Lineer cebirsel sistemler için için Gauss yöntemi

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Eylül 2020

Bu bölümde

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümü için bilinen klasik yöntem olarak

Lineer cebirsel sistemler için Gauss yöntemi

Bu bölümde

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümü için bilinen klasik yöntem olarak
- pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yöntemlerini inceliyoruz.

Lineer cebirsel sistemler için Gauss yöntemi

Bu bölümde

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümü için bilinen klasik yöntem olarak
- pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yöntemlerini inceliyoruz.
- Öncelikle üst üçgensel bir sistemin çözümünü inceleyelim

Üst üçgensel sistemler(geriye doğru çözüm)

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ 0 & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan ve köşegen üzerindeki elemanları sıfırdan farklı bir üst üçgensel matris($u_{ii} \neq 0, i = 1, \cdots, n$) ve $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \cdots b_n]^T$ olmak üzere $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi verilsin:

- $$\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n &= b1 \\ &\vdots \\ u_{ii}x_i + \cdots + u_{in}x_n &= b_i \\ &\vdots \\ u_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Üst üçgensel sistemler(geriye doğru çözüm)

- Son denklemden $x_n = b_n / u_{nn}$ elde ederek, bu değeri bir üst satırdaki denklemde yerine yazmak suretiyle x_{n-1} değerini, ve aynı şekilde yukarıya(veya geriğe) doğru devam ederek $x_{n-2}, \cdots, x_2, x_1$ değerlerini elde ederiz.

Üst üçgensel sistemler(geriye doğru çözüm)

Örnek

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + 1z &= 3 \\
2y + z &= 0 \\
z &= 2
\end{aligned}
$$

denklem sistemini geriye doğru çözünüz.

Üst üçgensel sistemler(geriye doğru çözüm)

- $z = 2$ değerini bir önceki denklemde yerine yazarak $y = -1$ olarak elde ederiz. Son olarak bulunan y ve z değerlerini birinci denklemde yazarak $x = 1$ değerini elde ederiz.

Üst üçgensel sistemler(geriye doğru çözüm)

- $z = 2$ değerini bir önceki denklemde yerine yazarak $y = -1$ olarak elde ederiz. Son olarak bulunan y ve z değerlerini birinci denklemde yazarak $x = 1$ değerini elde ederiz.
- Üst üçgensel sistem algoritması aşağıda verilmektedir.

Üst üçgensel sistemler(geriye doğru çözüm)

1. input U, b
2. n ye b nin eleman sayısını ata
3. $x_n = b_n / u_{nn}$
4. $i = n-1, n-2, \cdots, 1$ için

$$
\begin{aligned}
x_i &= \frac{1}{u_{ii}}(b_i - u_{i,i+1}x_{i+1} - \cdots - u_{in}x_n) \\
&= \frac{1}{u_{ii}}(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j),
\end{aligned}
$$

Algoritmaya ait Program aşağıda verilmektedir.

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması.

1. $function\ X = ustucgen(U, b)$

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması.

1. $function\ X = ustucgen(U, b)$
2. $[m, n] = size(U);$

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması.

1. $function\ X = ustucgen(U, b)$
2. $[m, n] = size(U);$
3. $X = zeros(n, 1);$

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması.

1. $function\ X = ustucgen(U, b)$
2. $[m, n] = size(U);$
3. $X = zeros(n, 1);$
4. $X(n) = b(n)/U(n, n);$

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması.

1. $function\ X = ustucgen(U, b)$
2. $[m, n] = size(U);$
3. $X = zeros(n, 1);$
4. $X(n) = b(n)/U(n, n);$
5. $for\ \ i = n - 1 : -1 : 1$

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması.

1. $function\ X = ustucgen(U, b)$
2. $[m, n] = size(U);$
3. $X = zeros(n, 1);$
4. $X(n) = b(n)/U(n, n);$
5. $for\ \ i = n - 1 : -1 : 1$
6. $\quad jv = i + 1 : n;$

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması.

1. $function\ X = ustucgen(U, b)$
2. $[m, n] = size(U);$
3. $X = zeros(n, 1);$
4. $X(n) = b(n)/U(n, n);$
5. $for\ i = n - 1 : -1 : 1$
6. $\quad jv = i + 1 : n;$
7. $\quad top = U(i, jv) * X(jv); \%jv$ bir vektördür

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması.

```
function X = ustucgen(U, b)
[m, n] = size(U);
X = zeros(n, 1);
X(n) = b(n)/U(n, n);
for i = n-1 : -1 : 1
        jv = i+1 : n;
        top = U(i, jv) * X(jv); %jv bir vektördür
        X(i) = (b(i) - top)/U(i, i);
```

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması.

1. $function\ X = ustucgen(U, b)$
2. $[m, n] = size(U);$
3. $X = zeros(n, 1);$
4. $X(n) = b(n)/U(n, n);$
5. $for\ i = n - 1 : -1 : 1$
6. $\quad jv = i + 1 : n;$
7. $\quad top = U(i, jv) * X(jv); \% jv$ bir vektördür
8. $\quad X(i) = (b(i) - top)/U(i, i);$
9. end

- Programı çalıştırmak için U matrisi ve **b** sütun vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması

- Programı çalıştırmak için U matrisi ve **b** sütun vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır:
- $>>U = [3\ 2\ 1; 0\ 2\ 1; 0\ 0\ 1];$

- Programı çalıştırmak için U matrisi ve **b** sütun vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır:
- $>>U = [3\ 2\ 1; 0\ 2\ 1; 0\ 0\ 1]$;
- »$b = [3\ 0\ 2]\prime$;

