Nonlineer cebirsel denklemler(Sabit Nokta İterasyonu)

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Eylül 2020

Nonlineer cebirsel denklem sıfır yerleri ve sabit nokta iterasyonu

Bu bölümde

- tek değişkenli ve reel değerli fonksiyonların sıfır yerlerini belirlemek amacıyla kullanılan sabit nokta iterasyon yöntemi,

Nonlineer cebirsel denklem sıfır yerleri ve sabit nokta iterasyonu

Bu bölümde

- tek değişkenli ve reel değerli fonksiyonların sıfır yerlerini belirlemek amacıyla kullanılan sabit nokta iterasyon yöntemi,
- özel bir sabit nokta iterasyon yöntemi olan *Newton* yöntemi ve

Nonlineer cebirsel denklem sıfır yerleri ve sabit nokta iterasyonu

Bu bölümde

- tek değişkenli ve reel değerli fonksiyonların sıfır yerlerini belirlemek amacıyla kullanılan sabit nokta iterasyon yöntemi,
- özel bir sabit nokta iterasyon yöntemi olan *Newton* yöntemi ve
- *Newton* yöntemindeki türeve sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen kiriş yöntemini inceliyoruz. Ayrıca

Nonlineer cebirsel denklem sıfır yerleri ve sabit nokta iterasyonu

Bu bölümde

- tek değişkenli ve reel değerli fonksiyonların sıfır yerlerini belirlemek amacıyla kullanılan sabit nokta iterasyon yöntemi,
- özel bir sabit nokta iterasyon yöntemi olan *Newton* yöntemi ve
- *Newton* yöntemindeki türeve sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen kiriş yöntemini inceliyoruz. Ayrıca
- nonlineer cebirsel sistemler için *Newton* yöntemi ve Newton benzeri bir yöntem,

Nonlineer cebirsel denklem sıfır yerleri ve sabit nokta iterasyonu

Bu bölümde

- tek değişkenli ve reel değerli fonksiyonların sıfır yerlerini belirlemek amacıyla kullanılan sabit nokta iterasyon yöntemi,
- özel bir sabit nokta iterasyon yöntemi olan *Newton* yöntemi ve
- *Newton* yöntemindeki türeve sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen kiriş yöntemini inceliyoruz. Ayrıca
- nonlineer cebirsel sistemler için *Newton* yöntemi ve Newton benzeri bir yöntem,
- aralık üzerindeki tüm sıfıryerlerini belirlemek amacıyla ikiye bölme yöntemini inceliyoruz.

Pratik sıfır yeri problemleri

- Bir f fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kesim noktaları f nin sıfır yerlerdir.

Pratik sıfır yeri problemleri

- Bir f fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kesim noktaları f nin sıfır yerlerdir.
- Ekonomide bir ürünün x adetinin üretimi sonucunda oluşan ve $C(x)$ ile gösterilen maliyet ile ürünün satışından elde edilen $R(x)$ gelir fonksiyonları yardımıyla tanımlanan $f(x) = R(x) - C(x)$ fonksiyonunun sıfır yeri gelirin gidere eşit olduğu üretim miktarıdır.

Pratik sıfır yeri problemleri

- Bir f fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kesim noktaları f nin sıfır yerlerdir.
- Ekonomide bir ürünün x adetinin üretimi sonucunda oluşan ve $C(x)$ ile gösterilen maliyet ile ürünün satışından elde edilen $R(x)$ gelir fonksiyonları yardımıyla tanımlanan $f(x) = R(x) - C(x)$ fonksiyonunun sıfır yeri gelirin gidere eşit olduğu üretim miktarıdır.
- $dx/dt = f(x)$ diferensiyel denkleminin denge noktaları(eğer mevcutsa) f fonksiyonunun reel sıfır yerleridir.

Pratik sıfır yeri problemleri

- Bir f fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kesim noktaları f nin sıfır yerlerdir.
- Ekonomide bir ürünün x adetinin üretimi sonucunda oluşan ve $C(x)$ ile gösterilen maliyet ile ürünün satışından elde edilen $R(x)$ gelir fonksiyonları yardımıyla tanımlanan $f(x) = R(x) - C(x)$ fonksiyonunun sıfır yeri gelirin gidere eşit olduğu üretim miktarıdır.
- $dx/dt = f(x)$ diferensiyel denkleminin denge noktaları(eğer mevcutsa) f fonksiyonunun reel sıfır yerleridir.
- Diferensiyel denklemler için özdeğer problemleri de sıfır yeri belirleme problemleri arasında yer alırlar ve mühendislik hesaplamalarında yer alır.

Fonksiyon sıfır yeri ve sabit nokta

- Verilen bir f fonksiyonunun sıfır yerini bulmak için sıkça kullanılan yöntem, *sıfır yeri belirleme problemini sabit nokta belirleme problemine dönüştürmektir*. Böylece f nin sıfır yerini belirleme problemi uygun bir g fonksiyonu için g nin sabit noktasını belirleme problemine dönüştürülmüş olur, yani

Fonksiyon sıfır yeri ve sabit nokta

- Verilen bir f fonksiyonunun sıfır yerini bulmak için sıkça kullanılan yöntem, *sıfır yeri belirleme problemini sabit nokta belirleme problemine dönüştürmektir*. Böylece f nin sıfır yerini belirleme problemi uygun bir g fonksiyonu için g nin sabit noktasını belirleme problemine dönüştürülmüş olur, yani
-
$$f(x) = 0 \iff x = g(x)$$

  dir. Burada problem uygun g yi seçebilmektir!

Sabit nokta iterasyonu

Tanım

Bir problemin çözümünde $n+1$*-inci adımda elde edilen yaklaşım,* n *ve/veya daha önceki adımlarda elde edilen yaklaşımları kullanıyorsa, bu tür yöntemlere iterasyon yöntemleri veya iteratif yöntemler adı verilir.*

Aşağıdaki teoremi inceleyelim:

Teorem

$$g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$$

sürekli bir fonksiyon olmak üzere g nin $[a, b]$ aralığında en az bir sıfır yeri vardır(İspat: alıştırma).

