Nonlineer cebirsel denklemler(Newton ve kiriş yöntemleri)

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Eylül, 2020

Nonlineer cebirsel denklemler(Newton yöntemi)

Bu bölümde

- tek değişkenli ve reel değerli fonksiyonların sıfır yerlerini belirlemek amacıyla özel bir sabit nokta iterasyon yöntemi olan *Newton-Raphson* yöntemi ve

Bu bölümde

- tek değişkenli ve reel değerli fonksiyonların sıfır yerlerini belirlemek amacıyla özel bir sabit nokta iterasyon yöntemi olan *Newton-Raphson* yöntemi ve
- *Newton-Raphson* yöntemindeki türeve sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen kiriş yöntemini inceliyoruz.

Sabit nokta iterasyonu

- Verilen bir f fonksiyonunun sıfır yerini bulmak için sıkça kullanılan yöntem, *sıfır yeri belirleme problemini sabit nokta belirleme problemine dönüştüğünü biliyoruz*.

Sabit nokta iterasyonu

- Verilen bir f fonksiyonunun sıfır yerini bulmak için sıkça kullanılan yöntem, *sıfır yeri belirleme problemini sabit nokta belirleme problemine dönüştüğünü biliyoruz*.
- Ayrıca f nin sıfır yerini belirleme probleminin, uygun bir g fonksiyonu için g nin sabit noktasını belirleme problemine dönüştürüldüğünü, yani

$$f(x) = 0 \iff x = g(x)$$

biliyoruz.

Sabit nokta iterasyonu

- Ayrıca

Sabit nokta iterasyonu

- Ayrıca
- İterasyon fonksiyonu ile üretilen dizinin, fonksiyonun sahip olduğu her bir sabit nokta için yakınsak iterasyon üretmesi beklenmemesi gerektiğini,

Sabit nokta iterasyonu

- Ayrıca
- İterasyon fonksiyonu ile üretilen dizinin, fonksiyonun sahip olduğu her bir sabit nokta için yakınsak iterasyon üretmesi beklenmemesi gerektiğini,
- Yakınsak iterasyon genelde sadece sabit noktanın yeterince yakın komşuluğunda seçilen x_0 başlangıç noktaları için elde edilebileceğini,

Sabit nokta iterasyonu

- Ayrıca
- İterasyon fonksiyonu ile üretilen dizinin, fonksiyonun sahip olduğu her bir sabit nokta için yakınsak iterasyon üretmesi beklenmemesi gerektiğini,
- Yakınsak iterasyon genelde sadece sabit noktanın yeterince yakın komşuluğunda seçilen x_0 başlangıç noktaları için elde edilebileceğini,
- r noktası g nin sabit noktası olmak üzere $|g'(r)| < 1$ şartını sağlayan g iterasyon fonksiyonu ile yakınsak dizi üretebilmek için r nin yeterince yakın komşuluğunda seçilen x_0 için $|g'(x_0)| < 1$ şartı, genelde yeterlidir ancak gerekli olmadığını,

Sabit nokta iterasyonu

- Ayrıca
- İterasyon fonksiyonu ile üretilen dizinin, fonksiyonun sahip olduğu her bir sabit nokta için yakınsak iterasyon üretmesi beklenmemesi gerektiğini,
- Yakınsak iterasyon genelde sadece sabit noktanın yeterince yakın komşuluğunda seçilen x_0 başlangıç noktaları için elde edilebileceğini,
- r noktası g nin sabit noktası olmak üzere $|g'(r)| < 1$ şartını sağlayan g iterasyon fonksiyonu ile yakınsak dizi üretebilmek için r nin yeterince yakın komşuluğunda seçilen x_0 için $|g'(x_0)| < 1$ şartı, genelde yeterlidir ancak gerekli olmadığını,
- söz konusu iterasyon fonksiyonunun seçimi için genel bir yöntemin mevcut olmadığını biliyoruz.

Sabit nokta iterasyonu

- Önceki bölüm örneklerinden, bazı iterasyon fonksiyonlarının başlangıç noktası sabit noktaya çok yakın seçilmesine rağmen,

Sabit nokta iterasyonu

- Önceki bölüm örneklerinden, bazı iterasyon fonksiyonlarının başlangıç noktası sabit noktaya çok yakın seçilmesine rağmen,
- sabit noktaya yakınsayan iterasyon üretmeyebileceğini gözlemledik.

Sabit nokta iterasyonu

- Önceki bölüm örneklerinden, bazı iterasyon fonksiyonlarının başlangıç noktası sabit noktaya çok yakın seçilmesine rağmen,
- sabit noktaya yakınsayan iterasyon üretmeyebileceğini gözlemledik.
- Öte yandan, bir iterasyon fonksiyonunun bir sabit nokta için yakınsak iterasyon üretirken, bir diğer sabit nokta için ıraksak bir iterasyon oluşturabileceğine dikkat ettik. Ayrıca yakınsak iterasyon üretmesine rağmen, farklı iterasyon fonksiyonlarının farklı hızlarda yakınsayan diziler oluşturduğunu da gözlemledik.

