Nonlineer cebirsel denklemler(sistemler)

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Kasım, 2018

Nonlineer cebirsel denklemler

Bu bölümde

- nonlineer cebirsel sistemler için *Newton* yöntemi ve Newton benzeri bir yöntem,
- aralık üzerindeki tüm sıfıryerlerini belirlemek amacıyla ikiye bölme yöntemini inceliyoruz.

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- İki değişkenli f ve g fonksiyonları için

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

nonlineer sisteminin (p,q) ile gösterilen sıfır yerine sahip olduğunu kabul edelim.

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- İki değişkenli f ve g fonksiyonları için

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

nonlineer sisteminin (p,q) ile gösterilen sıfır yerine sahip olduğunu kabul edelim.

- Örneğin

$$\begin{aligned} x^2+y^2-1 &= 0 \\ -x^2+y-1 &= 0 \end{aligned}$$

nonlineer sisteminin tek çözümü Şekil 1 ile belirtilen çember ve parabolün tek bir kesişim noktası olan $(0,1)$ noktasıdır.

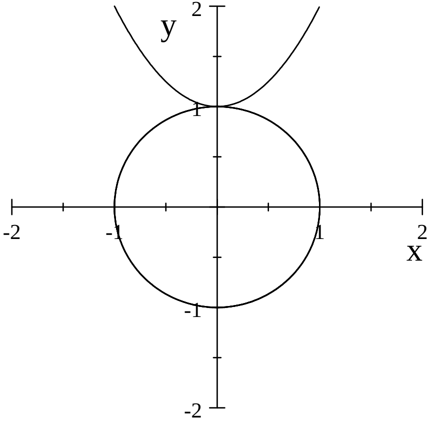

Figure: Birim çember ve parabol

- Ayrıca $(0,1)$ noktasının bir D komşuluğunda

$$J = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}$$

Jacobien matrisinin tersinir olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + (x-x_0)f_x(x_0,y_0) + (y-y_0)f_y(x_0,y_0) + \cdots \\ g(x,y) &= g(x_0,y_0) + (x-x_0)g_x(x_0,y_0) + (y-y_0)g_y(x_0,y_0) + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

- Taylor açılımının lineer kısımları ile oluşturulan

$$\begin{aligned} f(x_0,y_0)+(x-x_0)f_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f_y(x_0,y_0) &= 0 \\ g(x_0,y_0)+(x-x_0)g_x(x_0,y_0)+(y-y_0)g_y(x_0,y_0) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

lineer sistemini göz önüne alalım ve bu sistemin (x, y) çözümünü (x_1, y_1) ile gösterelim.

- Taylor açılımının lineer kısımları ile oluşturulan

$$\begin{aligned} f(x_0,y_0)+(x-x_0)f_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f_y(x_0,y_0) &= 0 \\ g(x_0,y_0)+(x-x_0)g_x(x_0,y_0)+(y-y_0)g_y(x_0,y_0) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

  lineer sistemini göz önüne alalım ve bu sistemin (x,y) çözümünü (x_1,y_1) ile gösterelim.

- Tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi, bu defa da nonlineer sistemin (x_0,y_0) noktasındaki Taylor açlımınının lineer kısmının sıfır yerini (x_1,y_1) yaklaşımı olarak alalım:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \Delta X = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}, F(x,y) = \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix}$$

notasyonu ile (3) sistemi,

$$J(X^{(0)})\Delta X = -F(X^{(0)}) \tag{4}$$

olarak yazılabilir.

- $$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \Delta X = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}, F(x,y) = \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix}$$

  notasyonu ile (3) sistemi,

  $$J(X^{(0)})\Delta X = -F(X^{(0)}) \tag{4}$$

  olarak yazılabilir.
- Bu sistem çözülerek elde edilen ΔX ile

  $$X^{(1)} = X^{(0)} + \Delta X$$

  yaklaşımı veya eleman bazında yazılarak

  $$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

  elde edilir.

- Benzer biçimde diğer yaklaşımlar, $n = 0, 1, \cdots$ için

$$J(X^{(n)})\Delta X = -F(X^{(n)}) \tag{5}$$

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} + \Delta X$$

olarak elde edilir.