Tanım

$x_0 \in [a, b]$ *keyfi bir başlangıç noktası olsun.*

$$x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1}$$

ile tanımlanan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine g fonksiyonu ve x_0 başlangıç noktası ile üretilen iterasyon dizisi adı verilir.

Önerme

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi g ile üretilen bir iterasyon dizisi olmak üzere eğer bu dizi bir r noktasına yakınsıyor ve g fonksiyonu r noktasında sürekli ise bu taktirde r noktası g nin sabit noktasıdır.

İspat:

$$r = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\lim_{n\to\infty} x_n) = g(r)$$

dir.(Yukarıdaki işlemlerde g fonksiyonunun sürekliliğini hangi adımda kullandık?)

Sabit nokta iterasyonu

- f fonksiyonunun sıfır yerini sabit nokta kabul eden çok sayıda g fonksiyonu bulunabilir.

Sabit nokta iterasyonu

- f fonksiyonunun sıfır yerini sabit nokta kabul eden çok sayıda g fonksiyonu bulunabilir.
- Ancak bu fonksiyonlardan bazıları f nin sıfır yeri için yakınsak iterasyon üretirken, diğer bir kısmı ise başlangıç noktası sıfır yerine ne kadar yakın seçilirse seçilsin ıraksak bir iterasyon üretebilir.

Örnek

$f(x) = x^2 - x - 1$ fonksiyonun sıfıryerlerini belirleme probleminin aşağıda verilen g fonksiyonlarının sabit noktalarını belirleme problemine denk olduğunu gözlemleyerek, $x_0 = \sqrt{2}$ ile oluşturulan iterasyonların yakınsaklığını araştırınız.

Örnek

- $g(x) = x^2 - 1$

Örnek

- $g(x) = x^2 - 1$
- $g(x) = x + c(x^2 - x - 1), c \in R$ *ve*

$$c = -2/\sqrt{5}, -3/4, -1/\sqrt{5}$$

Örnek

- $g(x) = x^2 - 1$
- $g(x) = x + c(x^2 - x - 1), c \in R$ *ve*

$$c = -2/\sqrt{5}, -3/4, -1/\sqrt{5}$$

- $g(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$

- Yukarıda verilen g fonksiyonlarının sabit noktalarının f nin sıfıryerleri olduğu kolayca görülebilir. Örneğin

$$g(x) = x^2 - 1 = x \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 1 - x = 0$$

dır.

Sabit nokta iterasyonu

- Yukarıda verilen g fonksiyonlarının sabit noktalarının f nin sıfıryerleri olduğu kolayca görülebilir. Örneğin

$$g(x) = x^2 - 1 = x \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 1 - x = 0$$

dır.

- f nin sıfıryerlerinden birisi altın oran olarak bilinen

$$r_1 = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2 \cong 1.6180$$

ve diğeri ise ,

$$r_2 = \left(1 - \sqrt{5}\right)/2 \cong -0.6180$$

dir.

- $g(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Hiçbir x_0 ile (1) yardımıyla oluşturulan iterasyon $r_1 = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ sabit noktasına yakınsamaz:

Sabit nokta iterasyonu

- $g(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Hiçbir x_0 ile (1) yardımıyla oluşturulan iterasyon $r_1 = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ sabit noktasına yakınsamaz:
- Örneğin r_1 e yakın seçilen $x_0 = \sqrt{2}$ için

$$
\begin{aligned}
x_1 &= g(x_0) = g(\sqrt{2}) = 1 \\
x_2 &= g(x_1) = g(1) = 0 \\
x_3 &= g(x_2) = g(0) = -1 \\
x_4 &= g(x_3) = g(-1) = 0
\end{aligned}
$$

biçimde yakınsak olmayan salınımlı bir dizi elde edilir.

Sabit nokta iterasyonu

- $g(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Hiçbir x_0 ile (1) yardımıyla oluşturulan iterasyon $r_1 = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ sabit noktasına yakınsamaz:
- Örneğin r_1 e yakın seçilen $x_0 = \sqrt{2}$ için

$$
\begin{aligned}
x_1 &= g(x_0) = g(\sqrt{2}) = 1 \\
x_2 &= g(x_1) = g(1) = 0 \\
x_3 &= g(x_2) = g(0) = -1 \\
x_4 &= g(x_3) = g(-1) = 0
\end{aligned}
$$

  biçimde yakınsak olmayan salınımlı bir dizi elde edilir.
- Daha da yakın komşulukta seçilen $x_0 = 1.6$ için de aynı salınımlı dizi elde edilir.

Sabit nokta iterasyonu

- $g(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Hiçbir x_0 ile (1) yardımıyla oluşturulan iterasyon $r_1 = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ sabit noktasına yakınsamaz:
- Örneğin r_1 e yakın seçilen $x_0 = \sqrt{2}$ için

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) = g(\sqrt{2}) = 1 \\ x_2 &= g(x_1) = g(1) = 0 \\ x_3 &= g(x_2) = g(0) = -1 \\ x_4 &= g(x_3) = g(-1) = 0 \end{aligned}$$

biçimde yakınsak olmayan salınımlı bir dizi elde edilir.

- Daha da yakın komşulukta seçilen $x_0 = 1.6$ için de aynı salınımlı dizi elde edilir.
- O halde $g(x) = x^2 - 1$ iterasyon fonksiyonu f nin r_1 sabit noktasını belirlemek için uygun değildir.