Sabit nokta iterasyonu

- Önceki bölüm örneklerinden, bazı iterasyon fonksiyonlarının başlangıç noktası sabit noktaya çok yakın seçilmesine rağmen,
- sabit noktaya yakınsayan iterasyon üretmeyebileceğini gözlemledik.
- Öte yandan, bir iterasyon fonksiyonunun bir sabit nokta için yakınsak iterasyon üretirken, bir diğer sabit nokta için ıraksak bir iterasyon oluşturabileceğine dikkat ettik. Ayrıca yakınsak iterasyon üretmesine rağmen, farklı iterasyon fonksiyonlarının farklı hızlarda yakınsayan diziler oluşturduğunu da gözlemledik.
- Ancak bunları incelerken iterasyon fonksiyonlarının nasıl seçildiği üzerinde durmadık.

Newton-*Raphson* yöntemi

- Bu bağlamda *Newton*[1], hala güncelliğini koruyan bir öneri sunmaktadır:

[1] Isaac Newton 1642 – 1726, İngiliz fizikçi ve matematikçi

[2] Joseph Raphson, 1648-1715, İngiliz matematikçi.

Newton-*Raphson* yöntemi

- Bu bağlamda *Newton*[1], hala güncelliğini koruyan bir öneri sunmaktadır:
- Sıfır noktası komşuluğunda türevlenebilen f fonksiyonunun sıfır yerini bulma problemi

$$g(x) = x - f(x)/f'(x)$$

ile tanımlanan g fonksiyonunun sabit noktasını bulma problemine denktir, diğer bir değimle her iki problem de aynı çözüm kümesine sahiptirler. Bu özel g iterasyon fonksiyonu ve sıfır yerine yeterince yakın seçilen x_0 başlangıç noktası ile oluşturulan

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n), n = 0, 1, 2, ...$$

iterasyonuna *Newton* veya *Newton-Raphson*[2] iterasyonu ve g fonksiyonuna da **Newton-Raphson iterasyon fonksiyonu** adı verilmektredir.

[1] Isaac Newton 1642 – 1726, İngiliz fizikçi ve matematikçi

[2] Joseph Raphson, 1648-1715, İngiliz matematikçi.

Örnek

$f(x) = x^2 - 7$ fonksiyonunun $x_0 = 3$ noktasına yakın sıfır yeri için x_i, $i = 1, 2, 3, 4$ Newton-Rapson yaklaşımlarını hesaplayınız. Her adımda virgülden sonra doğru hesaplanan basamak sayısının nasıl arttığını gözlemleyiniz.

Öncelikle Newton-Rapson iterasyon fonksiyonunu hesaplayalım:

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x - \frac{x^2 - 7}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{7}{2x} \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. O halde iterasyonumuz

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{x_n}{2} + \frac{7}{2x_n}, n = 0, 1, \cdots$$

olarak tanımlanır.

Newton-*Raphson* yöntemi

- İlk üç yaklaşımı kolayca hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{x_0}{2} + \frac{7}{2x_0} = \frac{3}{2} + \frac{7}{6} = \frac{8}{3} \doteq 2.\underbrace{6}\,66666666666667, \\
x_2 &= \frac{x_1}{2} + \frac{7}{2x_1} \doteq 2.\underbrace{645}\,833333333333, \\
x_3 &= \frac{x_2}{2} + \frac{7}{2x_2} \doteq 2.\underbrace{645751}\,312335958 \\
x_4 &= \frac{x_3}{2} + \frac{7}{2x_3} = 2.\underbrace{645751311064}\,591
\end{aligned}$$

Newton-*Raphson* yöntemi

- İlk üç yaklaşımı kolayca hesaplayabiliriz:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{x_0}{2} + \frac{7}{2x_0} = \frac{3}{2} + \frac{7}{6} = \frac{8}{3} \doteq 2.\underbrace{6}\,66666666666667, \\
x_2 &= \frac{x_1}{2} + \frac{7}{2x_1} \doteq 2.\underbrace{645}\,833333333333, \\
x_3 &= \frac{x_2}{2} + \frac{7}{2x_2} \doteq 2.\underbrace{645751}\,312335958 \\
x_4 &= \frac{x_3}{2} + \frac{7}{2x_3} = 2.\underbrace{645751311064}\,591
\end{aligned}
$$

- Öte yandan elde ettiğimiz bu değer virgülden sonra onbeş basamağa kadar yuvarlanmış

$$\sqrt{7} \doteq 2.645751311064591\ldots$$

değeridir. Her adımda virgülden sonraki doğru basamak sayısı, bir önceki adımın **en az iki** katıdır.