Örnek

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 1 \\
x - y &= 0
\end{aligned}
$$

denklem sisteminin çözümü için $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *Newton yaklaşımlarını* $(x_0, y_0) = (1, 2)$ *başlangıç noktası için hesaplayınız.*

- Verilen sistemi

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 0\\
g(x,y) &= 0
\end{aligned}
$$

olarak yazarsak,

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- Verilen sistemi

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

  olarak yazarsak,

- $$F(x,y) = \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x - y \end{bmatrix}$$

  ile tanımladığımız vektör değerli fonksiyon için

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- Verilen sistemi

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

olarak yazarsak,

- $$F(x,y) = \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x - y \end{bmatrix}$$

ile tanımladığımız vektör değerli fonksiyon için

- $$F(x_0, y_0) = F(1,2) = \begin{bmatrix} f(1,2) \\ g(1,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 + 2^2 - 1 \\ 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- Ayrıca

$$J = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olup,

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- Ayrıca

$$J = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olup,

-

$$J(x_0, y_0) = J(1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olur.

- Ayrıca
$$J = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
olup,
- $$J(x_0, y_0) = J(1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
olur.
- Bu durumda
$$J(X^{(0)})\Delta X = -F(X^{(0)})$$
denklem sistemi
$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$
sistemine dönüşür.

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- Bu lineer sistemi uygun bir yöntemle çözerek $\Delta x = 0$, $\Delta y = -1$ elde ederiz.O halde

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- Bu lineer sistemi uygun bir yöntemle çözerek $\Delta x = 0$, $\Delta y = -1$ elde ederiz.O halde

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

- Benzer biçimde

$$F(X^{(1)}) = F(x_1, y_1) = F(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- $$J(x_1, y_1) = J(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

  olup,

  $$J(X^{(1)})\Delta X = -F(X^{(1)})$$

  denklem sistemi

  $$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  sistemine dönüşür. Bu sistem de çözülerek, $\Delta x = -1/4$, $\Delta y = -1/4$ olarak elde edilir.

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- O halde

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- O halde

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

  elde ederiz.

- Yukardaki nonlineer sistemin çözümü için gerekli yaklaşımları *Newton* yöntemiyle ve yukarıda incelenen fonksiyon sıfır yerlerini belirlemek amacıyla geliştirdiğimiz *newton.m* isimli Program yardımıyla elde edilebilir.

- O halde

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

  elde ederiz.
- Yukardaki nonlineer sistemin çözümü için gerekli yaklaşımları *Newton* yöntemiyle ve yukarıda incelenen fonksiyon sıfır yerlerini belirlemek amacıyla geliştirdiğimiz *newton.m* isimli Program yardımıyla elde edilebilir.
- Bu durumda f : çözülmesi gereken nonlineer sistem ve fp ise söz konusu sistemin Jakobien matrisidir.

- Yöntemi Örnek 1 için çalıştıralım:

- Yöntemi Örnek 1 için çalıştıralım:
- ```
  >> f=@(x) [x(1)^2+x(2)^2-1;x(1)-x(2)];
  >> fp=@(x) [2*x(1) 2*x(2);1 -1];
  >>x0=[1 2]';
  ```
  ```

- Yöntemi Örnek 1 için çalıştıralım:
- \>\> f=@(x) [x(1)^2+x(2)^2-1;x(1)-x(2)];
  \>\> fp=@(x) [2*x(1) 2*x(2);1 -1];
  \>\>x0=[1 2]';
- \>\> newton(f,fp,x0) komutu ile

  $x0 = 1$ 0.75000 0.70833 0.70711 0.70711
  1 0.75000 0.70833 0.70711 0.70711

  yaklaşımlarını elde ederiz.

Nonlineer sistemler için Newton benzeri uygulama

- Yukarıdaki tanıtımdan görüldüğü üzere, skaler denklemlerde f fonksiyonu ve f nin türevini gerektiren Newton yöntemi,

Nonlineer sistemler için Newton benzeri uygulama

- Yukarıdaki tanıtımdan görüldüğü üzere, skaler denklemlerde f fonksiyonu ve f nin türevini gerektiren Newton yöntemi,
- Nonlineer cebirsel sistemler için de, söz konusu sistem ve Jacobiyen matrisininin de kullanıcı tarafından sağlanmasını gerektirmektedir . Ancak, kiriş yöntemini hatırlayacak olursak f nin türevi yerine,

Nonlineer sistemler için Newton benzeri uygulama

- Yukarıdaki tanıtımdan görüldüğü üzere, skaler denklemlerde f fonksiyonu ve f nin türevini gerektiren Newton yöntemi,
- Nonlineer cebirsel sistemler için de, söz konusu sistem ve Jacobiyen matrisininin de kullanıcı tarafından sağlanmasını gerektirmektedir . Ancak, kiriş yöntemini hatırlayacak olursak f nin türevi yerine,
- türev için geri fark yaklaşımını kullanarak türev bilgisinin sağlanma zorunluluğunu ortadan kaldırmak mümkündü.

Nonlineer sistemler için Newton benzeri uygulama

- Yukarıdaki tanıtımdan görüldüğü üzere, skaler denklemlerde f fonksiyonu ve f nin türevini gerektiren Newton yöntemi,
- Nonlineer cebirsel sistemler için de, söz konusu sistem ve Jacobiyen matrisininin de kullanıcı tarafından sağlanmasını gerektirmektedir . Ancak, kiriş yöntemini hatırlayacak olursak f nin türevi yerine,
- türev için geri fark yaklaşımını kullanarak türev bilgisinin sağlanma zorunluluğunu ortadan kaldırmak mümkündü.
- Benzer bir işlemi cebirsel sistemler için kısmi türevleri içeren Jakobiyen matrisi için de gerçekleştirerek,

Nonlineer sistemler için Newton benzeri uygulama

- Yukarıdaki tanıtımdan görüldüğü üzere, skaler denklemlerde f fonksiyonu ve f nin türevini gerektiren Newton yöntemi,
- Nonlineer cebirsel sistemler için de, söz konusu sistem ve Jacobiyen matrisininin de kullanıcı tarafından sağlanmasını gerektirmektedir . Ancak, kiriş yöntemini hatırlayacak olursak f nin türevi yerine,
- türev için geri fark yaklaşımını kullanarak türev bilgisinin sağlanma zorunluluğunu ortadan kaldırmak mümkündü.
- Benzer bir işlemi cebirsel sistemler için kısmi türevleri içeren Jakobiyen matrisi için de gerçekleştirerek,
- Jacobiyenin hesaplanması zorunluluğundan kurtulabiliriz.

Nonlineer sistemler için Newton benzeri uygulama

- Yukarıdaki tanıtımdan görüldüğü üzere, skaler denklemlerde f fonksiyonu ve f nin türevini gerektiren Newton yöntemi,
- Nonlineer cebirsel sistemler için de, söz konusu sistem ve Jacobiyen matrisininin de kullanıcı tarafından sağlanmasını gerektirmektedir . Ancak, kiriş yöntemini hatırlayacak olursak f nin türevi yerine,
- türev için geri fark yaklaşımını kullanarak türev bilgisinin sağlanma zorunluluğunu ortadan kaldırmak mümkündü.
- Benzer bir işlemi cebirsel sistemler için kısmi türevleri içeren Jakobiyen matrisi için de gerçekleştirerek,
- Jacobiyenin hesaplanması zorunluluğundan kurtulabiliriz.
- Bu amaçla 1 sistemi ve $X^{(0)} = (x_0, y_0)$ başlangıç noktası verilmiş olsun. $X^{(1)} = (x_1, y_1)$ noktasını $X^{(0)}$ noktasının yakın komşuluğuda bir nokta olarak seçelim.