Sabit nokta iterasyonu

- $g(x) = x + c(x^2 - x - 1)$ iterasyon fonksiyonu $x_0 = \sqrt{2}$ ve

Sabit nokta iterasyonu

- $g(x) = x + c(x^2 - x - 1)$ iterasyon fonksiyonu $x_0 = \sqrt{2}$ ve
  - $c = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ değeri için belirli bir adımdan sonra 1.6880 ve 1.5437 değerlerini alternatif olarak almak suretiyle hiç bir noktaya yakınsamaz:

- $g(x) = x + c(x^2 - x - 1)$ iterasyon fonksiyonu $x_0 = \sqrt{2}$ ve
  - $c = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ değeri için belirli bir adımdan sonra 1.6880 ve 1.5437 değerlerini alternatif olarak almak suretiyle hiç bir noktaya yakınsamaz:
  -

$$
\begin{aligned}
x_1 &= g(\sqrt{2}) = 1.7847, \\
x_2 &= g(x_1) = 1.4265, \\
x_3 &= g(x_2) = 1.7767, \\
&\vdots \\
x_n &= g(x_{n-1}) = 1.6880, \\
x_{n+1} &= g(x_n) = 1.5437, \\
x_{n+2} &= g(x_{n+1}) = 1.6880, \cdots
\end{aligned}
$$

Sabit nokta iterasyonu

Sabit nokta iterasyonu

-
  - $c = -3/4$ değeri için 57 adımda $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon = 1E - 10$ kriterini sağlayan 1.61803398878648 noktasına yakınsar.
    $c = -1/\sqrt{5}$ değeri için 5 adımda 1.61803398874989 değerine yakınsar.

Sabit nokta iterasyonu

- - $c = -3/4$ değeri için 57 adımda $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon = 1E - 10$ kriterini sağlayan 1.61803398878648 noktasına yakınsar.
    $c = -1/\sqrt{5}$ değeri için 5 adımda 1.61803398874989 değerine yakınsar.
- O halde c parametresinin değerine göre aynı başlangıç değeriyle oluşturulan iterasyon bazen ıraksak, bazen yavaş yakınsak veya veya bazen de hızlı yakınsak bir dizi oluşturabilmektedir.

Sabit nokta iterasyonu

- Öte yandan
$$g(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$$
iterasyon fonksiyonu da $x_0 = \sqrt{2}$ için 5 adımda 1.61803398874989 değerine yakınsar.

Sabit nokta iterasyonu

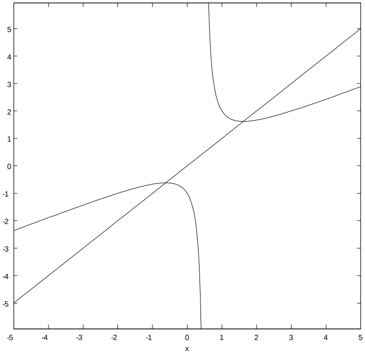
- Öte yandan
$$g(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$$
iterasyon fonksiyonu da $x_0 = \sqrt{2}$ için 5 adımda 1.61803398874989 değerine yakınsar.
- Şekil 1(a) da bu g fonksiyonunu ve $h(x) = x$ ile tanımlanan h fonksiyonunun grafikleri sunulmaktadır.

- Öte yandan

$$g(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$$

iterasyon fonksiyonu da $x_0 = \sqrt{2}$ için 5 adımda 1.61803398874989 değerine yakınsar.

- Şekil 1(a) da bu g fonksiyonunu ve $h(x) = x$ ile tanımlanan h fonksiyonunun grafikleri sunulmaktadır.
- g fonksiyonunun biri pozitif ve diğeri negatif olan iki sabit noktası (g ve h fonksiyonlarının grafiklerinin kesim noktaların apsisleri) olduğu görülmektedir. Şekil 1(b) de $x_{n+1} = g(x_n)$ iterasyonu ile elde edilen x_n noktaları için $(x_n, g(x_n))$ çiftlerinin $(r_1, g(r_1))$ noktasına yakınsadığı görülmektedir.



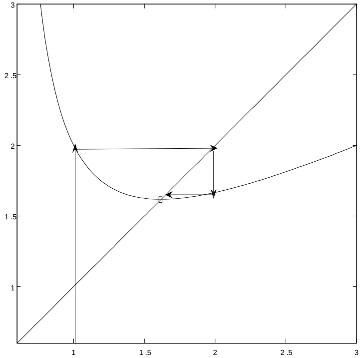


Figure: (a)g ve h fonksiyonları, (b)$(x_i, g(x_i))$ nokta çiftleri

Yukarıdaki iterasyonları aşağıda sunduğumuz Program yardımıyla elde ettik.

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)
- $mindeger = 1e - 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)
- $mindeger = 1e - 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
- $test = 1; sayac = 0;$

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)
- $mindeger = 1e - 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
- $test = 1; sayac = 0;$
- while test

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)
- $mindeger = 1e - 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
- $test = 1; sayac = 0;$
- while test
- $x1 = g(x0);$

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)
- $mindeger = 1e - 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
- $test = 1; sayac = 0;$
- while test
- $x1 = g(x0);$
- $fark = abs(x1 - x0);$

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)
- $mindeger = 1e - 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
- $test = 1; sayac = 0;$
- while test
- $x1 = g(x0);$
- $fark = abs(x1 - x0);$
- $test = (fark > mindeger)\&(abs(x1) < maxdeger)\&(sayac < maxsayac);$

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)
- $mindeger = 1e-10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
- $test = 1; sayac = 0;$
- while test
- $x1 = g(x0);$
- $fark = abs(x1 - x0);$
- $test = (fark > mindeger)\&(abs(x1) < maxdeger)\&(sayac < maxsayac);$
- $x0 = x1; sayac = sayac + 1;$

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)
- $mindeger = 1e-10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
- $test = 1; sayac = 0;$
- while test
- $x1 = g(x0);$
- $fark = abs(x1 - x0);$
- $test = (fark > mindeger)\&(abs(x1) < maxdeger)\&(sayac < maxsayac);$
- $x0 = x1; sayac = sayac + 1;$
- end

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)
- $mindeger = 1e - 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
- $test = 1; sayac = 0;$
- while test
- $x1 = g(x0);$
- $fark = abs(x1 - x0);$
- $test = (fark > mindeger)\&(abs(x1) < maxdeger)\&(sayac < maxsayac);$
- $x0 = x1; sayac = sayac + 1;$
- end
- $if\ abs(x1) > maxdeger$