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yakla şım

1. $function\ x1 = newton(f, fp, x0)$

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yaklaşım

1. $function\ x1 = newton(f, fp, x0)$
2. $mindeger = 1e - 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yakla şım

1. $function\ x1 = newton(f, fp, x0)$
2. $mindeger = 1e-10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
3. $sayac = 0; test = 1;$

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yakla şım

1. $function\ x1 = newton(f, fp, x0)$
2. $mindeger = 1e-10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
3. $sayac = 0; test = 1;$
4. $while\ test$

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yakla şım

1. $function\ x1 = newton(f, fp, x0)$
2. $\qquad mindeger = 1e - 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
3. $\qquad sayac = 0; test = 1;$
4. $\qquad while\ test$
5. $\qquad\qquad delx = -fp(x0) \backslash f(x0); x1 = x0 + delx;$

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yakla şım

1. $function\ x1 = newton(f, fp, x0)$
2. $mindeger = 1e - 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
3. $sayac = 0; test = 1;$
4. $while\ test$
5. $delx = -fp(x0)\backslash f(x0); x1 = x0 + delx;$
6. $fark = norm(delx, inf); sayac = sayac + 1;$

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yakla şım

1. $function\ x1 = newton(f, fp, x0)$
2. $\qquad mindeger = 1e-10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
3. $\qquad sayac = 0; test = 1;$
4. $\qquad while\ test$
5. $\qquad\qquad delx = -fp(x0)\backslash f(x0); x1 = x0 + delx;$
6. $\qquad\qquad fark = norm(delx, inf); sayac = sayac + 1;$
7. $\qquad\qquad test = (fark > mindeger)\&(norm(x1, inf) > maxdeger)\&(sayac < maxsayac);$

1. $function\ x1 = newton(f, fp, x0)$
2. $\quad mindeger = 1e-10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;$
3. $\quad sayac = 0; test = 1;$
4. $\quad while\ test$
5. $\qquad delx = -fp(x0)\backslash f(x0); x1 = x0 + delx;$
6. $\qquad fark = norm(delx, inf); sayac = sayac + 1;$
7. $\qquad test = (fark > mindeger)\&(norm(x1, inf) > maxdeger)\&(sayac < maxsayac);$
8. $\qquad x0 = x1;$

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yakla şım

```
function x1 = newton(f, fp, x0)
        mindeger = 1e-10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;
        sayac = 0; test = 1;
        while test
                delx = -fp(x0)\f(x0); x1 = x0 + delx;
                fark = norm(delx, inf); sayac = sayac + 1;
                test = (fark > mindeger)&(norm(x1, inf) > maxdeger)&(sayac < maxsayac);
                x0 = x1;
        end
```

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yakla şım

```
function x1 = newton(f, fp, x0)
    mindeger = 1e-10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;
    sayac = 0; test = 1;
    while test
        delx = -fp(x0)\f(x0); x1 = x0 + delx;
        fark = norm(delx, inf); sayac = sayac + 1;
        test = (fark > mindeger)&(norm(x1, inf) > maxdeger)&(sayac < maxsayac);
        x0 = x1;
    end
    if norm(x1, inf) > maxdeger
```

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yakla şım

```
function x1 = newton(f, fp, x0)
        mindeger = 1e − 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;
        sayac = 0; test = 1;
        while test
                delx = −fp(x0)\f(x0); x1 = x0 + delx;
                fark = norm(delx, inf); sayac = sayac + 1;
                test = (fark > mindeger)&(norm(x1, inf) > maxdeger)&(sayac < maxsayac);
                x0 = x1;
        end
        if norm(x1, inf) > maxdeger
                disp('iterasyon iraksaktir'); x1 = [];
```

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yakla şım

```
function x1 = newton(f, fp, x0)
        mindeger = 1e-10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;
        sayac = 0; test = 1;
        while test
                delx = -fp(x0)\f(x0); x1 = x0 + delx;
                fark = norm(delx, inf); sayac = sayac + 1;
                test = (fark > mindeger)&(norm(x1, inf) > maxdeger)&(sayac < maxsayac);
                x0 = x1;
        end
        if norm(x1, inf) > maxdeger
                disp('iterasyon iraksaktir'); x1 = [];
        elseif sayac == max sayac
```

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yakla şım

```
function x1 = newton(f, fp, x0)
        mindeger = 1e-10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;
        sayac = 0; test = 1;
        while test
                delx = -fp(x0)\f(x0); x1 = x0 + delx;
                fark = norm(delx, inf); sayac = sayac + 1;
                test = (fark > mindeger)&(norm(x1, inf) > maxdeger)&(sayac < maxsayac);
                x0 = x1;
        end
        if norm(x1, inf) > maxdeger
                disp('iterasyon iraksaktir'); x1 = [];
        elseif sayac == max sayac
                disp(['iterasyon', num2str(sayac),' adimda yakinsamamistir']);
```