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması

- Programı çalıştırmak için U matrisi ve **b** sütun vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır:
- $>>U = [3\ 2\ 1; 0\ 2\ 1; 0\ 0\ 1]$;
- »$b = [3\ 0\ 2]\prime$;
- Daha sonra aşağıdaki komut yardımıyla **x** çözümü elde edilir:

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması

- Programı çalıştırmak için U matrisi ve **b** sütun vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır:
- $>>U = [3\ 2\ 1; 0\ 2\ 1; 0\ 0\ 1];$
- $\text{»}b = [3\ 0\ 2]\prime;$
- Daha sonra aşağıdaki komut yardımıyla **x** çözümü elde edilir:
- »X=ustucgen(U,b)
  X =1 -1 2

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması

- $Ux = y$ **sistemini çözmek için gerekli işlem(çarpma ve bölme) sayısını hesaplayalım:**

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması

- $Ux = y$ **sistemini çözmek için gerekli işlem(çarpma ve bölme) sayısını hesaplayalım:**
- $Ux = y$ denklem sistemini çözmek için $n-1$-inci satırda 1 adet, $n-2$-inci satırda 2 adet ve 1-inci satırda ise $n-1$ adet çarpma işlemi gereklidir.

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması

- $Ux = y$ **sistemini çözmek için gerekli işlem(çarpma ve bölme) sayısını hesaplayalım:**
- $Ux = y$ denklem sistemini çözmek için $n-1$-inci satırda 1 adet, $n-2$-inci satırda 2 adet ve 1-inci satırda ise $n-1$ adet çarpma işlemi gereklidir.
- Diğer bir deyimle tablo halinde ifade edersek

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması

- $Ux = y$ **sistemini çözmek için gerekli işlem(çarpma ve bölme) sayısını hesaplayalım:**
- $Ux = y$ denklem sistemini çözmek için $n-1$-inci satırda 1 adet, $n-2$-inci satırda 2 adet ve 1-inci satırda ise $n-1$ adet çarpma işlemi gereklidir.
- Diğer bir deyimle tablo halinde ifade edersek
-

satır no	1	2	$\cdots$	$n-1$
çarpma işlem sayısı	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	1

- $Ux = y$ **sistemini çözmek için gerekli işlem(çarpma ve bölme) sayısını hesaplayalım:**
- $Ux = y$ denklem sistemini çözmek için $n-1$-inci satırda 1 adet, $n-2$-inci satırda 2 adet ve 1-inci satırda ise $n-1$ adet çarpma işlemi gereklidir.
- Diğer bir deyimle tablo halinde ifade edersek
-

satır no	1	2	$\cdots$	$n-1$
çarpma işlem sayısı	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	1

- O halde gerekli *çarpma işlemi sayısı*

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

dir.

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması.

- **$Ux = y$ sistemini çözmek için gerekli işlem(çarpma ve bölme) sayısını hesaplayalım:**

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması.

- $Ux = y$ **sistemini çözmek için gerekli işlem(çarpma ve bölme) sayısını hesaplayalım:**
- Öteyandan bu çözüm işleminde *gerekli bölme işlemi sayısı* ise her satırda 1 adet olmak üzere toplam n adettir.

$UX = b$ ust ucgensel denklem sistemi uygulaması.

- $Ux = y$ **sistemini çözmek için gerekli işlem(çarpma ve bölme) sayısını hesaplayalım:**
- Öteyandan bu çözüm işleminde *gerekli bölme işlemi sayısı* ise her satırda 1 adet olmak üzere toplam n adettir.
- Sonuç olarak $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ denklem sistemini çözmek için gerekli çarpma ve bölme işlem sayısı

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{1}$$

dir.

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümünde kullanılan geleneksel bir yöntem Gauss yok etme yöntemidir[1].

[1] Carl Friedrich Gauss (1777-1855, Alman matematikçi)

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümünde kullanılan geleneksel bir yöntem Gauss yok etme yöntemidir[1].
- Yöntem elemanter satır veya sütun işlemleri yardımıyla verilen sistemi $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ biçiminde üst üçgensel veya eşelon(basamaklı) forma dönüştürür.

[1] Carl Friedrich Gauss (1777-1855, Alman matematikçi)

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümünde kullanılan geleneksel bir yöntem Gauss yok etme yöntemidir[1].
- Yöntem elemanter satır veya sütun işlemleri yardımıyla verilen sistemi $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ biçiminde üst üçgensel veya eşelon(basamaklı) forma dönüştürür.
- Bu amaçla sağ yan vektörü ile birlikte oluşturulan $[A|\mathbf{b}]$ ekli matrisine elemanter satır işlemleri uygulanarak $[U|\mathbf{c}]$ ekli matrisi elde edilir.

[1] Carl Friedrich Gauss (1777-1855, Alman matematikçi)

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümünde kullanılan geleneksel bir yöntem Gauss yok etme yöntemidir[1].
- Yöntem elemanter satır veya sütun işlemleri yardımıyla verilen sistemi $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ biçiminde üst üçgensel veya eşelon(basamaklı) forma dönüştürür.
- Bu amaçla sağ yan vektörü ile birlikte oluşturulan $[A|\mathbf{b}]$ ekli matrisine elemanter satır işlemleri uygulanarak $[U|\mathbf{c}]$ ekli matrisi elde edilir.
- Elemanter satır işlemlerinin ilgili denklem sisteminin çözümünün değiştirmediğini biliyoruz.