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)
- $mindeger = 1e-10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
- $test = 1; sayac = 0;$
- while test
- $x1 = g(x0);$
- $fark = abs(x1 - x0);$
- $test = (fark > mindeger)\&(abs(x1) < maxdeger)\&(sayac < maxsayac);$
- $x0 = x1; sayac = sayac + 1;$
- end
- $if\ abs(x1) > maxdeger$
- $disp('iterasyoniraksaktir'); x1 = [];$

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)
- $mindeger = 1e - 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
- $test = 1; sayac = 0;$
- while test
- $x1 = g(x0);$
- $fark = abs(x1 - x0);$
- $test = (fark > mindeger)\&(abs(x1) < maxdeger)\&(sayac < maxsayac);$
- $x0 = x1; sayac = sayac + 1;$
- end
- $if\ abs(x1) > maxdeger$
- $disp('iterasyoniraksaktir'); x1 = [];$
- $elseif\ \ sayac == maxsayac$

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)
- $mindeger = 1e - 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
- $test = 1; sayac = 0;$
- while test
- $x1 = g(x0);$
- $fark = abs(x1 - x0);$
- $test = (fark > mindeger)\&(abs(x1) < maxdeger)\&(sayac < maxsayac);$
- $x0 = x1; sayac = sayac + 1;$
- end
- $if\ abs(x1) > maxdeger$
- $disp('iterasyoniraksaktir'); x1 = [];$
- $elseif\ \ sayac == maxsayac$
- $disp(['iterasyon', num2str(sayac),' adimdayakinsamamistir']);$

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)
- $mindeger = 1e - 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
- $test = 1; sayac = 0;$
- while test
- $x1 = g(x0);$
- $fark = abs(x1 - x0);$
- $test = (fark > mindeger)\&(abs(x1) < maxdeger)\&(sayac < maxsayac);$
- $x0 = x1; sayac = sayac + 1;$
- end
- $if\ abs(x1) > maxdeger$
- $disp('iterasyoniraksaktir'); x1 = [];$
- $elseif\ \ sayac == maxsayac$
- $disp(['iterasyon', num2str(sayac),' adimdayakinsamamistir']);$
- $x1 = [];$

Sabit nokta iterasyonu

- function x1=sabiter(g,x0)
- $mindeger = 1e - 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
- $test = 1; sayac = 0;$
- while test
- $x1 = g(x0);$
- $fark = abs(x1 - x0);$
- $test = (fark > mindeger)\&(abs(x1) < maxdeger)\&(sayac < maxsayac);$
- $x0 = x1; sayac = sayac + 1;$
- end
- $if\ abs(x1) > maxdeger$
- $disp('iterasyoniraksaktir'); x1 = [];$
- $elseif\ \ sayac == maxsayac$
- $disp([' iterasyon', num2str(sayac),' adimdayakinsamamistir']);$
- $x1 = [];$
- end

Sabit nokta iterasyonu

- Yukarıdaki örnekten, bazı g fonksiyonları ile oluşturulan iterasyonların ıraksadıkları, diğerlerinin ise farklı hızlarda yakınsadıklarını gözlemledik.

Sabit nokta iterasyonu

- Yukarıdaki örnekten, bazı g fonksiyonları ile oluşturulan iterasyonların ıraksadıkları, diğerlerinin ise farklı hızlarda yakınsadıklarını gözlemledik.
- Acaba yakınsak iterasyon üreten iterasyon fonksiyonları belirli kriterler yardımıyla ayırt edebilir miyiz?

Sabit nokta iterasyonu

- Yukarıdaki örnekten, bazı g fonksiyonları ile oluşturulan iterasyonların ıraksadıkları, diğerlerinin ise farklı hızlarda yakınsadıklarını gözlemledik.
- Acaba yakınsak iterasyon üreten iterasyon fonksiyonları belirli kriterler yardımıyla ayırt edebilir miyiz?
- Hatta yakınsak olanların yakınsama hızları için ne söyleyebiliriz?

Sabit nokta iterasyonu

- Yukarıdaki örnekten, bazı g fonksiyonları ile oluşturulan iterasyonların ıraksadıkları, diğerlerinin ise farklı hızlarda yakınsadıklarını gözlemledik.
- Acaba yakınsak iterasyon üreten iterasyon fonksiyonları belirli kriterler yardımıyla ayırt edebilir miyiz?
- Hatta yakınsak olanların yakınsama hızları için ne söyleyebiliriz?
- Bunun için aşağıdaki Teoremi inceleyelim:

Sabit nokta iterasyonu

Teorem

$g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir bir fonksiyon ve $r \in [a, b]$, g nin bu araklıktaki bir sabit noktası olsun. Ayrıca $\forall x \in (a, b)$ için

$$|g\prime(x)| \leq K < 1$$

özelliğini sağlayan K sabitinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \in [a, b]$ olmak üzere

$$x_{n+1} = g\left(x_n\right), n = 0, 1, 2, \cdots$$

ile tanımlanan iterasyon her $n \geq 0$ için

$$|x_n - r| \leq K^n |\, x_0 - r|$$

eşitsizliğini sağlar ve sonuç olarak bu iterasyonla üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi r sabit noktasına yakınsar.

Sabit nokta iterasyonu

- Türevler için ortalama değer teoreminden

$$\begin{aligned} |x_1 - r| &= |g(x_0) - r| = |g(x_0) - g(r)| = |g'(c_0)||x_0 - r| \\ &\leq K|x_0 - r|, c_0 \in (a, b) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Sabit nokta iterasyonu

- Türevler için ortalama değer teoreminden

$$\begin{aligned} |x_1 - r| &= |g(x_0) - r| = |g(x_0) - g(r)| = |g'(c_0)||x_0 - r| \\ &\leq K|x_0 - r|, c_0 \in (a, b) \end{aligned}$$

  elde ederiz.
- Yani, x_1 noktası r ye x_0 dan daha yakındır. Tümevarım gereği

$$|x_{n-1} - r| \leq K^{n-1}|x_0 - r|$$

  olduğunu kabul edelim.