Ayrık veri kümesine elemanter fonksiyonlarla yakla şım

```
function x1 = newton(f, fp, x0)
        mindeger = 1e − 10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;
        sayac = 0; test = 1;
        while test
                delx = −fp(x0)\f(x0); x1 = x0 + delx;
                fark = norm(delx, inf); sayac = sayac + 1;
                test = (fark > mindeger)&(norm(x1, inf) >
maxdeger)&(sayac < maxsayac);
                x0 = x1;
        end
        if norm(x1, inf) > maxdeger
                disp('iterasyon iraksaktir'); x1 = [];
        elseif sayac == max sayac
                disp(['iterasyon', num2str(sayac),' adimda
yakinsamamistir']);
                x1 = [];
```

```
function x1 = newton(f, fp, x0)
    mindeger = 1e-10; maxdeger = 1e5; maxsayac = 100;
    sayac = 0; test = 1;
    while test
        delx = -fp(x0)\f(x0); x1 = x0 + delx;
        fark = norm(delx, inf); sayac = sayac + 1;
        test = (fark > mindeger)&(norm(x1, inf) > maxdeger)&(sayac < maxsayac);
        x0 = x1;
    end
    if norm(x1, inf) > maxdeger
        disp('iterasyon iraksaktir'); x1 = [];
    elseif sayac == max sayac
        disp(['iterasyon', num2str(sayac),' adimda yakinsamamistir']);
        x1 = [];
    end
```

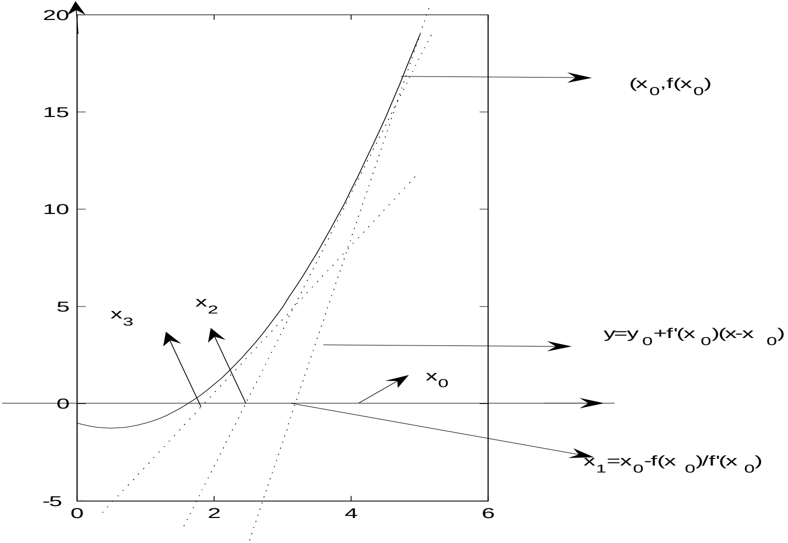
Gözlem Örnek 6.1 in son şıkkında kullandığımız

$$g(x) = \frac{x^2+1}{2x-1} = x - \frac{x^2-x-1}{2x-1}$$

fonksiyonu esasen *Newton-Raphson* iterasyon fonksiyonudur, dolayısıyla bu fonksiyon seçimiyle yukarıda *Newton-Raphson* yöntemini uygulamış olduk ve iterasyonun her iki sabit noktaya da hızlı bir biçimde yakınsadığını gözlemledik.

- Newton-Rapson yöntemine göre sıfır yerine yeterince yakın seçilen x_0 için elde edilen
$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$$
yaklaşımı Şekil 1 de de görüldüğü üzere $(x_0, f(x_0))$ noktasında $y = f(x)$ fonksiyonun grafiğine çizilen teğet doğrusunun(yani, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ile tanımlanan doğrunun) x eksenini kesim noktasıdır.

Newton-*Raphson* yöntemi



Newton-*Raphson* yöntemi

- r noktası f nin sıfır yeri ve $f'(r) \neq 0$, $f''(r)$ tanımlı ise $g'(r) = 0$ dır:

$$g(x) = x - f(x)/f'(x)$$

olup, $f(r) = 0$ olduğundan

$$g'(r) = 1 - \left((f'(r))^2 - f(r)f''(r) \right) (f'(r))^2 = 0$$

olarak elde edilir.

Newton-*Raphson* yöntemi

- *Newton-Raphson* yöntemi sıfır noktasının küçük komşuluğunda kuadratik(ikinci basamaktan) yakınsak bir yöntemdir: r noktası g fonksiyonunun sabit noktası, $f'(r) \neq 0$ ve x_n ise $n - inci$ adımda elde edilen yaklaşım olmak üzere

$$x_{n+1} = g(x_n) = g(r) + g'(r)(x_n - r) + \frac{1}{2}g''(c_x)(x_n - r)^2,$$

- burada c_x : x_n ve r arasında bir noktadır. $g(r) = r$ ve $g'(r) = 0$ olduğunu kullanarak

$$x_{n+1} - r = \frac{1}{2}g''(c_x)(x_n - r)^2$$

  elde ederiz.
- Bu sonuç ise yöntemin, eğer yakınsak ise, kuadratik olarak yakınsadığını gösterir.

