımız özdeğeri denklemde yerine yazarak

$$y'' + k^2 y = 0$$

elde ederiz.

- $k \neq 0$ için bu denklemin lineer bağımsız kompleks çözümler kümesini, $y = e^{rx}$ biçimde arayarak

  $$r^2 + k^2 = 0$$

  denklemini sağlayan

  $$r_1 = ik, r_2 = -ik$$

  değerleri ile

  $$\left\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\right\} = \left\{e^{ikx}, e^{-ikx}\right\} \tag{6.27}$$

  dir. Buradan

  $$y = \alpha_k e^{ikx} + \beta_k e^{-ikx}$$

  genel çözümünü elderiz.Eğer

  $$k = k_n = n\pi, 1, 2, \cdots$$

  ise (6.6) ile verilen Periyodik sınır şartlarının sağlanması için gerek ve yeter şart

  $$e^{-ik} - e^{ik} = 0$$

  sağlanmasıdır(Alıştırma). Bu kriter ise ancak ve ancak $k = k_n = n\pi, n = 1, 2, \cdots$ olmasını gerektirir. O halde özfonksiyonlarımız 6.27 nin periyodik sınır şartlarını sağlayan $k_n = n\pi$ değerleri için

  $$u_n = e^{in\pi x}, v_n = e^{-in\pi x}, n = 1, 2, ...$$

  olarak elde ederiz.

- $k = 0$ için elde edeceğimiz sabit çözümü bu kez 1 alalım.

- Bu durumda
$$\left\{1, e^{in\pi x}, e^{-in\pi x}\right\}, n = 1, 2, \cdots \tag{6.28}$$
özfonksiyonlar kümesini elde ederiz. Bu kümenin periyodu da 2 ye eşittir.

- Esasen reel elemanlardan oluşan (6.9) kümesi kompleks elemanlı (6.28) kümesinin elemanlarının uygun bir lineer kombinasyonu ile elde edilen kümedir.

- (6.28) kümesinin de $[-1, 1]$ aralığı üzerinde ortogonal olduğunu kolayca görebiliriz(Alıştırma 1),

- Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonlar kümesi olarak bu küme de tamdır. O halde verilen 2 periyotlu periyodik bir fonksiyonu
$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x}, c_n \in C \tag{6.29}$$
olarak ifade edebiliriz. 6.29 nın kher iki yanının seçilen bir n tamsayısı için $e^{in\pi x}$ ile $[-1, 1]$ üzerinde iç çarpımını alarak,
$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-in\pi x}dx$$
eldee ederiz.

- Reel ve kompleks Fourier katsayıları arasında
$$\begin{aligned} a_n &= 2\,\mathrm{Re}(c_n), n = 0, 1, \cdots \\ b_n &= -2\,\mathrm{Im}(c_n), n = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{6.30}$$
bağıntısı mevcuttur(Alıştırma 2).

6.6 $[0, 1)$ aralığı üzerinde Fourier kosinüs ve sinüs serileri

f fonksiyonunun $[0, 1)$ aralığı üzerindeki Fourier sinüs serisi
$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

Kanonik RSL probleminin özfonksiyonları olarak belirlediğimiz

$$y_n = \sin(n\pi x), n = 1, 2, ...$$

kümenin *tamlığını* esas alır. Diğer bir deyimle bu fonksiyonlar kümesi 2 *ortak periyoduna* sahip ve *tek* fonksiyonlar oldukları için

$[-1, 1)$ aralığında tek olan ve

$$f_{tek}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ -f(-x) & -1 < x < 0 \end{cases}$$

ile tanımlanan f_{tek} fonksiyonunun Fourier seri açılımı

$$\begin{aligned} f_{tek}(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir, çünkü $a_n = 0, n = 0, 1, \cdots$ dır. f_{tek} fonksiyonuna f nin $[-1, 0)$ aralığına *tek genişlemesi* adı verilir.

f_{tek} fonksiyonunun tanımı gereği $x \in [0, 1)$ için

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) \tag{6.31}$$

dir ve

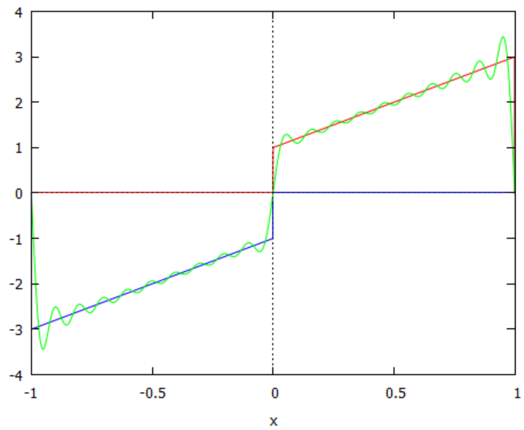
$$b_n = 2\int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx \tag{6.32}$$

olarak elde ederiz. (6.31) serisine f nin *Fourier sinüs serisi* adı verilir.

ÖRNEK 6.8.

$$f(x) = 2x + 1, x \in [0, 1)$$

ile tanımlanan $p = 2$ *periyotlu Fourier sinüs seri açılımını belirleyiniz.*



Şekil 6.11: Örnek 6.8 ile verilen fonksiyon ve $[-1,0]$ aralığına çift genişlemesi ile $[-1,1]$ aralığı üzerinde f_{10} kısmi toplamı

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx \\ &= 2\int_0^1 (2x+1)\sin(n\pi x)dx \\ &= 2(\frac{1}{n\pi} - \frac{3(-1)^n}{n\pi}) \end{aligned}$$

olup

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1-3(-1)^n)}{n}\sin(n\pi x)$$

elde ederiz.

Şekil 6.11 da f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı üzerindeki grafiği,f nin tek genişlemesinin $[-1,0]$ aralığı üzerindeki grafiği ve Fourier sinüs seri açılımının f_N kısmi toplamı $N=10$ için hesaplanarak sunulmaktadır.

Fonksiyonumuz Teorem6.1 in hipotezlerini sağlamaktadır, o halde özel olarak her k tamsayı için

$$f(k) = 0 = \lim_{N\to\infty} f_N(k)$$

sağlanmalıdır ki bu sonucun doğruluğu açıkça görülmektedir. Grafiğimiz de bu sonucu doğrulamaktadır.