[1] Carl Friedrich Gauss (1777-1855, Alman matematikçi)

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümünde kullanılan geleneksel bir yöntem Gauss yok etme yöntemidir[1].
- Yöntem elemanter satır veya sütun işlemleri yardımıyla verilen sistemi $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ biçiminde üst üçgensel veya eşelon(basamaklı) forma dönüştürür.
- Bu amaçla sağ yan vektörü ile birlikte oluşturulan $[A|\mathbf{b}]$ ekli matrisine elemanter satır işlemleri uygulanarak $[U|\mathbf{c}]$ ekli matrisi elde edilir.
- Elemanter satır işlemlerinin ilgili denklem sisteminin çözümünün değiştirmediğini biliyoruz.
- Dolayısıyla verilen sistemi çözmek yerine yukarıda incelenen geriye doğru çözüm yöntemini, elde edilen $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ üst üçgensel sistemi veya eşelon sistemine uygulayarak çözüm elde edilmiş olur.

[1] Carl Friedrich Gauss (1777-1855, Alman matematikçi)

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elemanter satır işlemlerini hatırlayalım:

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elemanter satır işlemlerini hatırlayalım:
    1. Bir matrisin herhangi bir satırı sıfırdan farklı bir sabitle çarpılabilir.

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elemanter satır işlemlerini hatırlayalım:
  1. Bir matrisin herhangi bir satırı sıfırdan farklı bir sabitle çarpılabilir.
  2. Herhangi iki satır yer değiştirebilir.

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elemanter satır işlemlerini hatırlayalım:
  1. Bir matrisin herhangi bir satırı sıfırdan farklı bir sabitle çarpılabilir.
  2. Herhangi iki satır yer değiştirebilir.
  3. Bir satır sıfırdan farklı bir sabitle çarpılarak diğer satıra ilave edilebilir.

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elemanter satır işlemlerini hatırlayalım:
  1. Bir matrisin herhangi bir satırı sıfırdan farklı bir sabitle çarpılabilir.
  2. Herhangi iki satır yer değiştirebilir.
  3. Bir satır sıfırdan farklı bir sabitle çarpılarak diğer satıra ilave edilebilir.
- Öteyandan eşelon formu hatırlayalım: eğer aşağıdaki kriterler sağlanırsa $[U|\mathbf{c}]$ ekli matrisi eşelon formdadır denir:

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elemanter satır işlemlerini hatırlayalım:
  1. Bir matrisin herhangi bir satırı sıfırdan farklı bir sabitle çarpılabilir.
  2. Herhangi iki satır yer değiştirebilir.
  3. Bir satır sıfırdan farklı bir sabitle çarpılarak diğer satıra ilave edilebilir.
- Öteyandan eşelon formu hatırlayalım: eğer aşağıdaki kriterler sağlanırsa $[U|\mathbf{c}]$ ekli matrisi eşelon formdadır denir:
  1. Her bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman bir üst satırdaki sıfırdan farklı elemanın sağında yer alır.

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elemanter satır işlemlerini hatırlayalım:
  1. Bir matrisin herhangi bir satırı sıfırdan farklı bir sabitle çarpılabilir.
  2. Herhangi iki satır yer değiştirebilir.
  3. Bir satır sıfırdan farklı bir sabitle çarpılarak diğer satıra ilave edilebilir.
- Öteyandan eşelon formu hatırlayalım: eğer aşağıdaki kriterler sağlanırsa $[U|\mathbf{c}]$ ekli matrisi eşelon formdadır denir:
  1. Her bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman bir üst satırdaki sıfırdan farklı elemanın sağında yer alır.
  2. Her bir satırda sıfırdan farklı ilk elemanın aşağısında yer alan bütün elemanlar sıfıra eşittir.

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elemanter satır işlemlerini hatırlayalım:
  1. Bir matrisin herhangi bir satırı sıfırdan farklı bir sabitle çarpılabilir.
  2. Herhangi iki satır yer değiştirebilir.
  3. Bir satır sıfırdan farklı bir sabitle çarpılarak diğer satıra ilave edilebilir.
- Öteyandan eşelon formu hatırlayalım: eğer aşağıdaki kriterler sağlanırsa $[U|\mathbf{c}]$ ekli matrisi eşelon formdadır denir:
  1. Her bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman bir üst satırdaki sıfırdan farklı elemanın sağında yer alır.
  2. Her bir satırda sıfırdan farklı ilk elemanın aşağısında yer alan bütün elemanlar sıfıra eşittir.
  3. En az bir elemanı sıfırdan farklı olan hiçbir satır, bütün elemanlı sıfıra eşit olan bir satırın daha aşağısında yer almaz.

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

Örnek

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ 6x + 6y + 3z &= 6 \\ 9x + 10y + 6z &= 11 \end{aligned}$$

denklem sistemini Gauss yok etme yöntemi ile çözünüz.

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elemanter satır işlemleri yardımıyla

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 1 & : & 3 \\ 6 & 6 & 3 & : & 6 \\ 9 & 10 & 6 & : & 11 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2 \times S_1 + S_2 \\ \rightarrow \\ -3 \times S_1 + S_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 4 & 3 & : & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ -2 \times S_2 + S_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{array}\right] = [U|\mathbf{c}]$$

elde ederiz.

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elde edilen üst üçgensel sistem

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ 2y + z &= 0 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

olup, geriye doğru çözerek

$$z = 2, y = -1, x = 1$$

çözümünü elde ederiz.

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- *Gauss yok etme yöntemine göre çözüm iki aşamadan oluşmaktadır:*

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- *Gauss yok etme yöntemine göre çözüm iki aşamadan oluşmaktadır:*
    1. $Ax = b$ denklem sisteminin elemanter işlemlerle $Ux = c$ üst üçgensel sistemine dönüştürülmesi ve

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- *Gauss yok etme yöntemine göre çözüm iki aşamadan oluşmaktadır:*
  1. $Ax = b$ denklem sisteminin elemanter işlemlerle $Ux = c$ üst üçgensel sistemine dönüştürülmesi ve
  2. $Ux = c$ sisteminin çözülmesi

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Yukarıda bahsettiğimiz birinci aşamayı herhangi satır veya sütun yer değiştirmeden gerçekleştiren yok etme yöntemine **pivotsuz Gauss yok etme yöntemi** adı verilir.