Newton-*Raphson* yöntemi

- *Newton-Raphson* iterasyonunun r noktasına yakınsaması için yeter şart x_0 noktasının r noktasını içeren ve

$$|g'(x)| = |f(x)f''(x)|/(f'(x))^2 < 1$$

şartını sağlayan komşulukta seçilmesidir. Bu şart yukarıda da belirtildiği gibi gerekli değildir: Örnek 6.2 de $x_0 = 0.6$ için $|g'(x_0)| > 1$ dir, ancak iterasyon yine de yakınsaktır.

- *Newton-Raphson* iterasyonunun r noktasına yakınsaması için yeter şart x_0 noktasının r noktasını içeren ve

$$|g'(x)| = |f(x)f''(x)|/(f'(x))^2 < 1$$

şartını sağlayan komşulukta seçilmesidir. Bu şart yukarıda da belirtildiği gibi gerekli değildir: Örnek 6.2 de $x_0 = 0.6$ için $|g'(x_0)| > 1$ dir, ancak iterasyon yine de yakınsaktır.

- Eğer bir g iterasyon fonksiyonu r sabit noktasının komşuluğunda $n-$ *inci* mertebeden türeve sahip ve

$$g'(r) = g''(r) = \cdots = g^{(n-1)}(r) = 0, g^{(n)}(r) \neq 0$$

ise g ile elde edilen iterasyon $n-$ *inci* basamaktan yakınsaktır(Alıştırma 9). $n = 1$ olması durumunda yöntem *lineer yakınsaktır* denir.

Newton-*Raphson* yöntemi

- *Newton-Raphson* fonksiyonundan farklı olarak

$$g(x) = x - \frac{1}{\sqrt{5}}(x^2 - x - 1)$$

ile pozitif sabit nokta için üretilen iterasyon da kuadratik yakınsaktır, çünkü $g'((1+\sqrt{5})/2) = 0$ ve $g''((1+\sqrt{5})/2) = -2/\sqrt{5} \neq 0$ dır.

- *Newton-Raphson* fonksiyonundan farklı olarak

$$g(x) = x - \frac{1}{\sqrt{5}}(x^2 - x - 1)$$

ile pozitif sabit nokta için üretilen iterasyon da kuadratik yakınsaktır, çünkü $g'((1+\sqrt{5})/2) = 0$ ve $g''((1+\sqrt{5})/2) = -2/\sqrt{5} \neq 0$ dır.

- *Newton-Raphson* fonksiyonundan farklı olarak

$$g(x) = x - \frac{1}{\sqrt{5}}(x^2 - x - 1)$$

ile pozitif sabit nokta için üretilen iterasyon da kuadratik yakınsaktır, çünkü $g'((1+\sqrt{5})/2) = 0$ ve $g''((1+\sqrt{5})/2) = -2/\sqrt{5} \neq 0$ dır.

Newton-*Raphson* yönteminde başlangıç noktası seçimi

- *Newton-Raphson* yönteminin en zayıf yönü, başlangıç noktası seçiminin sıfır yerine "yakın" seçilmesini gerektirmesidir.

Newton-*Raphson* yönteminde başlangıç noktası seçimi

- *Newton-Raphson* yönteminin en zayıf yönü, başlangıç noktası seçiminin sıfır yerine "yakın" seçilmesini gerektirmesidir.
- Tahmini noktanın ne kadar "yakın" seçilmesi gerektiği problemden probleme göre değişmektedir.

Newton-*Raphson* yönteminde başlangıç noktası seçimi

- *Newton-Raphson* yönteminin en zayıf yönü, başlangıç noktası seçiminin sıfır yerine "yakın" seçilmesini gerektirmesidir.
- Tahmini noktanın ne kadar "yakın" seçilmesi gerektiği problemden probleme göre değişmektedir.
- Örneğin altın oranı sıfır yeri kabul eden örneğimizde(Örnek 6.1), $x_0 \in (1, \infty)$ olması durumunda altın orana yakınsayabildiğimizi görmüştük.

Newton-*Raphson* yönteminde başlangıç noktası seçimi

- *Newton-Raphson* yönteminin en zayıf yönü, başlangıç noktası seçiminin sıfır yerine "yakın" seçilmesini gerektirmesidir.
- Tahmini noktanın ne kadar "yakın" seçilmesi gerektiği problemden probleme göre değişmektedir.
- Örneğin altın oranı sıfır yeri kabul eden örneğimizde(Örnek 6.1), $x_0 \in (1, \infty)$ olması durumunda altın orana yakınsayabildiğimizi görmüştük.
- Dolayısıyla bu problem için başlangıç noktası seçimi herhangi bir sorun teşkil etmemiştir.

Newton-*Raphson* yönteminde başlangıç noktası seçimi

- *Newton-Raphson* yönteminin en zayıf yönü, başlangıç noktası seçiminin sıfır yerine "yakın" seçilmesini gerektirmesidir.
- Tahmini noktanın ne kadar "yakın" seçilmesi gerektiği problemden probleme göre değişmektedir.
- Örneğin altın oranı sıfır yeri kabul eden örneğimizde(Örnek 6.1), $x_0 \in (1, \infty)$ olması durumunda altın orana yakınsayabildiğimizi görmüştük.
- Dolayısıyla bu problem için başlangıç noktası seçimi herhangi bir sorun teşkil etmemiştir.
- Ancak bazı fonksiyonlar başlangıç noktası tahmininin iyi yapılmış olmasını gerektirirler.