- Türevler için ortalama değer teoreminden

$$\begin{aligned}|x_1 - r| &= |g(x_0) - r| = |g(x_0) - g(r)| = |g'(c_0)||x_0 - r| \\ &\leq K|x_0 - r|, c_0 \in (a, b)\end{aligned}$$

elde ederiz.

- Yani, x_1 noktası r ye x_0 dan daha yakındır. Tümevarım gereği

$$|x_{n-1} - r| \leq K^{n-1}|x_0 - r|$$

olduğunu kabul edelim.

- Tekrar ortalama değer teoremi ve tümevarım hipotezi gereği

$$\begin{aligned}|x_n - r| &= |g(x_{n-1}) - r| = |g(x_{n-1}) - g(r)| = |g'(c_{n-1})||x_{n-1} - r| \\ &\leq K|x_{n-1} - r| \\ &\leq K^n|x_0 - r|, c_{n-1} \in (a, b)\end{aligned}$$

elde ederiz.

Sabit nokta iterasyonu

- Türevler için ortalama değer teoreminden

$$
\begin{aligned}
|x_1 - r| &= |g(x_0) - r| = |g(x_0) - g(r)| = |g'(c_0)||x_0 - r| \\
&\leq K|x_0 - r|, c_0 \in (a, b)
\end{aligned}
$$

  elde ederiz.
- Yani, x_1 noktası r ye x_0 dan daha yakındır. Tümevarım gereği

$$
|x_{n-1} - r| \leq K^{n-1}|x_0 - r|
$$

  olduğunu kabul edelim.
- Tekrar ortalama değer teoremi ve tümevarım hipotezi gereği

$$
\begin{aligned}
|x_n - r| &= |g(x_{n-1}) - r| = |g(x_{n-1}) - g(r)| = |g'(c_{n-1})||x_{n-1} - r| \\
&\leq K|x_{n-1} - r| \\
&\leq K^n|x_0 - r|, c_{n-1} \in (a, b)
\end{aligned}
$$

  elde ederiz.
- $n \to \infty$ için, $0 < K < 1$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} |x_n - r| = 0$ ve sıkıştırma teoremi yardımıyla $\lim_{n\to\infty} x_n = r$ olduğu görülür.

Sabit nokta iterasyonu

- İterasyonun yakınsaması için bir diğer yeter şart aşağıdaki ifade edilmektedir:

  Sonuç: $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir ve

  türevi sürekli bir fonksiyon ve $r \in (a, b)$, g nin bu araklıktaki bir sabit noktası ve ayrıca $|g\prime(r)| < 1$ olsun. Bu durumda r ye yeterince yakın $x_0 \in [a, b]$ için

$$x_{n+1} = g\left(x_n\right), n = 0, 1, 2, \cdots$$

  ile üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi r sabit noktasına yakınsar.

İspat $|g\prime(r)| < 1$ ve g' fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli olduğundan

$$|g\prime(x)| \leq K < 1, \forall x \in (r-\delta, r+\delta)$$

sağlanacak biçimde $\delta > 0$ sabiti mevcuttur. $x_0 \in (r-\delta, r+\delta)$ ile Teorem 2 i uygulanarak sonuç elde edilir.

Uyarı:
$|g'(r)| = 1$ olması durumunda üretilen iterasyon başlangıç nokta seçimine göre yakınsak veya ıraksak olabilir(Alıştırma 7).

Sabit nokta iterasyonu

Sonuç:$g : [a, b] \to [a, b]$ sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir ve türevi sürekli bir fonksiyon ve $r \in [a, b]$, g nin bu aralıktaki bir sabit noktası ve $|g\prime(r)| > 1$ olsun. Bu durumda $x_0 \in [a, b]$, $x_0 \neq r$ için

$$x_{n+1} = g\left(x_n\right), n = 0, 1, 2, \cdots$$

ile üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi r sabit noktasına yakınsamaz.
İspat: Alıştırma 8.

Örnek

Teorem yardımıyla Örnek 1 e ait sonuçları analiz ediniz.

- $g(x) = x^2 - 1$ fonksiyonu ile üretilen dizi ıraksadı çünkü

$$g'((1+\sqrt{5})/2) = 1+\sqrt{5} > 1$$

dir ve yukarıdaki sonuca göre hiç bir x_0 ile üretilen dizi yakınsamaz. Aynı sonuç diğer sabit nokta için de geçerlidir, çünkü

$$|g'((1-\sqrt{5})/2)| = |1-\sqrt{5}| > 1$$

dir.

Örnek

Teorem yardımıyla Örnek 1 e ait sonuçları analiz ediniz.

- $g(x) = x^2 - 1$ fonksiyonu ile üretilen dizi ıraksadı çünkü

$$g'((1+\sqrt{5})/2) = 1+\sqrt{5} > 1$$

dir ve yukarıdaki sonuca göre hiç bir x_0 ile üretilen dizi yakınsamaz. Aynı sonuç diğer sabit nokta için de geçerlidir, çünkü

$$|g'((1-\sqrt{5})/2)| = |1-\sqrt{5}| > 1$$

dir.

- $c = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ için

$$g(x) = x - \frac{2}{\sqrt{5}}(x^2 - x - 1)$$

olup,

$$g'(x) = \frac{-4}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}} + 1$$

ve

$$g'((1+\sqrt{5})/2) = -1$$

Sabit nokta iterasyonu

- Aynı sonuç diğer sabit nokta için de geçerlidir, çünkü

$$g'((1-\sqrt{5})/2) = 3 > 1$$

dir.