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Yukarıda bahsettiğimiz birinci aşamayı herhangi satır veya sütun yer değiştirmeden gerçekleştiren yok etme yöntemine **pivotsuz Gauss yok etme yöntemi** adı verilir.
- Burada **pivot**, sıfırdan farklı katı alınarak diğer satırlara ilave edilmek suretiyle gerekli yok etme işleminin yapılması için kullanılan ve matris köşegeni üzerinde bulunan elamana verilen isimdir, ve pivotsuz yöntem pivotu olmayan yok etme işlemi olarak yorumlanmamalıdır.

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Yukarıda bahsettiğimiz birinci aşamayı herhangi satır veya sütun yer değiştirmeden gerçekleştiren yok etme yöntemine **pivotsuz Gauss yok etme yöntemi** adı verilir.
- Burada **pivot**, sıfırdan farklı katı alınarak diğer satırlara ilave edilmek suretiyle gerekli yok etme işleminin yapılması için kullanılan ve matris köşegeni üzerinde bulunan elamana verilen isimdir, ve pivotsuz yöntem pivotu olmayan yok etme işlemi olarak yorumlanmamalıdır.
- Gauss yok etme yöntemine ait Algoritma aşağıda verilmektedir.

Pivotsuz Gauss Yoketme algoritması

1. girdi: A, b

Pivotsuz Gauss Yoketme algoritması

1. girdi: A, b
2. $A = [A \ b]$ %ekli matris

Pivotsuz Gauss Yoketme algoritması

1. girdi: A, b
2. $A = [A\ b]$ %ekli matris
3. $j = 1, 2, ..., n-1$ için

Pivotsuz Gauss Yoketme algoritması

1. girdi: A, b
2. $A = [A\ \ b]$ %ekli matris
3. $j = 1, 2, ..., n - 1$ için
4. $iv = j + 1 : m$ % elemanter satır işlemi uygulanacak satır indisleri

Pivotsuz Gauss Yoketme algoritması

1. girdi: A, b
2. $A = [A \;\; b]$ %ekli matris
3. $j = 1, 2, ..., n-1$ için
4. $iv = j + 1 : m$ % elemanter satır işlemi uygulanacak satır indisleri
5. eger $A(j,j) = 0$ ise pivotsuz yöntem uygulanamaz, çık

Pivotsuz Gauss Yoketme algoritması

1. girdi: A, b
2. $A = [A \;\; b]$ %ekli matris
3. $j = 1, 2, ..., n-1$ için
4. $iv = j + 1 : m$ % elemanter satır işlemi uygulanacak satır indisleri
5. eger $A(j,j) = 0$ ise pivotsuz yöntem uygulanamaz, çık
6. $carp = -A(iv,j)/A(j,j)$; % elemanter satır işemi için carpan vektörü

Pivotsuz Gauss Yoketme algoritması

1. girdi: A, b
2. $A = [A \ \ b]$ %ekli matris
3. $j = 1, 2, ..., n-1$ için
4. $iv = j+1 : m$ % elemanter satır işlemi uygulanacak satır indisleri
5. eger $A(j,j) = 0$ ise pivotsuz yöntem uygulanamaz, çık
6. $carp = -A(iv,j)/A(j,j)$; % elemanter satır işemi için carpan vektörü
7. $A(iv,:) = A(iv,:) + carp * A(j,:)$;% iv indisli satırlar için elemanter satır işlemi

Pivotsuz Gauss Yoketme algoritması

1. girdi: A, b
2. $A = [A\ \ b]$ %ekli matris
3. $j = 1, 2, ..., n-1$ için
4. $iv = j + 1 : m$ % elemanter satır işlemi uygulanacak satır indisleri
5. eger $A(j, j) = 0$ ise pivotsuz yöntem uygulanamaz, çık
6. $carp = -A(iv, j) / A(j, j)$; % elemanter satır işemi için carpan vektörü
7. $A(iv, :) = A(iv, :) + carp * A(j, :)$;% iv indisli satırlar için elemanter satır işlemi
8. $U = A(:, 1 : n)$; % üst üçgensel matris

Pivotsuz Gauss Yoketme algoritması

1. girdi: A, b
2. $A = [A \ \ b]$ %ekli matris
3. $j = 1, 2, ..., n-1$ için
4. $iv = j + 1 : m$ % elemanter satır işlemi uygulanacak satır indisleri
5. eger $A(j, j) = 0$ ise pivotsuz yöntem uygulanamaz, çık
6. $carp = -A(iv, j)/A(j, j)$; % elemanter satır işemi için carpan vektörü
7. $A(iv, :) = A(iv, :) + carp * A(j, :)$;% iv indisli satırlar için elemanter satır işlemi
8. $U = A(:, 1 : n)$; % üst üçgensel matris
9. $c = A(:, n+1)$; % sağyan vektörü

Pivotsuz Gauss Yoketme algoritması

1. girdi: A, b
2. $A = [A \ \ b]$ %ekli matris
3. $j = 1, 2, ..., n-1$ için
4. $iv = j+1:m$ % elemanter satır işlemi uygulanacak satır indisleri
5. eger $A(j,j) = 0$ ise pivotsuz yöntem uygulanamaz, çık
6. $carp = -A(iv,j)/A(j,j)$; % elemanter satır işemi için carpan vektörü
7. $A(iv,:) = A(iv,:) + carp * A(j,:)$;% iv indisli satırlar için elemanter satır işlemi
8. $U = A(:,1:n)$; % üst üçgensel matris
9. $c = A(:,n+1)$; % sağyan vektörü
10. çıktı: U, c

Pivotsuz Gauss Yoketme kodu

- Gauss yok etme yöntemine ait Program aşağıda verilmektedir.