Örnek

$f(x) = ((x-2)^2 + 1/100)(x-3)$ fonksiyonu için farklı başlangıç noktası seçimi ile Newton-Raphson yönteminin yakınsaklığını araştırınız.

Fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki sıfır yerini $|f(x_n)| < 10^{-6}$ kriterini sağlayacak yaklaşımlar elde etmek için gerekli iterasyon sayıları(iter) aşağıdaki tabloda verilmektedir.

x_0	2	2.01	2.02	2.04	2.06	2.08	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	
iter	1	144	15	27	9	52	129	12	28	44	10	

Newton-Rapson ve karmaşık kökler

Hatırlatma

Genel olarak iterasyon yöntemleri karmaşık sıfıryerlerini belirlemek için de kullanılabilirler. Bu sonuç özel olarak Newton-Raphson yöntemi için de geçerlidir, ancak bunun için başlangıç noktasının da karmaşık bir sayı olarak seçilmesi gerekir.

Örnek

$f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun $x_0 = 1 + i$ noktası komşuluğundaki sıfır yerini Newton-Rapson yöntemi ile belirleyiniz.

- *Newton-Rapson* yöntemi yardımıyla aşağıdaki yaklaşımları elde ederiz:

i	x_i
0	$1 + i$
1	$0.2500 + 0.7500i$
2	$-0.0750 + 0.9750i$
3	$0.0017 + 0.9973i$
4	$-0.0000 + 1.0000i$

- Mevcut haliyle *Newton-Raphson* yöntemi katlı kökler için lineer olarak yakınsayan bir yöntemdir. Eğer r noktası f fonksiyonunun $m > 1$ katlı bir sıfır yeri ise

$$f(x) = (x - r)^m h(x), h(r) \neq 0$$

olacak biçimde h fonksiyonu vardır. Bu durumda g iterasyon fonksiyonu

- $$\begin{aligned} g(x) &= x - f(x)/f'(x) \\ &= x - \frac{(x-r)^m h(x)}{m(x-r)^{m-1}h(x) + h'(x)(x-r)^m} \\ &= x - \frac{(x-r)h(x)}{mh(x) + h'(x)(x-r)} \end{aligned}$$

  olarak yazılabilir ve

- $$\begin{aligned} g(x) &= x - f(x)/f'(x) \\ &= x - \frac{(x-r)^m h(x)}{m(x-r)^{m-1}h(x) + h'(x)(x-r)^m} \\ &= x - \frac{(x-r)h(x)}{mh(x) + h'(x)(x-r)} \end{aligned}$$

  olarak yazılabilir ve

- $$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \left[\begin{array}{c} (h(x) + (x-r)h'(x))(mh(x) + h'(x)(x-r)) \\ -(mh'(x) + h''(x)(x-r) + h'(x))(x-r)h(x) \end{array} \right] \\ & \quad /(mh(x) + h'(x)(x-r))^2 \end{aligned}$$

  elde edilir

Katlı kökler için *Newton-Raphson* yöntemi

- Buradan

$$
\begin{aligned}
g'(r) &= 1 - h(r)mh(r)/(mh(r))^2 \\
&= 1 - 1/m \neq 0
\end{aligned}
$$

olur. $g'(r) < 1$ olduğu için *Newton-Raphson* iterasyonu katlı kökler uygun başlangıç noktası ile sadece lineer olarak yakınsaktır.

Katlı kökler için *Newton-Raphson* yöntemi

- Buradan

$$\begin{aligned} g'(r) &= 1 - h(r)mh(r)/(mh(r))^2 \\ &= 1 - 1/m \neq 0 \end{aligned}$$

olur. $g'(r) < 1$ olduğu için *Newton-Raphson* iterasyonu katlı kökler uygun başlangıç noktası ile sadece lineer olarak yakınsaktır.

- Bu durumda yukarıda tanımlanan g iterasyon fonksiyonu yeniden düzenlenerek

$$g(x) = x - mf(x)/f'(x)$$

olarak yazılırsa, yine $g(r) = r$ olduğu açıktır.

Katlı kökler için *Newton-Raphson* yöntemi

- Buradan

$$\begin{aligned} g'(r) &= 1 - h(r)mh(r)/(mh(r))^2 \\ &= 1 - 1/m \neq 0 \end{aligned}$$

  olur. $g'(r) < 1$ olduğu için *Newton-Raphson* iterasyonu katlı kökler uygun başlangıç noktası ile sadece lineer olarak yakınsaktır.
- Bu durumda yukarıda tanımlanan g iterasyon fonksiyonu yeniden düzenlenerek

$$g(x) = x - mf(x)/f'(x)$$

  olarak yazılırsa, yine $g(r) = r$ olduğu açıktır.
- Ayrıca yukarıdaki işlemler tekrar edilerek $g'(r) = 0$ elde ederiz.