Sabit nokta iterasyonu

- Aynı sonuç diğer sabit nokta için de geçerlidir, çünkü

$$g'((1-\sqrt{5})/2) = 3 > 1$$

dir.

- $c = -\frac{3}{4}$ için

$$g(x) = x - \frac{3}{4}(x^2 - x - 1)$$

olup,

$$g'(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

ve

$$|g'((1+\sqrt{5})/2)| = |-0.677| < 1$$

elde edilir ve bu durumda iterasyonun pozitif sabit noktası için yakınsamış olması beklenen bir sonuçtur. Ancak

$$g'((1-\sqrt{5})/2) \doteq 2.677 > 1$$

dir ve iterasyon negatif sabit nokta için yakınsamaz.

- $c = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ için

$$g(x) = x - \frac{1}{\sqrt{5}}(x^2 - x - 1)$$

olup,

$$g'(x) = \frac{-2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}} + 1$$

ve

$$g'((1+\sqrt{5})/2) = 0$$

elde edilir ve bu durumda da iterasyonun yakınsamış olması sürpriz değildir. Ancak $-0.618 < x_0 \leq 3.8$ için iterasyon $(1+\sqrt{5})/2$ ye yakınsarken, $x_0 < -0.619$ ve $x_0 > 3.9$ için iterasyon ıraksamaktadır. Öte yandan bu g fonksiyonu sadece pozitif sabit noktasını belirlemek için kullanılabilmektedir, çünkü

$$g'((1-\sqrt{5})/2) = 2 > 1$$

dir.

- $$g(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$$

  için,

  $$g'(x) = \frac{(x-1)^2 + x^2 - 1}{(2x-1)^2}$$

  olup,

  $$g'((1+\sqrt{5})/2) = 0$$

  dır. Ayrıca $(1, \infty)$ aralığındaki her x için $0 < g'(x) < 1$ dir.Dolayısıyla herhangi $x_0 \in (1, \infty)$ için iterasyon yakınsaktır. $x_0 = 0.6$ için $|g'(0.6)| = 12 > 1$ olmasına rağmen iterasyon bu başlangıç noktası ile de yakınsaktır. Ayrıca aynı iterasyon fonksiyonu negatif sabit nokta için de yakınsak iterasyon üretir, çünkü

  $$g'((1-\sqrt{5})/2) = 0 < 1$$

  dir.

- Sonuç olarak

Sabit nokta iterasyonu

- Sonuç olarak
- İterasyon fonksiyonu ile üretilen dizinin, fonksiyonun sahip olduğu her bir sabit nokta için yakınsak iterasyon üretmesi beklenmemelidir.

Sabit nokta iterasyonu

- Sonuç olarak
- İterasyon fonksiyonu ile üretilen dizinin, fonksiyonun sahip olduğu her bir sabit nokta için yakınsak iterasyon üretmesi beklenmemelidir.
- Yakınsak iterasyon genelde sadece sabit noktanın yeterince yakın komşuluğunda seçilen x_0 başlangıç noktaları için elde edilebilir.

- Sonuç olarak
- İterasyon fonksiyonu ile üretilen dizinin, fonksiyonun sahip olduğu her bir sabit nokta için yakınsak iterasyon üretmesi beklenmemelidir.
- Yakınsak iterasyon genelde sadece sabit noktanın yeterince yakın komşuluğunda seçilen x_0 başlangıç noktaları için elde edilebilir.
- r noktası g nin sabit noktası olmak üzere $|g'(r)| < 1$ şartını sağlayan g iterasyon fonksiyonu ile yakınsak dizi üretebilmek için r nin yeterince yakın komşuluğunda seçilen x_0 için $|g'(x_0)| < 1$ şartı, genelde yeterlidir ancak gerekli değildir.

Sabit nokta iterasyonu

- Yukarıdaki örneklerden, bazı iterasyon fonksiyonlarının başlangıç noktası sabit noktaya çok yakın seçilmesine rağmen,

Sabit nokta iterasyonu

- Yukarıdaki örneklerden, bazı iterasyon fonksiyonlarının başlangıç noktası sabit noktaya çok yakın seçilmesine rağmen,
- sabit noktaya yakınsayan iterasyon üretmeyebileceğini gözlemledik.

Sabit nokta iterasyonu

- Yukarıdaki örneklerden, bazı iterasyon fonksiyonlarının başlangıç noktası sabit noktaya çok yakın seçilmesine rağmen,
- sabit noktaya yakınsayan iterasyon üretmeyebileceğini gözlemledik.
- Öte yandan, bir iterasyon fonksiyonunun bir sabit nokta için yakınsak iterasyon üretirken, bir diğer sabit nokta için ıraksak bir iterasyon oluşturabileceğine dikkat ettik. Ayrıca yakınsak iterasyon üretmesine rağmen, farklı iterasyon fonksiyonlarının farklı hızlarda yakınsayan diziler oluşturduğunu da gözlemledik.

Sabit nokta iterasyonu

- Yukarıdaki örneklerden, bazı iterasyon fonksiyonlarının başlangıç noktası sabit noktaya çok yakın seçilmesine rağmen,
- sabit noktaya yakınsayan iterasyon üretmeyebileceğini gözlemledik.
- Öte yandan, bir iterasyon fonksiyonunun bir sabit nokta için yakınsak iterasyon üretirken, bir diğer sabit nokta için ıraksak bir iterasyon oluşturabileceğine dikkat ettik. Ayrıca yakınsak iterasyon üretmesine rağmen, farklı iterasyon fonksiyonlarının farklı hızlarda yakınsayan diziler oluşturduğunu da gözlemledik.
- Ancak bunları incelerken iterasyon fonksiyonlarının nasıl seçildiği üzerinde durmadık.