Benzer biçimde f fonksiyonunun $[0, 1)$ aralığı üzerindeki Fourier kosinüs serisi

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y'(0) &= y'(1) = 0 \end{aligned}$$

Kanonik RSL probleminin özfonksiyonları olarak belirlediğimiz

$$y_0 = 1/2, y_n = \cos(n\pi x), n = 1, 2, ...$$

kümenin *tamlığını* esas alır. Diğer bir deyimle bu fonksiyonlar kümesi 2 *ortak periyoduna* sahip ve *çift* fonksiyonlar oldukları için

$[-1, 1)$ aralığında çift olan ve

$$f_{\text{çift}}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ f(-x) & -1 < x < 0 \end{cases}$$

ile tanımlanan $f_{\text{çift}}$ fonksiyonunun Fourier seri açılımı,

$$\begin{aligned} f_{\text{çift}}(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir, çünkü $b_n = 0, n = 0, 1, \cdots$ dır. $f_{\text{çift}}$ fonksiyonuna f nin $[-1, 0]$ aralığına *çift genişlemesi* adı verilir.

$f_{\text{çift}}$ fonklsiyonunun tanımı gereği $x \in [0, 1)$ için

$$f_{\text{çift}}(x) = f(x)$$

dir ve dolaysıyla $x \in [0, 1)$ için

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) \tag{6.33}$$

dir ve

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx, n = 0, 1, 2, \cdots \tag{6.34}$$

olarak elde ederiz.

ÖRNEK 6.9.

$$f(x) = 2x+1, x \in [0,1)$$

ile tanımlanan $p=2$ periyotlu Fourier cosinüs seri açılımını belirleyiniz.

Öncelikle Fourier cosinüs açılımının katsayılarını elde edelim:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2\int_0^1 f(x)dx \\
&= 2\int_0^1 (2x+1)dx = 2(x^2+x\big|_0^1) \\
&= 4, \\
a_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx \\
&= 2\int_0^1 (2x+1)\cos(n\pi x)dx \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)
\end{aligned}$$

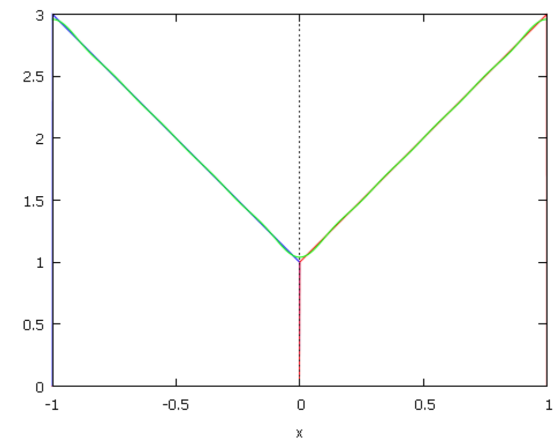
elde ederiz. O halde f

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi x) \\
&= 2 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos(n\pi x)
\end{aligned}$$

Fourier kosinüs açılımını elde ederiz.

Şekil 6.12 da f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı üzerindeki grafiği,f nin çift genişlemesinin $[-1,0]$ aralığı üzerindeki grafiği ve Fourier cosinüs seri açılımının f_N kısmi toplamı $N=10$ için hesaplanarak sunulmaktadır.

Çift genişlemenin sürekli ve parçalı düzgün olduğuna dikkat edelim. O halde Teorem 6.2 gereğince yakınsama her noktada ve düzgün olarak gerçekleşmelidir. Gerçekten de



Şekil 6.12: Örnek 6.9 ile verilen fonksiyon ve [-1,0] aralığına çift genişlemesi ile [-1,1] aralığı üzerinde f_{10} kısmi toplamı

$$\left|\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos(n\pi x)\right| \leq \frac{2}{n^2}$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

yakınsak olduğundan

$$f_N(x) = 2 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos(n\pi x)$$

her x için düzgün yakınsaktır. Özel olarak $x = 0$ için

$$f(0) = 1 = 2 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

veya

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{4}$$

sağlanmalıdır.

Alıştırmalar 6.2.

1. (6.28) kümesinin $[-1,1]$ aralığı üzerinde ortogonal olduğunu gösteriniz.
2. Reel ve kompleks Fourier seri açılımlarının katsayıları arasından (6.30) ile belirtilen bağıntıların geçerli olduğunu gösteriniz.
3. $f(x) = x, -1 < x < 1$ ile tanımlanan 2 periyotlu fonksiyonun reel ve kompleks katsayılı Fourier açılımlarını hesaplayınız ve sonuçlarınızı karşılaştırınız.
4. Aşağıda verilen fonksiyonların $[-1,0]$ aralığına tek genişlemelerini elde ederek $[-1,1]$ aralığı üzerindeki grafiklerini çiziniz.
   (a) $f(x) = x,\ 0 < x < 1$
   (b) $f(x) = cos(\pi x/2), 0 < x < 1$
   (c) $f(x) = x^2, 0 < x < 1$
5. Soru 4 de veriieln fonksiyonların $[0,1]$ aralığı üzerindeki Fourier sinüs serilerini belirleyiniz.
6. Soru 4 de verilen fonksiyonların $[-1,1]$ aralığı üzerindeki Fourier serilerini belirleyiniz.
7. Soru 5 ve 6 daki cevaplarınızı karşılaştırınız. Ne gözlemliyorsunuz?
8. Aşağıda verilen fonksiyonların $[-1,0]$ aralığına çift genişlemelerini elde ederek $[-1,1]$ aralığı üzerindeki grafiklerini çiziniz.
   (a) $f(x) = x,\ 0 < x < 1$
   (b) $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1/2 \\ x + 1/2 & 1/2 < x < 1 \end{cases}$,
   (c) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1/2 \\ 1/2 & 1/2 < x < 1 \end{cases}$
9. Soru 8 de verilen fonksiyonların $[0,1]$ aralığı üzerindeki Fourier kosinüs serilerini belirleyiniz.
10. Soru 8 de verilen fonksiyonların $[-1,1]$ aralığı üzerindeki Fourier serilerini belirleyiniz.
11. Soru 9 ve 10 daki cevaplarınızı karşılaştırınız. Ne gözlemliyorsunuz?

6.7 $[-b, b]$ aralığında Fourier serisi

Önceki bölümde $[-1, 1]$ aralığı üzereinde gerçekleştirdiğimiz Fourier açılımını herhangi $b > 0$ için$[-b, b]$ aralığına genelleştirebiliriz. Bu kez