- Newton yönteminden hareketle Kiriş yöntemini elde ederken kullandığımız

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

yaklaşımına benzer olarak

Nonlineer sistemler için *Newton* benzeri uygulama

- Newton yönteminden hareketle Kiriş yöntemini elde ederken kullandığımız

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

yaklaşımına benzer olarak

-

$$\begin{aligned} J(X^{(i)}) &= \begin{bmatrix} f_x(x_i, y_i) & f_y(x_i, y_i) \\ g_x(x_i, y_i) & g_y(x_i, y_i) \end{bmatrix} \\ &\cong \begin{bmatrix} \frac{f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_i)}{x_i-x_{i-1}} & \frac{f(x_i,y_i)-f(x_i,y_{i-1})}{y_i-y_{i-1}} \\ \frac{g(x_i,y_i)-g(x_{i-1},y_i)}{x_i-x_{i-1}} & \frac{g(x_i,y_i)-g(x_i,y_{i-1})}{y_i-y_{i-1}} \end{bmatrix} \\ &:= \hat{J}(X^{(i)}) \end{aligned}$$

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- Bu durumda
$$Y = F(X^{(1)})$$
olmak üzere,
$$\hat{J}(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} \frac{f(x_1,y_1)-f(x_0,y_1)}{x_1-x_0} & \frac{f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)}{y_1-y_0} \\ \frac{g(x_1,y_1)-g(x_0,y_1)}{x_1-x_0} & \frac{g(x_1,y_1)-g(x_1,y_0)}{y_1-y_0} \end{bmatrix}$$
ile
$$\begin{aligned} \hat{J}(X^{(1)})\Delta X &= -Y \\ X^{(2)} &= X^{(1)} + \Delta X \end{aligned}$$
yaklaşımını elde ederiz.

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- Bu durumda

$$Y = F(X^{(1)})$$

olmak üzere,

$$\hat{J}(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} \frac{f(x_1,y_1)-f(x_0,y_1)}{x_1-x_0} & \frac{f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)}{y_1-y_0} \\ \frac{g(x_1,y_1)-g(x_0,y_1)}{x_1-x_0} & \frac{g(x_1,y_1)-g(x_1,y_0)}{y_1-y_0} \end{bmatrix}$$

ile

$$\begin{aligned} \hat{J}(X^{(1)})\Delta X &= -Y \\ X^{(2)} &= X^{(1)} + \Delta X \end{aligned}$$

yaklaşımını elde ederiz.

- Bir sonraki iterasyona $X^{(0)} = X^{(1)}, X^{(1)} = X^{(2)}$ alarak devam ederiz, ve bu işleme uygun bir sonlandırma kriteri sağlanana kadar devam ederiz. Newton benzeri bu yönteme ait Program aşağıda verilmektedir.

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

1. $function\ X1 = newtonsqv(F, X0)$

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

1. $function\ X1 = newtonsqv(F, X0)$
2. $\quad mindeger = 1e-5;\ maxdeger = 1e5;\ maxsayac = 40;$

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

1. $function\ X1 = newtonsqv(F, X0)$
2. $mindeger = 1e-5; maxdeger = 1e5; maxsayac = 40;$
3. $test = 1; sayac = 0; X1 = X0 + 0.1;$

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

1. $function\ X1 = newtonsqv(F, X0)$
2. $mindeger = 1e-5; maxdeger = 1e5; maxsayac = 40;$
3. $test = 1; sayac = 0; X1 = X0 + 0.1;$
4. $while\ test$

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

1. $function\ X1 = newtonsqv(F, X0)$
2. $mindeger = 1e-5; maxdeger = 1e5; maxsayac = 40;$
3. $test = 1; sayac = 0; X1 = X0 + 0.1;$
4. $while\ test$
5. $Yp = jacobi(F, X0, X1); Y = F(X1); Delx = -Yp \backslash Y; X2 = X1 + Delx;$

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

1. $function\ X1 = newtonsqv(F, X0)$
2. $mindeger = 1e-5; maxdeger = 1e5; maxsayac = 40;$
3. $test = 1; sayac = 0; X1 = X0 + 0.1;$
4. $while\ test$
5. $Yp = jacobi(F, X0, X1); Y = F(X1); Delx = -Yp \backslash Y; X2 = X1 + Delx;$
6. $sayac = sayac + 1; fark = norm(X2 - X1, inf);$

1. $function\ X1 = newtonsqv(F, X0)$
2. $mindeger = 1e-5; maxdeger = 1e5; maxsayac = 40;$
3. $test = 1; sayac = 0; X1 = X0 + 0.1;$
4. $while\ test$