Sabit nokta iterasyonu

- Yukarıdaki örneklerden, bazı iterasyon fonksiyonlarının başlangıç noktası sabit noktaya çok yakın seçilmesine rağmen,
- sabit noktaya yakınsayan iterasyon üretmeyebileceğini gözlemledik.
- Öte yandan, bir iterasyon fonksiyonunun bir sabit nokta için yakınsak iterasyon üretirken, bir diğer sabit nokta için ıraksak bir iterasyon oluşturabileceğine dikkat ettik. Ayrıca yakınsak iterasyon üretmesine rağmen, farklı iterasyon fonksiyonlarının farklı hızlarda yakınsayan diziler oluşturduğunu da gözlemledik.
- Ancak bunları incelerken iterasyon fonksiyonlarının nasıl seçildiği üzerinde durmadık.
- Çözüm–>Newton

Alıştırmalar

1 $g : [a, b] \twoheadrightarrow [a, b]$ sürekli bir fonksiyon ise g nin $[a, b]$ aralığında en az bir sabit noktası olduğunu gösteriniz.(İpucu, $g(a) = a$ veya $g(b) = b$ ise bu durumda en az bir sabit nokta zaten mevcuttur. $g(a) > a$ ve $g(b) < b$ olduğunu kabul ederek $f(x) = x - g(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ de en az bir sıfır yeri olması gerektiğini aradeğer teoremi yardımıyla gösteriniz.

Alıştırmalar

2 Aşağıda verilen g fonksiyonlarının aynı sabit noktalara sahip olduklarını gösteriniz.

2 Aşağıda verilen g fonksiyonlarının aynı sabit noktalara sahip olduklarını gösteriniz.

- $g(x) = -\frac{1}{5}x(x-3)(x+3)$

Alıştırmalar

2 Aşağıda verilen g fonksiyonlarının aynı sabit noktalara sahip olduklarını gösteriniz.

- $g(x) = -\frac{1}{5}x(x-3)(x+3)$
- $g(x) = \frac{1}{8}x(x^2-12)$

Alıştırmalar

2 Aşağıda verilen g fonksiyonlarının aynı sabit noktalara sahip olduklarını gösteriniz.

- $g(x) = -\frac{1}{5}x(x-3)(x+3)$
- $g(x) = \frac{1}{8}x(x^2-12)$
- $g(x) = \frac{1}{5}x(2x^2-13)$

Alıştırmalar

2 Aşağıda verilen g fonksiyonlarının aynı sabit noktalara sahip olduklarını gösteriniz.

- $g(x) = -\frac{1}{5}x(x-3)(x+3)$
- $g(x) = \frac{1}{8}x(x^2-12)$
- $g(x) = \frac{1}{5}x(2x^2-13)$
- $g(x) = \frac{2x^3}{3x^2-4}$

Alıştırmalar

3 Soru 2'de verilen g fonksiyonlarının bütün sabit noktalarını sıfır yeri kabul eden en düşük dereceli bir f polinom fonksiyonunu belirleyiniz.

Alıştırmalar

3 Soru 2'de verilen g fonksiyonlarının bütün sabit noktalarını sıfır yeri kabul eden en düşük dereceli bir f polinom fonksiyonunu belirleyiniz.

4 Soru 3'de belirlediğiniz f fonksiyonunun hangi sıfıryerlerini bulabilmek için hangi g leri kullanabilirsiniz? Hangisini kullanmayı tercih edersiniz?

5 $f(x) = x^2 - 5$ fonksiyonunun pozitif sıfır yerini bulmak için $g(x) = x + cf(x)$ iterasyon fonksiyonu ve seçilen c için $|g\prime(x_0)| < 1$ şartını sağlayan başlangıç noktası ile oluşturulan $x_{n+1} = g(x_n)$ iterasyonu göz önüne alalım.

5 $f(x) = x^2 - 5$ fonksiyonunun pozitif sıfır yerini bulmak için $g(x) = x + cf(x)$ iterasyon fonksiyonu ve seçilen c için $|g\prime(x_0)| < 1$ şartını sağlayan başlangıç noktası ile oluşturulan $x_{n+1} = g(x_n)$ iterasyonu göz önüne alalım.

- İterasyonun yakınsaması için c hangi aralıkta değerler almalıdır?

5 $f(x) = x^2 - 5$ fonksiyonunun pozitif sıfır yerini bulmak için $g(x) = x + cf(x)$ iterasyon fonksiyonu ve seçilen c için $|g\prime(x_0)| < 1$ şartını sağlayan başlangıç noktası ile oluşturulan $x_{n+1} = g(x_n)$ iterasyonu göz önüne alalım.

- İterasyonun yakınsaması için c hangi aralıkta değerler almalıdır?
- Kuadratik olarak yakınsak olan iterasyon üretebilmek için c ne olmalıdır?

6 Soru 5'de verilen f fonksiyonunun sıfıryerlerinin aşağıda verilen g fonksiyonlarının sabit noktaları olduğunu gösteriniz. Hangi g ler ile oluşturulan iterasyonlar yakınsar? Yakınsak iterasyonlar için yakınsama basamaklarını belirleyiniz.

6 Soru 5'de verilen f fonksiyonunun sıfıryerlerinin aşağıda verilen g fonksiyonlarının sabit noktaları olduğunu gösteriniz. Hangi g ler ile oluşturulan iterasyonlar yakınsar? Yakınsak iterasyonlar için yakınsama basamaklarını belirleyiniz.

- $g(x) = x(6 - x^2)$

6 Soru 5'de verilen f fonksiyonunun sıfıryerlerinin aşağıda verilen g fonksiyonlarının sabit noktaları olduğunu gösteriniz. Hangi g ler ile oluşturulan iterasyonlar yakınsar? Yakınsak iterasyonlar için yakınsama basamaklarını belirleyiniz.

- $g(x) = x(6 - x^2)$
- $g(x) = \frac{1}{8}x(13 - x^2)$

6 Soru 5'de verilen f fonksiyonunun sıfıryerlerinin aşağıda verilen g fonksiyonlarının sabit noktaları olduğunu gösteriniz. Hangi g ler ile oluşturulan iterasyonlar yakınsar? Yakınsak iterasyonlar için yakınsama basamaklarını belirleyiniz.