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y(-b) &= y(b), \\ y'(-b) &= y'(b) \end{aligned} \tag{6.35}$$

ile verilen Periyodik Sturm-Liouvilleprobleminin ortogonal olan özfonksiyonları olarak

$$\begin{aligned} u_0 &= 1/2, \\ u_n(x) &= \cos(n\pi x/b), v_n(x) = \sin(n\pi x/b), n = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{6.36}$$

kümesinin tamlığı ile $2b$ periyotlu parçalı sürekli f fonksiyonunun Fourier açılımını

$$f = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{b}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{b}) \tag{6.37}$$

olarak elde ederiz. $[-1, 1]$ aralığı üzerinde gerçekleştirdiğimiz işlemlere paralel olarak Fourier katsayılarını

$$\int_{-b}^{b} \cos^2(\frac{n\pi x}{b})dx = \int_{-b}^{b} \sin^2(\frac{n\pi x}{b})dx = b \tag{6.38}$$

bağıntısını kullanarak

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\int_{-b}^{b} f(x)u_0(x)dx}{\int_{-b}^{b} u_0^2(x)dx} = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} f(x)dx \\ a_n &= \frac{\int_{-b}^{b} f(x)u_n(x)dx}{\int_{-b}^{b} u_n^2(x)dx} = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{b})dx, n = 1, \cdots \end{aligned}$$

veya

$$a_n = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{b})dx, n = 0, 1, \cdots \tag{6.39}$$

$$b_n = \frac{\int_{-b}^{b} f(x)v_n(x)dx}{\int_{-b}^{b} v_n^2(x)dx} = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{b})dx, n = 1, 2, \cdots \tag{6.40}$$

olarak elde ederiz ki bu açılım f nin $[-b, b]$ *aralığındaki Fourier seri açılımıdır.*

Özetle

- $[-b, b]$ aralığında tanımlı $2b$ periyotlu parçalı sürekli f fonksiyonunun Fourier açılımı

$$f = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi x}{b}) + b_n\sin(\frac{n\pi x}{b}) \tag{6.41}$$

olarak tanımlanır, burada

$$a_n = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{b})dx, n = 0, 1, \cdots \tag{6.42}$$

ve

$$b_n = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{b})dx, n = 1, \cdots \tag{6.43}$$

reel değerli Fourier katsayılarıdır.

6.8 [0,b] aralığında Fourier sinüs ve kosinüs serileri

Önceki bölümde $[0,1]$ aralığı üzereinde gerçekleştirdiğimiz Fourier sinüs ve kosinüs açılımını herhangi $b>0$ için$[0,b]$ aralığına genelleştirebiliriz. Bu kez

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y(0) &= 0, y(b) = 0 \end{aligned}$$

ile verilen Regüler Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. Bu problemin özfonksiyonları $[0,b]$ aralığında ortogonal olan $2b$ periyotlu özfonksiyonları olan

$$\{v_n = \sin(n\pi x/b)\}_{n=1}^{\infty}$$

olup, bu küme $[0,b]$ aralığında ortogonal bir kümedir ve ortak periyodu $2b$ dir.

Ayrıca önceki bölümde incelediğimiz üzere bu küme tamdır: $[0,b]$ aralığı üzerinde tanımlanan f fonksiyonu $[-b,0]$ aralığına tek olarak genişleterek elde edeceğimiz $2b$ periyotlu parçalı sürekli f_{tek} fonksiyonun Fourier seri açılımını

$$f_{tek}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{b})$$

olarak elde ederiz.$[0,b]$ aralığı üzerinde $f_{tek}(x) = f(x)$ olduğundan $[0,b]$ üzerinde

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{b}) \tag{6.44}$$

açılımını elde ederiz ki bu açılım f *nin* $[0,b]$ *aralığı üzerindeki Fourier sinüs açılımıdır.*

Ancak $[0,1]$ aralığı üzerinde gerçekleştirdiğimiz işlemlere paralel olarak Fourier katsayılarını

$$\int_0^b \cos^2(\frac{n\pi x}{b})dx = \int_0^b \sin^2(\frac{n\pi x}{b})dx = b/2 \tag{6.45}$$

bağıntısını kullanarak(Alıştırma 11)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\int\limits_{-b}^{b} f_{tek}(x) v_n(x) dx}{\int\limits_{-b}^{b} v_n^2(x) dx} \\ &= \frac{1}{b}\int\limits_{-b}^{b} f_{tek}(x)\sin(\frac{n\pi x}{b})dx, n = 1, 2, \cdots \\ &= \frac{2}{b}\int\limits_{0}^{b} f_{tek}(x)\sin(\frac{n\pi x}{b})dx, n = 1, 2, \cdots \\ &= \frac{2}{b}\int\limits_{0}^{b} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{b})dx, n = 1, 2, \cdots \qquad (6.46) \end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

Özetle

- $[0, b]$ aralığında tanımlı f fonksiyonunun **Fourier sinüs açılımı**

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{b}) \qquad (6.47)$$

olarak tanımlanır, burada

$$b_n = \frac{2}{b}\int\limits_{0}^{b} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{b})dx, n = 1, 2, \cdots \qquad (6.48)$$

ile verilen Fourier sinüs katsayılarıdır.

Verilen f fonksiyonunun

```
(%i1)  fouriersin(f,b,N):=block([x],
       declare(n,integer),
       bn:2/b·integrate(f(x)·sin(%pi·n·x/b),x,0,b),display(bn),
       toplam(x):=sum(bn·sin(%pi·n·x/b),n,1,N),
         g(x):=if x>0 and x<b then f(x) else 0,
         h(x):=if x>−b and x<0 then −f(−x) else 0,
       plot2d([h,g,toplam],[x,−b,b],[legend,false])
      )$
```

Şekil 6.13: Fourier sinüs açılımı için Maxima bloku

- $[0, b]$ aralığı üzerinde Fourier sinüs açılımının verilen N pozitif tamsayısı için kısmi toplamını hesaplayarak
- $[0, b]$ aralığı üzerinde kısmi toplamı ile
- $[0, b]$ aralığı üzerinde aralığında fonksiyonun ve $[-1, 0]$ aralığında tek genişlemesinin grafiğini çizen Maxima bloku Şekil 6.13 ile verilmektedir.

Benzer biçimde bu kez

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y'(0) &= 0, y'(b) = 0 \end{aligned}$$

ile verilen Periyodik Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. Bu problemin özfonksiyonları

$$v_0 = 1/2, v_n = \cos(n\pi x/b), n = 1, 2, \cdots$$

olup, bu küme $[0, b]$ aralığında ortogonal bir kümedir ve ortak periyodu $2b$ dir.

Ayrıca önceki bölümde incelediğimiz üzere bu küme tamdır: $[0, b]$ aralığı üzerinde tanımlanan f fonksiyonu $[-b, 0]$ aralığına çift olarak genişleterek elde edeceğimiz $2b$ periyotlu parçalı sürekli $f_{\text{çift}}$ fonksiyonun Fourier seri açılımını bu ortogonal kümenin elemanlarının lineer kombinasyonu olarak

$$f_{\text{çift}}(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{b})$$

biçiminde ifade edebiliriz.$[0,b]$ aralığı üzerinde $f_{\text{çift}}(x)=f(x)$ olduğundan $[0,b]$ üzerinde

$$f=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi x}{b}) \tag{6.49}$$

açılımını elde ederiz ki bu açılım f **nin** $[0,b]$ **üzerindeki Fourier kosinüs açılımıdır.**

$[0,1]$ aralığı üzerinde gerçekleştirdiğimiz işlemlere paralel olarak (6.45) bağıntısını kullanarak Fourier katsayıların□

$$a_n = \frac{\int\limits_{-b}^{b} f_{\text{çift}}(x)u_n(x)dx}{\int\limits_{-b}^{b} u_n^2(x)dx} \tag{6.50}$$

$$= \frac{1}{b}\int\limits_{-b}^{b} f_{\text{çift}}(x)\cos(\frac{n\pi x}{b})dx, n=0,1,2,\cdots \tag{6.51}$$

$$= \frac{2}{b}\int\limits_{0}^{b} f_{\text{çift}}(x)\cos(\frac{n\pi x}{b})dx, n=0,1,2,\cdots \tag{6.52}$$

$$= \frac{2}{b}\int\limits_{0}^{b} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{b})dx, n=0,1,2, \tag{6.53}$$

olarak elde ederiz.