Pivotsuz Gauss Yoketme kodu

- Gauss yok etme yöntemine ait Program aşağıda verilmektedir.
- Satır işlemlerinin *vektör cebiri*(vektörlerle aritmetik işlemler) yardımıyla gerçekleştirildiğine dikkat ediniz.

$AX = b$ sistemini $Ux = c$ sistemine Pivotsuz Gauss Yoketme yöntemi ile indirger

1. $function\ [U, c] = gauss(A, b)$

$AX = b$ sistemini $Ux = c$ sistemine Pivotsuz Gauss Yoketme yöntemi ile indirger

1. $function\ [U, c] = gauss(A, b)$
2. $[m, n] = size(A);$

$AX = b$ sistemini $Ux = c$ sistemine Pivotsuz Gauss Yoketme yöntemi ile indirger

1. $function\ [U, c] = gauss(A, b)$
2. $[m, n] = size(A);$
3. $A = [A\ b];$

$AX = b$ sistemini $Ux = c$ sistemine Pivotsuz Gauss Yoketme yöntemi ile indirger

1. $function\ [U, c] = gauss(A, b)$
2. $[m, n] = size(A);$
3. $\quad A = [A\ \ b];$
4. $\quad for\ j = 1 : n - 1$

$AX = b$ sistemini $Ux = c$ sistemine Pivotsuz Gauss Yoketme yöntemi ile indirger

1. $function\ [U, c] = gauss(A, b)$
2. $[m, n] = size(A);$
3. $\qquad A = [A\ \ b];$
4. $\qquad for\ \ j = 1 : n - 1$
5. $\qquad\qquad iv = j + 1 : m;$

$AX = b$ sistemini $Ux = c$ sistemine Pivotsuz Gauss Yoketme yöntemi ile indirger

1. $function\ [U, c] = gauss(A, b)$
2. $[m, n] = size(A);$
3. $\quad A = [A\ b];$
4. $\quad for\ j = 1 : n - 1$
5. $\qquad iv = j + 1 : m;$
6. $\qquad if\ \ A(j, j) == 0\ error('Pivotsuz\ \ GE\ \ uygulanamaz');$

$AX = b$ sistemini $Ux = c$ sistemine Pivotsuz Gauss Yoketme yöntemi ile indirger

1. $function\ [U, c] = gauss(A, b)$
2. $[m, n] = size(A);$
3. $\quad A = [A\ \ b];$
4. $\quad for\ \ j = 1 : n - 1$
5. $\quad\quad iv = j + 1 : m;$
6. $\quad\quad if\ \ A(j, j) == 0\ error('Pivotsuz\ \ GE\ \ uygulanamaz');$
7. $\quad\quad end$

$AX = b$ sistemini $Ux = c$ sistemine Pivotsuz Gauss Yoketme yöntemi ile indirger

1. $function\ [U, c] = gauss(A, b)$
2. $[m, n] = size(A);$
3. $\qquad A = [A\ \ b];$
4. $\qquad for\ \ j = 1 : n - 1$
5. $\qquad\qquad iv = j + 1 : m;$
6. $\qquad\qquad if\ \ A(j, j) == 0\ \ error('Pivotsuz\ \ GE\ \ uygulanamaz');$
7. $\qquad\qquad end$
8. $\qquad\qquad carp = -A(iv, j) / A(j, j);$

$AX = b$ sistemini $Ux = c$ sistemine Pivotsuz Gauss Yoketme yöntemi ile indirger

1. $function\ [U, c] = gauss(A, b)$
2. $[m, n] = size(A);$
3. $\qquad A = [A\ \ b];$
4. $\qquad for\ \ j = 1 : n - 1$
5. $\qquad\qquad iv = j + 1 : m;$
6. $\qquad\qquad if\ \ A(j, j) == 0\ error('Pivotsuz\ \ GE\ \ uygulanamaz');$
7. $\qquad\qquad end$
8. $\qquad\qquad carp = -A(iv, j)/A(j, j);$
9. $\qquad\qquad A(iv, :) = A(iv, :) + carp * A(j, :);$

$AX = b$ sistemini $Ux = c$ sistemine Pivotsuz Gauss Yoketme yöntemi ile indirger

```
function [U, c] = gauss(A, b)
[m, n] = size(A);
        A = [A b];
        for j = 1 : n - 1
                iv = j + 1 : m;
                if A(j, j) == 0 error('Pivotsuz GE uygulanamaz');
                end
                carp = -A(iv, j)/A(j, j);
                A(iv, :) = A(iv, :) + carp * A(j, :);
        end
```

$AX = b$ sistemini $Ux = c$ sistemine Pivotsuz Gauss Yoketme yöntemi ile indirger

```
function [U, c] = gauss(A, b)
[m, n] = size(A);
        A = [A b];
        for j = 1 : n - 1
                iv = j + 1 : m;
                if A(j, j) == 0 error('Pivotsuz GE uygulanamaz');
                end
                carp = -A(iv, j)/A(j, j);
                A(iv, :) = A(iv, :) + carp * A(j, :);
        end
        U = A(:, 1 : n); c = A(:, n + 1);
```

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

1. Gauss yok etme işlemine göre uyguladıktan sonra,

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

1. Gauss yok etme işlemine göre uyguladıktan sonra,
2. üst üçgensel sistemi yukarıdaki Algoritma yardımıyla çözen **gaussilecoz** isimli Program aşağıda verilmektedir.