5. $Yp = jacobi(F, X0, X1); Y = F(X1); Delx = -Yp\backslash Y; X2 = X1 + Delx;$
6. $sayac = sayac + 1; fark = norm(X2 - X1, inf);$
7. $test = (fark > mindeger)\&(norm(X2, inf) < maxdeger)\&(sayac < maxsa$

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

1. $function\ X1 = newtonsqv(F, X0)$
2. $mindeger = 1e-5; maxdeger = 1e5; maxsayac = 40;$
3. $test = 1; sayac = 0; X1 = X0 + 0.1;$
4. $while\ test$
5. $Yp = jacobi(F, X0, X1); Y = F(X1); Delx = -Yp\backslash Y; X2 = X1 + Delx;$
6. $sayac = sayac + 1; fark = norm(X2 - X1, inf);$
7. $test = (fark > mindeger)\&(norm(X2, inf) < maxdeger)\&(sayac < maxsa$
8. $X0 = X1; X1 = X2;\ end$

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

1. $function\ X1 = newtonsqv(F, X0)$
2. $mindeger = 1e-5; maxdeger = 1e5; maxsayac = 40;$
3. $test = 1; sayac = 0; X1 = X0 + 0.1;$
4. $while\ test$
5. $Yp = jacobi(F, X0, X1); Y = F(X1); Delx = -Yp\backslash Y; X2 = X1 + Delx;$
6. $sayac = sayac + 1; fark = norm(X2 - X1, inf);$
7. $test = (fark > mindeger)\&(norm(X2, inf) < maxdeger)\&(sayac < maxsa$
8. $X0 = X1; X1 = X2;\ end$
9. $function\ J = jacobi(F, X0, X1)\ n = length(X0);$

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

1. $function\ X1 = newtonsqv(F, X0)$
2. $mindeger = 1e-5; maxdeger = 1e5; maxsayac = 40;$
3. $test = 1; sayac = 0; X1 = X0 + 0.1;$
4. $while\ test$
5. $Yp = jacobi(F, X0, X1); Y = F(X1); Delx = -Yp\backslash Y; X2 = X1 + Delx;$
6. $sayac = sayac + 1; fark = norm(X2 - X1, inf);$
7. $test = (fark > mindeger)\&(norm(X2, inf) < maxdeger)\&(sayac < maxsa$
8. $X0 = X1; X1 = X2; end$
9. $function\ J = jacobi(F, X0, X1)\ n = length(X0);$
10. $for\ i = 1 : n$

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

1. $function\ X1 = newtonsqv(F, X0)$
2. $mindeger = 1e-5; maxdeger = 1e5; maxsayac = 40;$
3. $test = 1; sayac = 0; X1 = X0 + 0.1;$
4. $while\ test$
5. $Yp = jacobi(F, X0, X1); Y = F(X1); Delx = -Yp\backslash Y; X2 = X1 + Delx;$
6. $sayac = sayac + 1; fark = norm(X2 - X1, inf);$
7. $test = (fark > mindeger)\&(norm(X2, inf) < maxdeger)\&(sayac < maxsa$
8. $X0 = X1; X1 = X2;\ end$
9. $function\ J = jacobi(F, X0, X1)\ n = length(X0);$
10. $for\ i = 1 : n$
11. $for\ j = 1 : n$

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

1. $function\ X1 = newtonsqv(F, X0)$
2. $mindeger = 1e-5; maxdeger = 1e5; maxsayac = 40;$
3. $test = 1; sayac = 0; X1 = X0 + 0.1;$
4. $while\ test$
5. $Yp = jacobi(F, X0, X1); Y = F(X1); Delx = -Yp\backslash Y; X2 = X1 + Delx;$
6. $sayac = sayac + 1; fark = norm(X2 - X1, inf);$
7. $test = (fark > mindeger)\&(norm(X2, inf) < maxdeger)\&(sayac < maxsa$
8. $X0 = X1; X1 = X2; end$
9. $function\ J = jacobi(F, X0, X1)\ n = length(X0);$
10. $for\ i = 1 : n$
11. $for\ j = 1 : n$
12. $dxv = zeros(n, 1); dx = X1(j) - X0(j); dxv(j) = dx;$

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

$$function\ X1 = newtonsqv(F, X0)$$
$$mindeger = 1e-5;\ maxdeger = 1e5;\ maxsayac = 40;$$
$$test = 1;\ sayac = 0;\ X1 = X0 + 0.1;$$
$$while\ test$$
$$Yp = jacobi(F, X0, X1);\ Y = F(X1);\ Delx = -Yp \backslash Y;\ X2 = X1 + Delx;$$
$$sayac = sayac + 1;\ fark = norm(X2 - X1, inf);$$
$$test = (fark > mindeger) \& (norm(X2, inf) < maxdeger) \& (sayac < maxsa$$
$$X0 = X1;\ X1 = X2;\ end$$
$$function\ J = jacobi(F, X0, X1)\ n = length(X0);$$
$$for\ i = 1 : n$$
$$for\ j = 1 : n$$
$$dxv = zeros(n, 1);\ dx = X1(j) - X0(j);\ dxv(j) = dx;$$
$$J(i, j) = (F(X1)(i) - F(X1 - dxv)(i)) / (X1(j) - X0(j));$$
$$end \qquad end$$

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- **Test**