Özetle

- $[0,b]$ aralığında tanımlı f fonksiyonunun **Fourier kosinüs açılımı**

$$f=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi x}{b}) \tag{6.54}$$

ile tanımlanır, burada

$$a_n=\frac{2}{b}\int\limits_{0}^{b} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{b})dx, n=1,2,\cdots \tag{6.55}$$

```
(%i1)   fouriercos(f,b,N):=block([x],
        declare(n,integer),
          a0:2/b*integrate(f(x),x,0,b),display(a0),
        an:2/b*integrate(f(x)*cos(%pi*n*x/b),x,0,b),display(an),
        toplam(x):=a0/2+sum(an*cos(%pi*n*x/b),n,1,N),
          g(x):=if x>0 and x<b then f(x) else 0,
          h(x):=if x>-b and x<0 then f(-x) else 0,
        plot2d([h,g,toplam],[x,-b,b],[legend,false])
        )$
```

Şekil 6.14: Fourier cosinüs açılımı için Maxima bloku

ile tanımlanan Fourier kosinüs katsayılarıdır.

▲

ÖRNEK 6.10. *Verilen f fonksiyonunun*

- $[0, b]$ aralığı üzerinde Fourier cosinüs açılımının verilen N pozitif tamsayısı için kısmi toplamını hesaplayarak
- $[0, b]$ aralığı üzerinde kısmi toplamı ile
- $[0, b]$ aralığı üzerinde aralığında fonksiyonun ve $[-b, 0]$ aralığında çift genişlemesinin grafiğini çizen Maxima bloku Şekil (6.14) ile verilmektedir.

6.9 $[a, b]$ aralığı üzerinde Fourier serisi

Son olarak herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı parçalı sürekli ve $(b - a)$ periyotlu f fonksiyonunun Fourier seri açılımını hesaplayalım.

Bu amaçla

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y(a) &= y(b) \\ y'(a) &= y'(b) \end{aligned}$$

periyodik Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarına ihtiyacımız olacak.

- $\lambda_0 = 0$ özdeğer ve $y_0 = 1/2$ özfonksiyondur.
- $\lambda = k^2, k > 0$ biçiminde özdeğer arayalım.

$$y = c_k \sin(kx) + d_k \cos(kx)$$

çözümünden $y(a) = y(b) \Rightarrow$

$$c_k \sin(ka) + d_k \cos(ka) = c_k \sin(kb) + d_k \cos(kb)$$

veya

$$(\sin(ka) - \sin(kb))c_k + (\cos(ka) - \cos(kb))d_k = 0 \tag{6.56}$$

elde ederiz.

$$y' = kc_k \cos(kx) - kd_k \sin(kx)$$

den $y'(a) = y'(b) \Rightarrow$

$$kc_k \cos(ka) - kd_k \sin(ka) = kc_k \cos(kb) - kd_k \sin(kb)$$

veya

$$(\cos(ka) - \cos(kb))c_k + (\sin(kb) - \sin(ka))d_k = 0 \tag{6.57}$$

elde ederiz. (6.56),(6.57) homojen bir lineer sistemdir ve sıfırdan farklı çözüme sahip olabilmesi için katsayı matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır:

$$\det \begin{pmatrix} \sin(ka) - \sin(kb) & \cos(ka) - \cos(kb) \\ \cos(ka) - \cos(kb) & \sin(kb) - \sin(ka) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\sin(ka) - \sin(kb))^2 + (\cos(ka) - \cos(kb))^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sin(ka) = \sin(kb) \text{ ve } \cos(ka) = \cos(kb)$$

veya $k = k_n$

$$k_n b = k_n a + 2n\pi$$

$$\Rightarrow k_n = \frac{2n\pi}{b-a}, n = 1, 2,$$

elde ederiz. O halde özdeğerleri

$$\lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{b-a}\right)^2, n = 0, 1, 2, ...$$

olarak elde ederiz. Özfonksiyonları ise

$$y = c_k \sin(k_n x) + d_k \cos(k_n x)$$

veya lineer bağımsız alt küme olarak

$$\begin{aligned} u_n &= \cos(k_n x) = \cos(\frac{2n\pi}{b-a}x), n = 1, 2, \cdots \\ v_n &= \sin(k_n x) = \sin(\frac{2n\pi}{b-a}x), n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

- Böylece $[a, b]$ aralığı üzerinde ortogonal olan

$$\left\{ 1/2, \cos(\frac{2\pi}{b-a}x), \sin(\frac{2\pi}{b-a}x), \cos(\frac{4\pi}{b-a}x), \sin(\frac{4\pi}{b-a}x), \cdots \right\} \quad (6.58)$$

kümesini eldederiz(Alıştırma 12). Ortogonal olan bu kümenin ortak periyodu $b - a$ dır.(6.58) kümesi tamdır, dolayısıyla f nin Fourier serisi bu kümenin elemanlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilir. Ayrıca

$$\int_a^b \cos(\frac{2n\pi}{b-a}x)^2 dx = \frac{b-a}{2} \quad (6.59)$$

dir.

Özetle

- $[a, b]$ aralığında tanımlı $b - a$ periyotlu parçalı sürekli f fonksiyonunun **Fourier seri açılımı**,(6.58) kümesi yardımıyla

$$f = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2n\pi}{b-a}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{b-a}x) \quad (6.60)$$

ile tanımlanır, burada

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos(\frac{2n\pi}{b-a}x)dx, n = 0, 1, \cdots, \quad (6.61)$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin(\frac{2n\pi}{b-a}x)dx, n = 1, 2, \cdots \quad (6.62)$$

reel Fourier katsayılarıdır.

- Özel olarak $a = 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı b periyotlu f fonksiyonun Fourier seri açılımı

$$f = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2n\pi}{b}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{b}x) \tag{6.63}$$

ile tanımlanır, burada

$$a_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\cos(\frac{2n\pi}{b}x)dx, n = 0, 1, \cdots \tag{6.64}$$

$$b_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\sin(\frac{2n\pi}{b}x)dx, n = 1, 2, \cdots \tag{6.65}$$

reel Fourier katsayılarıdır.