Katlı kökler için *Newton-Raphson* yöntemi

- Buradan

$$\begin{aligned} g'(r) &= 1 - h(r)mh(r)/(mh(r))^2 \\ &= 1 - 1/m \neq 0 \end{aligned}$$

olur. $g'(r) < 1$ olduğu için *Newton-Raphson* iterasyonu katlı kökler uygun başlangıç noktası ile sadece lineer olarak yakınsaktır.

- Bu durumda yukarıda tanımlanan g iterasyon fonksiyonu yeniden düzenlenerek

$$g(x) = x - mf(x)/f'(x)$$

olarak yazılırsa, yine $g(r) = r$ olduğu açıktır.

- Ayrıca yukarıdaki işlemler tekrar edilerek $g'(r) = 0$ elde ederiz.
- Bir örnek üzerinde her iki yöntemin performansını karşılaştırmak mümkündür.

Örnek

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ fonksiyonu için $x_0 = 2$ alarak basit kökler ve katlı kökler için Newton-Raphson yöntemiyle sıfır yeri yaklaşımlarını hesaplayınız.

Basit kökler için kuadratik olarak yakınsak olan *Newton-Raphson* yöntemini $x = 1$ noktasında iki katlı köke sahip f fonksiyonu için uygulayarak aşağıdaki tabloda verilen ve son sütundan görüldüğü üzere lineer olarak yakınsayan yaklaşımları elde ederiz,

Katlı kökler için *Newton-Raphson* yöntemi

- yakınsama lineerdir çünkü $(x_{n+1} - r)/(x_n - r)$ oranı yaklaşık olarak sabittir:

$\dot{I}terasyon$	$Newton(BasitK\ddot{o}kler)$	$(x_{n+1} - r)/(x_n - r), r = 1$
0	2.0000	
1	1.5000	$0.5/1 = 0.5$
2	1.2500	$0.25/0.5 = 0.5$
3	1.1250	$0.125/0.250 = 0.5$
4	1.0625	$0.625/0.1250 = 0.5$
5	1.0313	$0.313/0.625 = 0.5008$
6	1.0156	$0.0156/0.0313 = 0.4984$
7	1.0078	$0.0078/0.0156 = 0.5$
8	1.0039	$0.0039/0.0078 = 0.5$
9	1.0020	$0.0020/0.0039 = 0.5128$
10	1.0010	$0.0010/0.0020 = 0.5$

Table: Basit kökler için Newton yaklaşımları

- Öte yandan aynı başlangıç değeri ile $m = 2$ değeri için yukarıda verilen $x_0 = 2$ başlangıç noktası ile uygulayarak ilk adımda $x_1 = 1$ gerçek sıfır yerini elde ederiz.

Katlı kökler için *Newton-Raphson* yöntemi

- Öte yandan aynı başlangıç değeri ile $m = 2$ değeri için yukarıda verilen $x_0 = 2$ başlangıç noktası ile uygulayarak ilk adımda $x_1 = 1$ gerçek sıfır yerini elde ederiz.
- Katlı sıfıryerleri belirlemek için basit sıfır yeri için geliştirilen versiyonun kullanılması uygun olmadığı gibi basit sıfır yerini belirlemek için de, katlı sıfır yeri için (**??**) ile düzenlenen versiyon kullanılırsa istenilen sonuçlar elde edilemeyebilir.

Katlı kökler için *Newton-Raphson* yöntemi

- Öte yandan aynı başlangıç değeri ile $m = 2$ değeri için yukarıda verilen $x_0 = 2$ başlangıç noktası ile uygulayarak ilk adımda $x_1 = 1$ gerçek sıfır yerini elde ederiz.
- Katlı sıfıryerleri belirlemek için basit sıfır yeri için geliştirilen versiyonun kullanılması uygun olmadığı gibi basit sıfır yerini belirlemek için de, katlı sıfır yeri için (**??**) ile düzenlenen versiyon kullanılırsa istenilen sonuçlar elde edilemeyebilir.
- Örneğin $f(x) = x^2 - x - 1$ fonksiyonu ve $x_0 = \sqrt{2}$ başlangıç noktası ve basit sıfıryerleri için *Newton-Raphson* yöntemi Örnek 6.1 de belirtildiği gibi 5 adımda yakınsarken, $m = 2$ ile katlı sıfyerleri için düzenlenen versiyon 2.0000 ve 1.3333 değerleri arasında alternatif olarak salınım yapmaktadır

Sayısal türev ile yaklaşım(Kiriş yöntemi)

- *Newton-Raphson* yönteminde $f'(x_i)$ türev değeri şuphesiz fonksiyonun türevinin de bilinmesini gerektirmektedir.

Sayısal türev ile yaklaşım(Kiriş yöntemi)

- *Newton-Raphson* yönteminde $f'(x_i)$ türev değeri şuphesiz fonksiyonun türevinin de bilinmesini gerektirmektedir.
- Türev bilgisi gerektirmeyen alternatif bir yöntem ise

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

yaklaşımının kullanılmasıdır.