```
>> F=@(x) [x(1)^2/4+x(2)^2/9-1;x(1)^2/9+x(2)^2/4-1];
>>X0=[1 1]';
>> newtonsqv(F,x0)
```

- **Test**
  ```
  >> F=@(x) [x(1)^2/4+x(2)^2/9-1;x(1)^2/9+x(2)^2/4-1];
  >>X0=[1 1]';
  >> newtonsqv(F,x0)
  ```
- ans =
  1.6641
  1.6641

Nonlineer sistemler için *Newton* yöntemi

- >>X0=[1 -1]';

- >>X0=[1 -1]';
- >> newtonsqv(F,X0)
  ans =
  1.6641
  -1.6641

Alıştırmalar

1 Bu bölümde verilen *Newtons* isimli programı(Program 6.2) Örnek 6.8 de verilen denklem sistemi ve $(x_0, y_0) = (2, 1)$ ile çalıştırarak elde edilen sonuçların doğruluğunu kontrol ediniz. İterasyonların sistemin gerçek çözümüne yakınsadığını gözlemleyiniz.

2 Aşağıdaki nonlineer sistemlerin grafiklerini çizerek, kaç adet reel çözüme sahip olduklarını tahmin ediniz.

2 Aşağıdaki nonlineer sistemlerin grafiklerini çizerek, kaç adet reel çözüme sahip olduklarını tahmin ediniz.

- (a)

$$
\begin{aligned}
y^2 - 4x &= 1 \\
y^2 + 4x &= 1
\end{aligned}
$$

Alıştırmalar

2 Aşağıdaki nonlineer sistemlerin grafiklerini çizerek, kaç adet reel çözüme sahip olduklarını tahmin ediniz.

- (a)

$$\begin{aligned} y^2 - 4x &= 1 \\ y^2 + 4x &= 1 \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} (x - 3/2)^2 + (y - 5/2)^2 &= 1/2 \\ (x - 3/2)^2 + (y - 1)^2 &= 5/4 \end{aligned}$$

Alıştırmalar

2 Aşağıdaki nonlineer sistemlerin grafiklerini çizerek, kaç adet reel çözüme sahip olduklarını tahmin ediniz.

- (a)

$$\begin{aligned} y^2 - 4x &= 1 \\ y^2 + 4x &= 1 \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} (x - 3/2)^2 + (y - 5/2)^2 &= 1/2 \\ (x - 3/2)^2 + (y - 1)^2 &= 5/4 \end{aligned}$$

- (c)

$$\begin{aligned} x^2/9 + y^2/4 &= 1 \\ x^2/4 + y^2/9 &= 1 \end{aligned}$$

Alıştırmalar

2 Aşağıdaki nonlineer sistemlerin grafiklerini çizerek, kaç adet reel çözüme sahip olduklarını tahmin ediniz.

- (a)

$$\begin{aligned} y^2 - 4x &= 1 \\ y^2 + 4x &= 1 \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} (x-3/2)^2 + (y-5/2)^2 &= 1/2 \\ (x-3/2)^2 + (y-1)^2 &= 5/4 \end{aligned}$$

- (c)

$$\begin{aligned} x^2/9 + y^2/4 &= 1 \\ x^2/4 + y^2/9 &= 1 \end{aligned}$$

- (d)

$$\begin{aligned} x^2/9 + y^2/4 &= 1 \\ x^2/4 - y^2/9 &= 1 \end{aligned}$$

3 Soru 1(a)'ya ait nonlineer sistem için $(x_0, y_0) = (3, 3)$ başlangıç noktası ile (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) yaklaşımlarını *Newton* yöntemi yardımıyla hesaplayınız.

Alıştırmalar

3 Soru 1(a)'ya ait nonlineer sistem için $(x_0, y_0) = (3, 3)$ başlangıç noktası ile (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) yaklaşımlarını *Newton* yöntemi yardımıyla hesaplayınız.

4 Soru 1(b)'ye ait nonlineer sistem ve aşağıda verilen başlangıç değerlerin her birisi için (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) yaklaşımlarını *Newton* yöntemi yardımıyla hesaplayınız.