▲

-

Uyarı. *$[0, b]$ aralığında tanımlı f fonksiyonunun Fourier açılımının (6.64) ile verilen a_n katsayıları ile f fonksiyonunun $[0, b]$ aralığı üzerindeki Fourier cosinüs açılımının (6.55) ile verilen katsayılarını karşılaştırınız.Farklı olduklarına dikkat ediniz ve bu açılımları karıştırmayınız.*

Uyarı. *$[0, b]$ aralığında tanımlı f fonksiyonunun Fourier açılımının (6.65) ile verilen b_n katsayıları ile f fonksiyonunun $[0, b]$ aralığı üzerindeki Fourier sinüs açılımının (6.48) ile verilen katsayılarını karşılaştırınız. Farklı olduklarına dikkat ediniz ve bu açılımları karıştırmayınız.*

6.10 Maxima ile Gibbs olayı

Verilen bir $[a, b]$ aralığında $(b - a)$ periyotlu fonksiyonun Fourier seri katsayılarını sembolik cebirsel yazılımlar yardımıyla hesaplayabiliriz. Bu bölümde *Maxima* ortamında tanımlanan fonksiyonun

- belirtilen aralık üzerinde Fourier serisi katsayılarını hesaplayarak,

```
(%i1) fourier(f,a,b,N):=block([x],
      declare(n,integer),
      a0:2/(b-a)·integrate(f(x),x,a,b),display(a0),
      an:2/(b-a)·integrate(f(x)·cos(2·%pi·n·x/(b-a)),x,a,b),display(an),
      bn:2/(b-a)·integrate(f(x)·sin(2·%pi·n·x/(b-a)),x,a,b),display(bn),
      toplam1(x):=sum(an·cos(2·%pi·n·x/(b-a))
            +bn·sin(2·%pi·n·x/(b-a)),n,1,N),
      toplam2(x):=toplam1(x)+a0/2,
        g(x):=if x>a and x<b then f(x) else 0,el:b-a,
        h(x):=g(x-el),u(x):=g(x+el),p1:2·a-b,p2:2·b-a,
      plot2d([u,h,g,toplam2],[x,p1,p2],[legend,false])
      )$
```

Şekil 6.15: Verilen $[a, b]$ aralığı üzerinde Fourier seri katsayılarını ve f_N kısmi toplamını hesaplayarak üç ardışık periyod üzerinde grafiğini çizer.

- girilen $N > 0$ için f_N kısmi toplamı ile
- $(b-a)$ periyotlu fonksiyon ve f_N toplamının grafiğini $[2a-b, 2b-a]$ aralığı üzerinde çizdiren Maxima[6] bloku, Şekil (6.15) ile verilmektedir

Yukarıda verilen fourier bloku ile Örnek 6.5 ile verilen birim basamak fonksiyonunun Fourier katsayılarını ve grafiğini hesaplayalım.

6.10.1 Gibbs Olayı

Yukarıdaki şekilde ve bu bölümdeki örneklerde Fourier serisi kısmi toplamlar grafiğinde gözlemlediğimiz süreksizlik noktaları komşuluğunda fonksiyon değerinden yukarı veya aşağı doğru oluşan sıçramalar Fourier serilerinin genelde görülen bir olaydır ve *Gibbs olayı* olarak bilinir. *J.W. Gibbs* tarafından *1899* [4] yılında vurgulanan bu özelliği bu alt bölümde bazı örnekler üzerinde inceliyoruz.

Örnek 6.3 de verilen fonksiyonun Fouirer seri açılımının $[-3, -1]$ aralığındaki yakınsaklığını yakından inceleyelim: Aşağıdaki tablonun

(%i2) load(abs_integrate);

(%o2) C:\maxima-5.42.1\share\maxima\5.42.1\share\contrib\integration\abs_integrate.mac

(%i3) f(x):=unit_step(x);

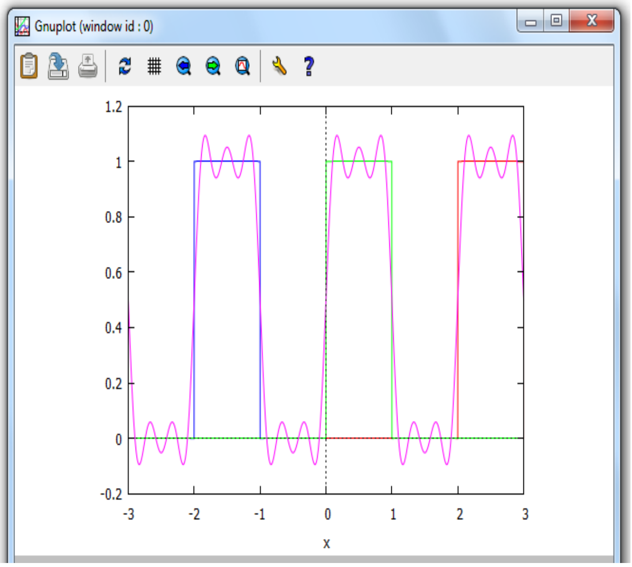
(%o3) f(x):=unit_step(x)

(%i4) fourier(f,-1,1,5);

$a0=1$

$an=0$

$$bn=-\frac{(-1)^{n}-1}{\pi\, n}$$



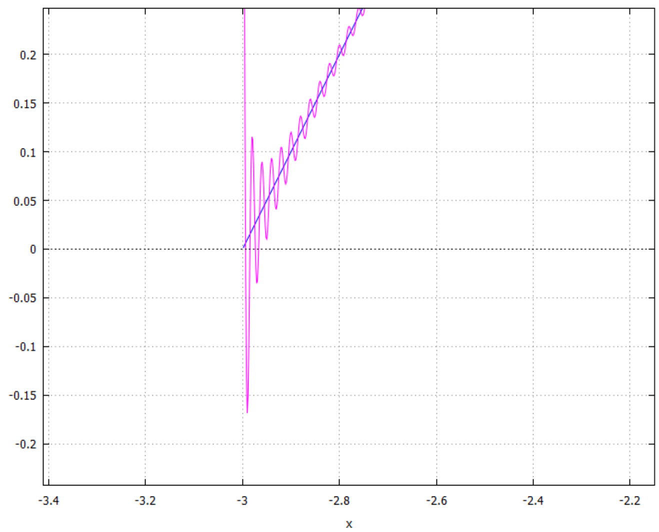
- birinci sütununda kısmi toplamda kullanılan N değeri verilmektedir.

- ikinci sütununda N nin farklı değerleri için $x=-3$ noktasını sol uç nokta kabul eden $(-3,-2.9)$ komşuluğunda minimum f_N değerleri verilmektedir.