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

1. Gauss yok etme işlemine göre uyguladıktan sonra,
2. üst üçgensel sistemi yukarıdaki Algoritma yardımıyla çözen **gaussilecoz** isimli Program aşağıda verilmektedir.
3. $$function\ X = gaussilecoz(A, b)$$

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

1. Gauss yok etme işlemine göre uyguladıktan sonra,
2. üst üçgensel sistemi yukarıdaki Algoritma yardımıyla çözen **gaussilecoz** isimli Program aşağıda verilmektedir.
3. $\quad\quad function\ X = gaussilecoz(A, b)$
4. $\quad\quad [U, c] = gauss(A, b);$

1. Gauss yok etme işlemine göre uyguladıktan sonra,
2. üst üçgensel sistemi yukarıdaki Algoritma yardımıyla çözen **gaussilecoz** isimli Program aşağıda verilmektedir.
3. $\quad function\ X = gaussilecoz(A, b)$
4. $\quad [U, c] = gauss(A, b);$
5. $\quad X = ustucgen(U, c);$

Pivotsuz ve kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

Örnek

Örnek 2 de verilen lineer sistemi pivotsuz Gauss yok etme yöntemine ait Program yardımıyla çözünüz.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ 6x + 6y + 3z &= 6 \\ 9x + 10y + 6z &= 11 \end{aligned}$$

denklem sistemini Gauss yok etme yöntemi ile çözünüz.

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elemanter satır işlemleri yardımıyla

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & : & 3 \\ 6 & 6 & 3 & : & 6 \\ 9 & 10 & 6 & : & 11 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -2 \times S_1 + S_2 \\ \rightarrow \\ -3 \times S_1 + S_3 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 4 & 3 & : & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ -2 \times S_2 + S_3 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{bmatrix} = [U|\mathbf{c}]$$

elde ederiz.

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elde edilen üst üçgensel sistem

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ 2y + z &= 0 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

olup, geriye doğru çözerek

$$z = 2, y = -1, x = 1$$

çözümünü elde ederiz.

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elde edilen üst üçgensel sistem

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ 2y + z &= 0 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

olup, geriye doğru çözerek

$$z = 2, y = -1, x = 1$$

çözümünü elde ederiz.

- *Gauss yok etme yöntemine göre çözüm iki aşamadan oluşmaktadır:*

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elde edilen üst üçgensel sistem

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ 2y + z &= 0 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

olup, geriye doğru çözerek

$$z = 2, y = -1, x = 1$$

çözümünü elde ederiz.

- *Gauss yok etme yöntemine göre çözüm iki aşamadan oluşmaktadır:*
   1. $Ax = b$ denklem sisteminin elemanter işlemlerle $Ux = c$ üst üçgensel sistemine dönüştürülmesi ve

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Elde edilen üst üçgensel sistem

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ 2y + z &= 0 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

olup, geriye doğru çözerek

$$z = 2, y = -1, x = 1$$

çözümünü elde ederiz.

- *Gauss yok etme yöntemine göre çözüm iki aşamadan oluşmaktadır:*
    1. $Ax = b$ denklem sisteminin elemanter işlemlerle $Ux = c$ üst üçgensel sistemine dönüştürülmesi ve
    2. $Ux = c$ sisteminin çözülmesi

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Yukarıda bahsettiğimiz birinci aşamayı herhangi satır veya sütun yer değiştirmeden gerçekleştiren yok etme yöntemine **pivotsuz Gauss yok etme yöntemi** adı verilir.

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Yukarıda bahsettiğimiz birinci aşamayı herhangi satır veya sütun yer değiştirmeden gerçekleştiren yok etme yöntemine **pivotsuz Gauss yok etme yöntemi** adı verilir.
- Burada **pivot**, sıfırdan farklı katı alınarak diğer satırlara ilave edilmek suretiyle gerekli yok etme işleminin yapılması için kullanılan ve matris köşegeni üzerinde bulunan elamana verilen isimdir,

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

- Yukarıda bahsettiğimiz birinci aşamayı herhangi satır veya sütun yer değiştirmeden gerçekleştiren yok etme yöntemine **pivotsuz Gauss yok etme yöntemi** adı verilir.
- Burada **pivot**, sıfırdan farklı katı alınarak diğer satırlara ilave edilmek suretiyle gerekli yok etme işleminin yapılması için kullanılan ve matris köşegeni üzerinde bulunan elamana verilen isimdir,
- ve pivotsuz yöntem pivotu olmayan yok etme işlemi olarak yorumlanmamalıdır.

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

Örnek

Örnek 2 de verilen lineer sistemi pivotsuz Gauss yok etme yöntemine ait Program yardımıyla çözünüz.

- MATLAB/Octave ortamında
  »A=[3 2 1;6 6 3;9 10 6];b=[3 6 11]';
  ile tanımlayarak,

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

Örnek

Örnek 2 de verilen lineer sistemi pivotsuz Gauss yok etme yöntemine ait Program yardımıyla çözünüz.

- MATLAB/Octave ortamında
  »A=[3 2 1;6 6 3;9 10 6];b=[3 6 11]';
  ile tanımlayarak,
- »X=gaussilecoz(A,b)
  komutuyla

Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile çözüm

Örnek

Örnek 2 de verilen lineer sistemi pivotsuz Gauss yok etme yöntemine ait Program yardımıyla çözünüz.

- MATLAB/Octave ortamında
  »A=[3 2 1;6 6 3;9 10 6];b=[3 6 11]';
  ile tanımlayarak,
- »X=gaussilecoz(A,b)
  komutuyla
- »X=1 -1 2
  sonucunu elde ederiz.

Gauss yok etme yöntemi ile çözüm için gerekli aritmetik işlem(çarpma ve bölme) sayısı

- Öncelikle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ sistemine dönüştürmek için gerekli çarpma işlemi sayısını hesaplayalım.