3 Soru 1(a)'ya ait nonlineer sistem için $(x_0, y_0) = (3, 3)$ başlangıç noktası ile (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) yaklaşımlarını *Newton* yöntemi yardımıyla hesaplayınız.

4 Soru 1(b)'ye ait nonlineer sistem ve aşağıda verilen başlangıç değerlerin her birisi için (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) yaklaşımlarını *Newton* yöntemi yardımıyla hesaplayınız.

- $(x_0, y_0) = (3, 3)$

3 Soru 1(a)'ya ait nonlineer sistem için $(x_0, y_0) = (3, 3)$ başlangıç noktası ile (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) yaklaşımlarını *Newton* yöntemi yardımıyla hesaplayınız.

4 Soru 1(b)'ye ait nonlineer sistem ve aşağıda verilen başlangıç değerlerin her birisi için (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) yaklaşımlarını *Newton* yöntemi yardımıyla hesaplayınız.

- $(x_0, y_0) = (3, 3)$
- $(x_0, y_0) = (-3, 3)$

Alıştırmalar

3 Soru 1(a)'ya ait nonlineer sistem için $(x_0, y_0) = (3, 3)$ başlangıç noktası ile (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) yaklaşımlarını *Newton* yöntemi yardımıyla hesaplayınız.

4 Soru 1(b)'ye ait nonlineer sistem ve aşağıda verilen başlangıç değerlerin her birisi için (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) yaklaşımlarını *Newton* yöntemi yardımıyla hesaplayınız.

- $(x_0, y_0) = (3, 3)$
- $(x_0, y_0) = (-3, 3)$
- $(x_0, y_0) = (-3, -3)$

Alıştırmalar

3 Soru 1(a)'ya ait nonlineer sistem için $(x_0, y_0) = (3, 3)$ başlangıç noktası ile (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) yaklaşımlarını *Newton* yöntemi yardımıyla hesaplayınız.

4 Soru 1(b)'ye ait nonlineer sistem ve aşağıda verilen başlangıç değerlerin her birisi için (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) yaklaşımlarını *Newton* yöntemi yardımıyla hesaplayınız.

- $(x_0, y_0) = (3, 3)$
- $(x_0, y_0) = (-3, 3)$
- $(x_0, y_0) = (-3, -3)$
- $(x_0, y_0) = (3, -3)$
  Elde ettiğiniz yaklaşımlar şekildeki grafiklerin arakesit noktalarına yakınsıyor mu?

5 Soru 2(b)'ye ait nonlineer sistemin yaklaşık çözümünü Soru 19 da verilen (x_0, y_0) başlangıç noktaları ve Program **??** yardımıyla elde ediniz.

5 Soru 2(b)'ye ait nonlineer sistemin yaklaşık çözümünü Soru 19 da verilen (x_0, y_0) başlangıç noktaları ve Program **??** yardımıyla elde ediniz.

6 Soru 2(c)'nin her bir reel çözümünü uygun başlangıç değerleri ve ilgili Program ile belirleyiniz.

Kaynaklar

- Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1988.
- Coşkun, E. MATLAB/Octave ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:aves.ktu.edu.tr/erhan/dokumanlar).
- Kincaid, D., Cheney, W., Numerical Analysis, Brooks/Cole, 1991.
- Memoğlu, M., Vektörel sıfır yeri ve ektremum nokta belirleme algoritmaları, Yüksek Lisans Tez Çalışması, KTÜ, 2012.
- Octave, GNU özgür yazılım(*URL:Octave.sourceforge.net*).
- Stoer, J., Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1976.