- üçüncü sütununda ise elde edilen minimum değerlerin, bu komşuluktaki fonksiyon değerininden yüzdelik düşüş miktarı verilmektedir.

- dördüncü sütununda N nin farklı değerleri için $x=-1$ noktasını sağ uç nokta kabul eden $(-1.1,-1)$ komşuluğunda maksimum f_N değerleri verilmektedir.

- tablonun son sütununda ise elde edilen maksimum değerlerin, bu komşuluktaki fonksiyon değerininden yukarı doğru yüzdelik sıçrama miktarı verilmektedir.



Şekil 6.16: Örnek 6.3 için $x = -3$ noktası komşuluğunda $N = 100$ için Fourier kısmi toplamı.

N	$min(f_N)$	düşüş(%)	$max(f_N)$	sıçrama(%)
	$x \in (-3, -2.9)$		$x \in (-1.1, -1)$	
10	-0.08664	0.0433	2.08669	0.0433
20	-0.131	0.065 5	2.131	0.065 5
50	-0.1578	0.078 9	2.159	0.0795
100	-0.1685	0.084 25	2.1681	0.084 05
200	-0.17335	0.08675	2.1675	0.08375

Tablodan N in artan değeleri için süreksizlik nokta komşuluklarında Fourier kısmi toplamının fonksiyon değerini maximum nokta komşuluğunda yaklaşık olarak %0.09 kadar ani sıçramalar ile aştığını gözlemliyoruz. Benzer biçimde minimum nokta komşuluğunda ise Fourier kısmi toplamının benzer davranışla ve fonksiyon değerinden benzer oranlarda düşüş değerler aldığını gözlemliyoruz.

$N = 100$ için Örnek 6.3 e ait f_{100} kısmi toplamının $x = -3$ noktası **sağ** komşuluğundaki grafiği Şekil 6.16 ile verilmektedir.

$N = 100$ için Örnek 6.3 e ait f_{100} kısmi toplamının $x = -1$ noktası **sol** komşuluğundaki grafiği Şekil 6.17 ile verilmektedir.

Benzer durum, uç noktalarda periyodik genişleme sonucu oluşan süreksizlik noktalarında değil, aynı zamanda göz önüne alınan aralıkta mevcut sürekiszlik noktalarında da gelişebilir. Bu amaçlar Örnek 6.5 ye $x = 0$ noktası komşuluğunda yakından bakalım. Şekil 6.18 ve 6.19 ile sırasıyla Örnek 6.5 ye ait Fourier kısmi toplamının $N = 50$ için sıfır noktasının **sol** ve **sağ** komşuluğundaki davranışı gösterilmektedir.

- Her iki örnekte de, süreksizlik noktası komşuluğunda Fourier kısmi toplamı ile fonksiyon değerinde yaklaşık olarak %0.09 kadar bir sapma gerçekleşmektedir. Bu olay *Gibbs olayı* olarak bilinir.
- Süreksizlik noktası komşuluğunda genellikle gerçekleşen bu olay, her zaman gerçekleşmez.

Fourier isimli maxima bloku ile Gibbs olayının her süreksizlik nokta komşuluğunda gerçekleşmeyebileceğine ait aşağıdaki örnek üzerinde gözlemleyelim:

ÖRNEK 6.11.

$$f(x) = 1/10x + x^2, x \in [-1, 1]$$

f periyodik ve periyodu $p = 2$ fonksiyonunun Fourier seri açılımını belirleyiniz

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{3} \\ a_n &= \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \\ b_n &= \frac{(9n^2\pi^2 - 20)(-1)^n}{10n^3\pi^3} - \frac{(11n^2\pi^2 - 20)(-1)^n}{10n^3\pi^3} \end{aligned}$$

$N = 5$ için 2 periyotlu f fonksiyonu ve f_N kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği Şekil 6.20 ile verilmektedir.

$N = 50$ için 2 periyotlu f fonksiyonu ve f_N kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği Şekil 6.21 ile verilmektedir.

ÖRNEK 6.12.

$$f(x) = 1/5x + x^2, x \in [-1, 1]$$

f periyodik ve periyodu $p = 2$ fonksiyonunun Fourier seri açılımını belirleyiniz

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{3}, \\
a_n &= \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}, \\
b_n &= \frac{(4n^2\pi^2-10)(-1)^n}{5n^3\pi^3} - \frac{(6n^2\pi^2-10)(-1)^n}{5n^3\pi^3}
\end{aligned}
$$

$N = 5$ için 2 periyotlu f fonksiyonu ve f_N kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği Şekil 6.22 ile verilmektedir.

$N = 50$ için 2 periyotlu f fonksiyonu ve f_N kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği Şekil 6.23 ile verilmektedir.

Ancak f fonksiyonunda yapacağımız ufak bir değişiklikle Gibbs olayını yine gözlemleyebiliriz:

ÖRNEK 6.13.

$$f(x) = x + x^2, x \in [-1, 1]$$

f periyodik ve periyodu $p = 2$ fonksiyonunun Fourier seri açılımını belirleyiniz

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{3}, \\
a_n &= \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}, \\
b_n &= -\frac{2(n^2\pi^2-1)(-1)^n}{n^3\pi^3} - \frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3}
\end{aligned}
$$

$N = 5$ için 2 periyotlu f fonksiyonu ve f_N kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği Şekil 6.24 ile verilmektedir.

$N = 50$ için 2 periyotlu f fonksiyonu ve f_N kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği Şekil 6.25 ile verilmektedir.

Süreksizlik noktası komşuluğundaki sıçramalara ve dolayısıyla da bu örnekte de oluşan Gibbs olayına dikkat edelim.

1. (6.36) ile verilen fonksiyonlar kümesinin $b > 0$ olmak üzere $[-b, b]$ aralığında ortogonal olduğunu gösteriniz.

2. (6.38) bağıntılarının doğruluğunu kontrol ediniz.

3. Aşağıda verilen *periyodik* fonksiyonların belirtilen aralıklardaki Fourier seri açılımlarını belirleyiniz. Fonksiyonun tek veya çiftliğini kontrol ederek, sadece gerekli katsayıları hesaplayınız.

   (a) $f(x) = x, [-2, 2]$

   (b) $f(x) = |x|, \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

   (c) $f(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} x-1 & -2 < x < 0 \\ x & 0 < x < 2 \end{cases}$

4. Soru 3(a) için elde ettiğiniz Fourier serisinin $x = -2, -1, 0, 1, 2$ noktalarında yakınsadığı değerleri ilgili teorem yardımıyla belirleyiniz.

5. Soru 3(a) için elde ettiğiniz Fourier serisinin grafiğini $[-6, 6]$ aralığında çiziniz. Bunun için ilgili yakınsaklık teoremini dikkate alınız.