- $g(x) = x(6 - x^2)$
- $g(x) = \frac{1}{8}x(13 - x^2)$
- $g(x) = \frac{1}{2}x(3 - \frac{1}{5}x^2)$

7 $g(x) = x - (x-1)^2$ iterasyon fonksiyonu verilsin.

7 $g(x) = x - (x-1)^2$ iterasyon fonksiyonu verilsin.

- Verilen iterasyon fonksiyonunun $r = 1$ sabit noktasına sahip olduğunu ve $g'(r) = 1$ olduğunu gözlemleyiniz.

Alıştırmalar

7 $g(x) = x - (x-1)^2$ iterasyon fonksiyonu verilsin.

- Verilen iterasyon fonksiyonunun $r = 1$ sabit noktasına sahip olduğunu ve $g'(r) = 1$ olduğunu gözlemleyiniz.
- $r = 1$ noktasına yeterince yakın ve $x_0 > 1$ başlangıç noktası için oluşturulan iterasyonun $r = 1$ sabit noktasına yakınsadığını uygun bir $x_0 > 1$ ile x_1, x_2, x_3 değerlerini hesaplayarak gözlemleyiniz.

Alıştırmalar

7 $g(x) = x - (x-1)^2$ iterasyon fonksiyonu verilsin.

- Verilen iterasyon fonksiyonunun $r = 1$ sabit noktasına sahip olduğunu ve $g'(r) = 1$ olduğunu gözlemleyiniz.
- $r = 1$ noktasına yeterince yakın ve $x_0 > 1$ başlangıç noktası için oluşturulan iterasyonun $r = 1$ sabit noktasına yakınsadığını uygun bir $x_0 > 1$ ile x_1, x_2, x_3 değerlerini hesaplayarak gözlemleyiniz.
- $x_0 < 1$ şartını sağlayan hiçbir başlangıç noktası için g ile oluşturulan iterasyonun $r = 1$sabit noktasına yakınsamadığını uygun bir $x_0 > 1$ ile x_1, x_2, x_3 değerlerini hesaplayarak gözlemleyiniz.

8 $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir ve türevi sürekli bir fonksiyon ve $r \in [a, b]$, g nin bu aralıktaki bir sabit noktası olsun. Ayrıca $|g\prime(r)| > 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \in [a, b]$, $x_0 \neq r$ için $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ ile üretilen $\{x_n\}$ dizisi r sabit noktasına yakınsamayacağını gösteriniz.

Alıştırmalar

8 $g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir ve türevi sürekli bir fonksiyon ve $r \in [a, b]$, g nin bu aralıktaki bir sabit noktası olsun. Ayrıca $|g\prime(r)| > 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \in [a, b]$, $x_0 \neq r$ için $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ ile üretilen $\{x_n\}$ dizisi r sabit noktasına yakınsamayacağını gösteriniz.

9 Eğer bir g iterasyon fonksiyonu r sabit noktasının komşuluğunda $n - inci$ mertebeden türeve sahip ve

$$g'(r) = g''(r) = \cdots = g^{(n-1)}(r) = 0, g^{(n)}(r) \neq 0$$

ise g ile elde edilen iterasyon $n - inci$ basamaktan yakınsak olduğunu gösteriniz.

10 $g(x) = x - 1/2 \sin(2x)$ iterasyon fonksiyonu ile oluşturulan iterasyonların $r = 0$ ve $r = \pi$ sabit noktalarına yakınsak, ancak $r = \pi/2$ sabit noktasına yakınsak olmadığını ilgili teori yardımıyla gösteriniz.

Alıştırmalar

10 $g(x) = x - 1/2\sin(2x)$ iterasyon fonksiyonu ile oluşturulan iterasyonların $r = 0$ ve $r = \pi$ sabit noktalarına yakınsak, ancak $r = \pi/2$ sabit noktasına yakınsak olmadığını ilgili teori yardımıyla gösteriniz.

11 $g(x) = x - tan(2x)$ iterasyon fonksiyonu verilsin.

Alıştırmalar

10 $g(x) = x - 1/2\sin(2x)$ iterasyon fonksiyonu ile oluşturulan iterasyonların $r = 0$ ve $r = \pi$ sabit noktalarına yakınsak, ancak $r = \pi/2$ sabit noktasına yakınsak olmadığını ilgili teori yardımıyla gösteriniz.

11 $g(x) = x - tan(2x)$ iterasyon fonksiyonu verilsin.

- $r = 0$ ın g nin bir sabit noktası olduğunu ve $g'(0) = -1$ olduğunu gözlemleyiniz.

Alıştırmalar

10 $g(x) = x - 1/2\sin(2x)$ iterasyon fonksiyonu ile oluşturulan iterasyonların $r = 0$ ve $r = \pi$ sabit noktalarına yakınsak, ancak $r = \pi/2$ sabit noktasına yakınsak olmadığını ilgili teori yardımıyla gösteriniz.

11 $g(x) = x - tan(2x)$ iterasyon fonksiyonu verilsin.

- $r = 0$ ın g nin bir sabit noktası olduğunu ve $g'(0) = -1$ olduğunu gözlemleyiniz.
- g ile oluşturulan iterasyonların hiçbir $x_0 \neq 0$ için $r = 0$ sabit noktasına yakınsamayacağını uygun x_0 başlangıç değerleri seçerek gözlemleyiniz.

Kaynaklar

- Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1988.
- Coşkun, E. MATLAB/Octave ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:aves.ktu.edu.tr/erhan/dokumanlar).
- Edwards & Penney, çeviri ed. Akın, Ö., Diferensiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri, Palme Yayıncılık, 2006.
- Hildebrand, F. B., Introduction to Numerical Analysis, Dover Publications, Inc., 1987.
- Kincaid, D., Cheney, W., Numerical Analysis, Brooks/Cole, 1991.
- Octave, GNU özgür yazılım(*URL:Octave.sourceforge.net*).
- Stoer, J., Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1976.