Gauss yok etme yöntemi ile çözüm için gerekli aritmetik işlem(çarpma ve bölme) sayısı

- Öncelikle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ sistemine dönüştürmek için gerekli çarpma işlemi sayısını hesaplayalım.
- Birinci sütunu indirgemek($n-1$ adet elemanı sıfır yapmak) için gerekli çarpma işlem sayısı

$$(n-1)(n+1)$$

dir.

Gauss yok etme yöntemi ile çözüm için gerekli aritmetik işlem(çarpma ve bölme) sayısı

- Öncelikle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ sistemine dönüştürmek için gerekli çarpma işlemi sayısını hesaplayalım.
- Birinci sütunu indirgemek($n-1$ adet elemanı sıfır yapmak) için gerekli çarpma işlem sayısı

$$(n-1)(n+1)$$

  dir.
- $(n-1)$ adet satır ve her bir satırda $(n+1)$ eleman(A nın n adet sütun elemanı ile $\mathbf{b}$ nin ilgili satır elemanı).

Gauss yok etme yöntemi ile çözüm için gerekli aritmetik işlem(çarpma ve bölme) sayısı

- Öncelikle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ sistemine dönüştürmek için gerekli çarpma işlemi sayısını hesaplayalım.
- Birinci sütunu indirgemek($n-1$ adet elemanı sıfır yapmak) için gerekli çarpma işlem sayısı

$$(n-1)(n+1)$$

  dir.
- $(n-1)$ adet satır ve her bir satırda $(n+1)$ eleman(A nın n adet sütun elemanı ile $\mathbf{b}$ nin ilgili satır elemanı).
- Bu sayı ikinci sütun için

$$\begin{aligned} & (n-1-1)(n+1-1) \\ = \; & (n-2)n \end{aligned}$$

  ve

Gauss yok etme yöntemi ile çözüm için gerekli aritmetik işlem(çarpma ve bölme) sayısı

- Öncelikle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ sistemine dönüştürmek için gerekli çarpma işlemi sayısını hesaplayalım.
- Birinci sütunu indirgemek($n-1$ adet elemanı sıfır yapmak) için gerekli çarpma işlem sayısı

$$(n-1)(n+1)$$

dir.

- $(n-1)$ adet satır ve her bir satırda $(n+1)$ eleman(A nın n adet sütun elemanı ile $\mathbf{b}$ nin ilgili satır elemanı).
- Bu sayı ikinci sütun için

$$\begin{aligned} & (n-1-1)(n+1-1) \\ = \; & (n-2)n \end{aligned}$$

ve

- $(n-1)$ inci sütun için ise

Gauss yok etme yöntemi ile çözüm için gerekli aritmetik işlem(çarpma ve bölme) sayısı

- Öte yandan

$$
\begin{aligned}
(n-1)(n+1) &= n^2-1 \\
(n-1-1)(n+1-1) &= (n-2)n = (n-1)^2-1 \\
&\vdots \\
(n-1-(n-2))(n+1-(n-2)) &= (n-(n-2))^2-1 \\
&= 2^2-1
\end{aligned}
$$

Gauss yok etme yöntemi ile çözüm için gerekli aritmetik işlem(çarpma ve bölme) sayısı

- Öte yandan

$$\begin{aligned}
(n-1)(n+1) &= n^2-1 \\
(n-1-1)(n+1-1) &= (n-2)n = (n-1)^2-1 \\
&\vdots \\
(n-1-(n-2))(n+1-(n-2)) &= (n-(n-2))^2-1 \\
&= 2^2-1
\end{aligned}$$

- O halde uygulanan çarpma işlemi sayısı, 1 den n e kadar olan sayıların karelerinin toplam formülü yardımıyla

$$\begin{aligned}
& (2^2-1)+(3^2-1)+...+(n^2-1) \\
= \;& 2^2+3^2+\cdots+n^2-(n-1) \\
= \;& n(n+1)(2n+1)/6-n \\
= \;& \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n
\end{aligned}$$

Gauss yok etme yöntemi ile çözüm için gerekli aritmetik işlem(çarpma ve bölme) sayısı

- Ayrıca gerekli bölme işlemi sayısı ise yok etme işlemi için gerekli çarpanların sayısı olan
$$\frac{1}{2}(n-1)n$$
kadardır.

Gauss yok etme yöntemi ile çözüm için gerekli aritmetik işlem(çarpma ve bölme) sayısı

- Ayrıca gerekli bölme işlemi sayısı ise yok etme işlemi için gerekli çarpanların sayısı olan
$$\frac{1}{2}(n-1)n$$
kadardır.
- (Bu sayı $n \times n$ lik matrisin köşegen hariç alt üçgensel kısmındaki eleman sayısına eşittir.)

Gauss yok etme yöntemi ile çözüm için gerekli aritmetik işlem(çarpma ve bölme) sayısı

- Ayrıca gerekli bölme işlemi sayısı ise yok etme işlemi için gerekli çarpanların sayısı olan
$$\frac{1}{2}(n-1)n$$
kadardır.
- (Bu sayı $n \times n$ lik matrisin köşegen hariç alt üçgensel kısmındaki eleman sayısına eşittir.)
- O halde Gauss yok etme işlemiyle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ sistemine dönüştürülmesi için gerekli çarpma ve bölme işlemlerinin toplam sayısı
$$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{4}{3}n \tag{2}$$
kadardır.