6. (6.45) bağıntılarının doğruluğunu kontrol ediniz.

7. Aşağıda verilen *ve belirtilen aralıklar üzerinde periyodik* olarak tanımlanan fonksiyonların belirtilen aralıklardaki Fourier kosinüs seri açılımlarını belirleyiniz.

   (a) $f(x) = x, [0, 2]$

   (b) $f(x) = 1 - x, [0, 2]$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 < x < 2 \end{cases}$

8. Soru 7(a) için elde ettiğiniz Fourier serisinin $x = -2, -1, 0, 1, 2$ noktalarında yakınsadığı değerleri ilgili teorem yardımıyla belirleyiniz.

9. Soru 7(a) için elde ettiğiniz Fourier serisinin grafiğini $[-4, 4]$ aralığında çiziniz. Bunun için ilgili yakınsaklık teoremini dikkate alınız.

10. Soru 5 te verilen fonksiyonların Fourier sinüs açılımlarını hesaplayınız.

11. (6.45) bağıntısının doğruluğunu kontrol ediniz.

12. (6.58) ile verilen fonksiyonlar kümesinin $[a, b]$ aralığı üzerinde ortogonal olduğunu gösteriniz.

13. (6.59) bağıntısının doğruluğunu kontrol ediniz.

14. Aşağıda verilen fonksiyonların belirtilen aralık üzerindeki Fourier seri açılımlarını hesaplayınız.

    (a) $f(x) = x, [-1, 2]$

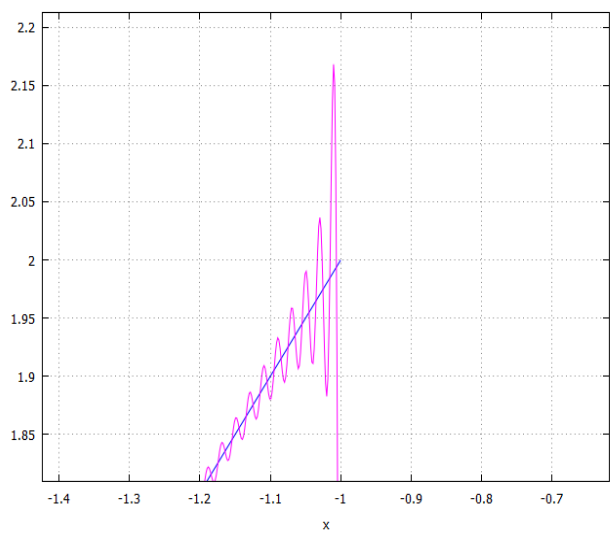
    (b) $f(x) = 1 - x, [-1, 3]$

    (c) $f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 2 & 1 < x < 2 \end{cases}$

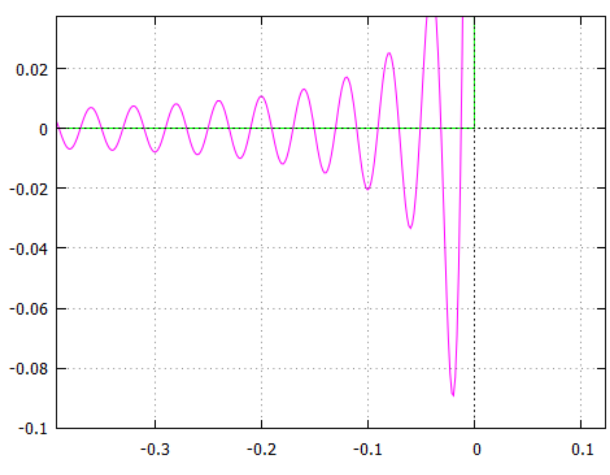
15. Soru 3(a) için elde ettiğiniz Fourier serisinin $x = -2, -1, 0, 1, 2$ noktalarında yakınsadığı değerleri ilgili teorem yardımıyla belirleyiniz.

16. Soru 3(a) için elde ettiğiniz Fourier serisinin grafiğini $[-4, 5]$ aralığında çiziniz. Bunun için ilgili yakınsaklık teoremini dikkate alınız.

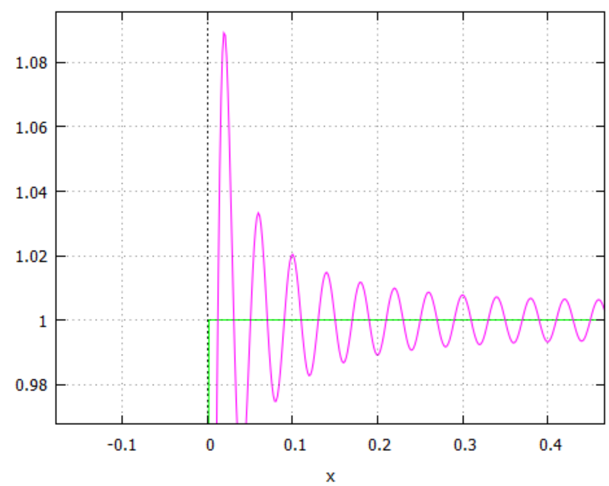
17. Yukarıda verilen **fourier** isimli *Maxima* programı yardımıyla bu bölümde elde ettiğiniz Fourier serileri ve grafiklerini kontrol ediniz.



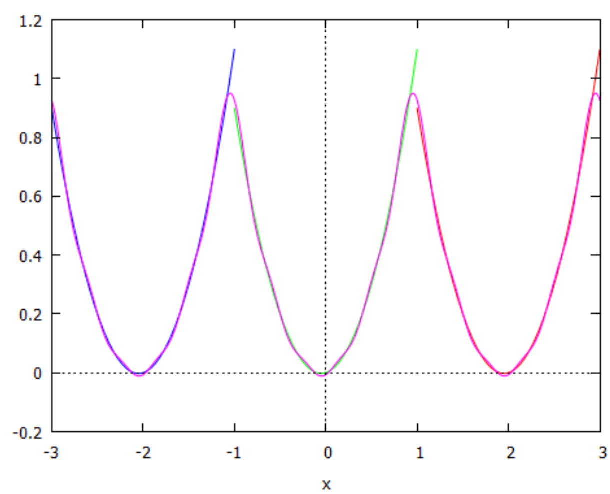
Şekil 6.17: Örnek 6.3 için x=-1 noktası komşuluğunda N=100 için Fourier kısmi toplamı.