Sayısal türev ile yaklaşım(Kiriş yöntemi)

- *Newton-Raphson* yönteminde $f'(x_i)$ türev değeri şuphesiz fonksiyonun türevinin de bilinmesini gerektirmektedir.
- Türev bilgisi gerektirmeyen alternatif bir yöntem ise

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

yaklaşımının kullanılmasıdır.

- Bu durumda tek bir başlangıç değeri yerine x_0 ve x_1 başlangıç değerleri ile başlatılabilen

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i), i = 2, 3, \cdots \quad (1)$$

yaklaşımları elde edilir.

Sayısal türev ile yaklaşım(Kiriş yöntemi)

- Bu yöntem kiriş yöntemi olarak bilinir. *Newton-Raphson* yönteminde olduğu gibi

Sayısal türev ile yaklaşım(Kiriş yöntemi)

- Bu yöntem kiriş yöntemi olarak bilinir. *Newton-Raphson* yönteminde olduğu gibi
- $(x_i, f(x_i))$ noktasındaki teğetin x eksenini kesim noktası yerine, $(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))$ noktalarından geçen ve

$$y - f(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_i)$$

ile verilen kiriş doğrusunun x eksenini kesim noktası sıfır yeri için x_{i+1} yaklaşımı olarak kabul edilir.

Örnek

$f(x) = x^2 - x - 1$ fonksiyonu için $x_0 = 3, x_1 = 2$ başlangıç tahminleri ve kiriş yöntemi ile x_2, x_3, x_4 ve x_5 sıfır yeri yaklaşımlarını hesaplayınız.

- İlk yaklaşım

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) \\
&= 2 - \frac{2-3}{f(2) - f(3)} f(2) \\
&= 2 - \frac{-1}{1-5} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \cong 1.75
\end{aligned}
$$

Örnek

$f(x) = x^2 - x - 1$ fonksiyonu için $x_0 = 3, x_1 = 2$ başlangıç tahminleri ve kiriş yöntemi ile x_2, x_3, x_4 ve x_5 sıfır yeri yaklaşımlarını hesaplayınız.

- İlk yaklaşım

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) \\
&= 2 - \frac{2-3}{f(2) - f(3)} f(2) \\
&= 2 - \frac{-1}{1-5} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \cong 1.75
\end{aligned}
$$

- Benzer biçimde diğer yaklaşımlar

$x_3 = 5/3 \cong 1.6667, \ x_4 = 47/29 \cong 1.6207, \ x_5 = 322/199 \cong 1.6181.$

olarak elde edilir.

1 $f(x) = (x+2)\exp(-x)$ fonksiyonunun sıfır yerini *Newton* yöntemiyle belirleyebilmek için en büyük $x_0 > -2$ başlangıç tahmini ne olabilir?

Alıştırmalar

1. $f(x) = (x+2)\exp(-x)$ fonksiyonunun sıfır yerini *Newton* yöntemiyle belirleyebilmek için en büyük $x_0 > -2$ başlangıç tahmini ne olabilir?
2. $f(x) = x - sinh(x)$ fonksiyonu verilsin. Uygun bir x_0 başlangıç noktası seçerek, sırasıyla $m = 1; 2$ ve 3 için

$$x_{n+1} = x_n - mf(x_n)/f'(x_n), n = 0, 1, 2, ...$$

Newton-Raphson iterasyonlarını $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-5}$ sonuçlandırma kriteri sağlanıncaya kadar hesaplayınız. Her bir m için gerekli iterasyon sayısını not ediniz? Hangi m değeri için en hızlı yakınsak diziyi elde ettiniz? Neden?

Alıştırmalar

3 $f(x) = x^2 - x - 1$ fonksiyonu ve $x_0 = \sqrt{2}$ başlangıç noktası ve basit sıfıryerleri için *Newton-Raphson* yönteminin Örnek 6.1 de belirtildiği gibi 5 adımda yakınsarken, $m = 2$ ile katlı sıfyerleri için düzenlenen versiyonun 2.0000 ve 1.3333 değerleri arasında alternatif olarak salınım yaptığını gözlemleyiniz.

Alıştırmalar

3 $f(x) = x^2 - x - 1$ fonksiyonu ve $x_0 = \sqrt{2}$ başlangıç noktası ve basit sıfıryerleri için *Newton-Raphson* yönteminin Örnek 6.1 de belirtildiği gibi 5 adımda yakınsarken, $m = 2$ ile katlı sıfyerleri için düzenlenen versiyonun 2.0000 ve 1.3333 değerleri arasında alternatif olarak salınım yaptığını gözlemleyiniz.

4 Eğer r noktası f fonksiyonunun basit sıfır yeri ve büküm noktası değilse, bu taktirde f ile oluşturulan g *Newton-Raphson* iterasyon fonksiyonunun r noktasında bir ekstremuma sahip olduğunu ispatlayınız.