Gauss yok etme yöntemi ile çözüm için gerekli aritmetik işlem(çarpma ve bölme) sayısı

- Ayrıca gerekli bölme işlemi sayısı ise yok etme işlemi için gerekli çarpanların sayısı olan
$$\frac{1}{2}(n-1)n$$
kadardır.
- (Bu sayı $n \times n$ lik matrisin köşegen hariç alt üçgensel kısmındaki eleman sayısına eşittir.)
- O halde Gauss yok etme işlemiyle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ sistemine dönüştürülmesi için gerekli çarpma ve bölme işlemlerinin toplam sayısı
$$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{4}{3}n \tag{2}$$
kadardır.
- Öte yandan elde edilen $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ sisteminin çözümü için gerekli olan ve 1 ile verilen işlem sayısını da ilave etmek suretiyle, Gauss yok etme yöntemiyle verilen denklem sisteminin çözümü için gerekli işlem sayısını

Gauss yok etme yöntemi ile çözüm için gerekli aritmetik işlem(çarpma ve bölme) sayısı

Hatırlatma

Yukarıda uygulanan herhangi bir satır yer değiştirmesi gerektirmeyen yok etme yöntemi **pivotsuz Gauss yok etme yöntemi** *olarak bilinir ve yok etme işlemi esnasında $A(j,j)$ köşegen elemanlarının sıfıra eşit olması durumunda uygulanamaz.*

Örneğin katsayı matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

olmuş olsaydı, $A(2,1) = 6$ elemanının bulunduğu pozisyonu sıfır yapmak için uygulanan $-2 \times S_1 + S_2 -> S_2$ yok etme işleminde $A(2,2) = 0$ olurdu ve yok etme işlemine devam edilemezdi.

- Bu durumda sıkça kullanılan alternatif

- Bu durumda sıkça kullanılan alternatif
- $A(j,j)$ elemanının bulunduğu sütunda yer alan $A(j+1,j),...A(n,j)$ elemanlarını sırasıyla tarayarak belirlenen mutlak değerce en büyük eleman eğer $|A(j,j)|$ den büyükse, bu elemanın bulunduğu satır elemanları ile j inci satır elemanlarını yer değiştirmektir.
  Bu yönteme **kısmi pivotlu** Gauss yok etme yöntemi(Gauss elimination with partial pivoting) adı verilmektedir.

Kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi

- Kısmi Pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 6 \\ 6x + 4y + 3z &= 13 \\ 9x + 10y + 6z &= 25 \end{aligned}$$

sistemini çözünüz.

Kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi

- $$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & : & 6 \\ 6 & 4 & 3 & : & 13 \\ 9 & 10 & 6 & : & 25 \end{bmatrix} \underset{\rightarrow}{S_1 <-> S_3} \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 & : & 25 \\ 6 & 4 & 3 & : & 13 \\ 3 & 2 & 1 & : & 6 \end{bmatrix}$$

Kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi

- $$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & : & 6 \\ 6 & 4 & 3 & : & 13 \\ 9 & 10 & 6 & : & 25 \end{bmatrix} \quad \underset{\longrightarrow}{S_1 <-> S_3} \quad \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 & : & 25 \\ 6 & 4 & 3 & : & 13 \\ 3 & 2 & 1 & : & 6 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{array}{r} \\ -2/3 \times S_1 + S_2 \rightarrow \\ -1/3 \times S_1 + S_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 & : & 25 \\ 0 & -8/3 & -1 & : & -11/3 \\ 0 & -4/3 & -1 & : & -7/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -1/2 \times S_2 + S_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 9 & 10 & 6 & : & 25 \\ 0 & -8/3 & -1 & : & -11/3 \\ 0 & 0 & -1/2 & : & -1/2 \end{bmatrix}$$

Kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi

- Elde edilen bu indirgenmiş sisteme karşılık gelen üst üçgensel sistem aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} 9x + 10y + 6z &= 25 \\ -8/3y - z &= -11/3 \\ -1/2z &= -1/2 \end{aligned}$$

Bu sistemi çözerek $x = y = z = 1$ sonucunu elde ederiz. Kısmi pivotlu yönteme ait Algoritmayı ve ilgili kodu bir sonraki bölümde LU ayrışım yöntemiyle birlikte veriyoruz.

Alıştırmalar

1 Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ x + 4y + z &= 6 \\ x + y + 6z &= 8 \end{aligned}$$

sistemini çözünüz.

1 Pivotsuz Gauss yok etme yöntemi ile

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ x + 4y + z &= 6 \\ x + y + 6z &= 8 \end{aligned}$$

sistemini çözünüz.

2 Kısmi pivotlu Gauss yok etme yöntemi ile

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ x + 4y + z &= -2 \\ 4x + y + 6z &= 9 \end{aligned}$$

sistemini çözünüz.

3 Soru 1 i **gaussilecoz** kodu yardımıyla da kontrol ediniz.

3 Soru 1 i **gaussilecoz** kodu yardımıyla da kontrol ediniz.

4 **gauss** kodu ile soru 1 de verilen sistemi $Ux = c$ üst üçgensel sistemine dönüştürünüz.

3 Soru 1 i **gaussilecoz** kodu yardımıyla da kontrol ediniz.

4 **gauss** kodu ile soru 1 de verilen sistemi $Ux = c$ üst üçgensel sistemine dönüştürünüz.

5 Soru 4 te elde ettiğiniz üst üçgensel sitemi **ustucgen** kodu yardımıyla çözünüz.

Kaynaklar

- Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1988.
- Coşkun, E. MATLAB/Octave ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:erhancoskun.com.tr).
- Hildebrand, F. B., Introduction to Numerical Analysis, Dover Publications, Inc., 1987.
- Kincaid, D., Cheney, W., Numerical Analysis, Brooks/Cole, 1991.
- LAPACK, Linear Algebra Package,(URL:netlib.org)
- OCTAVE, GNU özgür yazılım(*URL:OCTAVE.sourceforge.net*).
- Press, H. W. ve ark., Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, 1988.
- Stoer, J., Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1976.