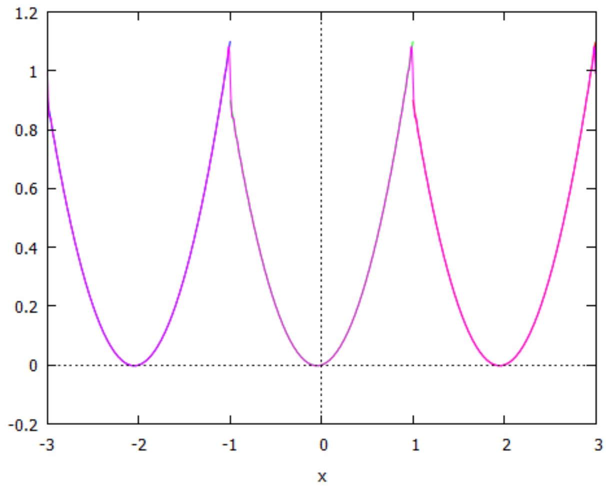
Şekil 6.18: Örnek 6.5 için $N = 50$ ile elde edilen Fourier kısmi toplamının $x = 0$ noktası **sol** komşuluğundaki salınımı.



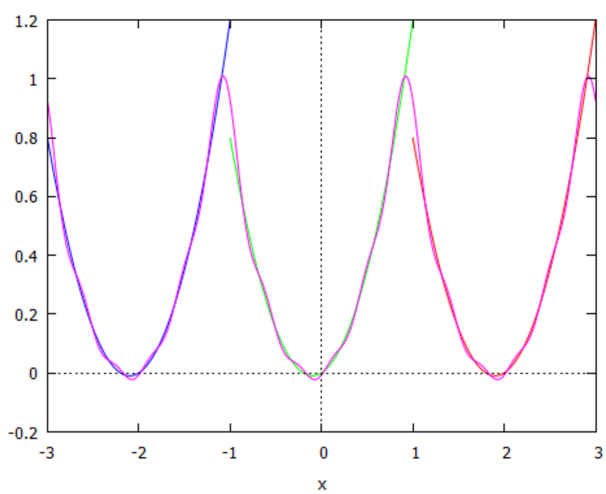
Şekil 6.19: Örnek 6.5 için $N = 50$ ile elde edilen Fourier kısmi toplamının $x = 0$ noktası **sağ** komşuluğundaki salınımı.



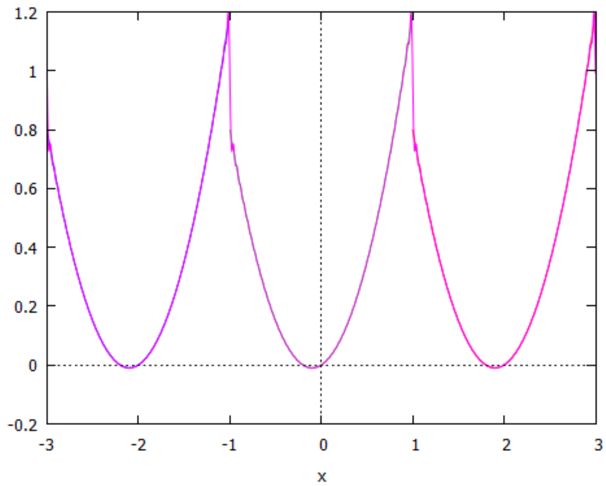
Şekil 6.20: Örnek 6.11 ile verilen fonksiyonun ve Fourier serisi kısmi toplam($N = 5$) grafiği



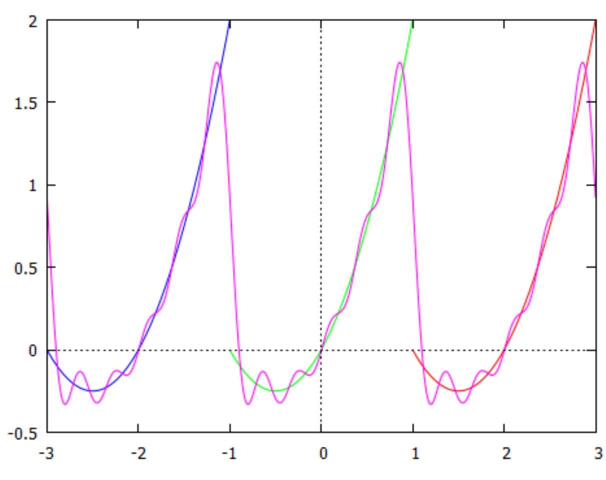
Şekil 6.21: Örnek 6.11 ile verilen fonksiyonun ve Fourier serisi kısmi toplam($N = 50$) grafiği



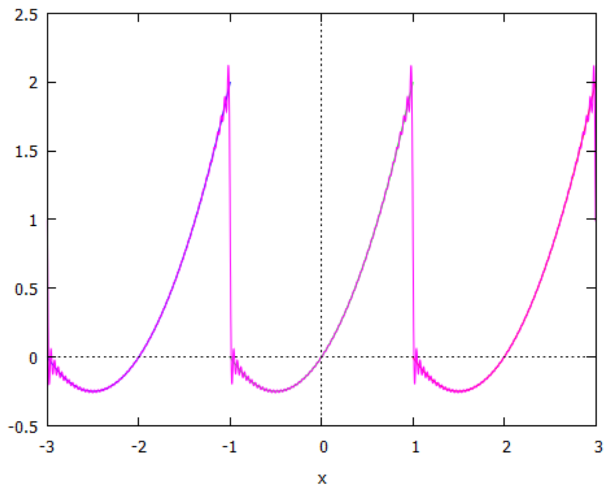
Şekil 6.22: Örnek 6.12 ile verilen fonksiyonun ve Fourier serisi kısmi toplam($N = 5$) grafiği



Şekil 6.23: Örnek 6.12 ile verilen 2 periyotlu f fonksiyonu ve f_N kısmi toplamının($N = 50$) $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği



Şekil 6.24: Örnek 6.13 ile verilen 2 periyotlu f fonksiyonu ve f_N $(N = 5)$ kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği



Şekil 6.25: Örnek 6.13 ile verilen 2 periyotlu f fonksiyonu ve f_N $(N = 50)$ kısmi toplamının $[-3, 3]$ aralığında çizilen grafiği

Kaynaklar

[1] Duchateau, P., Zachmann D, Applied Partial Differential Equations, Dover Pub., New York, 1989.

[2] Coleman, P. Matthew, An introduction to Partial Differential Equations with MATLAB, Chapman& Hall/CRC, 2004.

[3] Andrews, L., Elementary Partial Differential Equations with Boundary Value Problems, Academic press, 1989.

[4] Jerri, A.J., The Gibbs phenomenon in Fourier Analysis,Springer, 1998.

[5] Edwards, C. H, &Penney, D. E. (Akın, Ö., çeviri editörü) Difrensiyel denklemler ve sınır-değer problemleri,Palme yayıncılık, 2006.

[6] Coşkun, E. Maxima ile Sembolik Hesaplama ve Kodlama,URL:erhancoskun.com.tr

[7] MAXIMA, URL:maxima.sourceforge.net