Lineer cebirsel sistemlere giriş

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Eylül 2020

Lineer cebirsel sistemler

Bu bölümde

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini lineer cebirsel ve geometrik olarak inceliyoruz,

Lineer cebirsel sistemler

Bu bölümde

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini lineer cebirsel ve geometrik olarak inceliyoruz,
- çözümünün varlık ve tekliği ile birden fazla çözümün mevcut olması durumunda genel çözümün nasıl ifade edilebileceğini inceliyoruz,

Lineer cebirsel sistemler

Bu bölümde

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini lineer cebirsel ve geometrik olarak inceliyoruz,
- çözümünün varlık ve tekliği ile birden fazla çözümün mevcut olması durumunda genel çözümün nasıl ifade edilebileceğini inceliyoruz,
- çözümü sonlu sayıda aritmetik işlem ile elde eden ve **doğrudan**(direkt*) yöntemler* olarak bilinen yöntemleri özetliyoruz.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- *A matrisi ile* $\mathbf{x}$ *vektörünün çarpımı, A matrisinin sütunlarının* $\mathbf{x}$ *vektörünün bileşenleri ile oluşturulan lineer bileşimi(kombinasyonu) dir.*

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- *A matrisi ile $\mathbf{x}$ vektörünün çarpımı, A matrisinin sütunlarının $\mathbf{x}$ vektörünün bileşenleri ile oluşturulan lineer bileşimi(kombinasyonu) dir.*
- Örneğin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

matrisi ve $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektörü için

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Hatırlatma $A_{m\times n}$ matrisinin sütun uzayı, A nın sütunlarının lineer bileşimi ile oluşturulan vektör uzayıdır ve bu uzay R^m in bir alt uzayıdır.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Hatırlatma $A_{m\times n}$ matrisinin sütun uzayı, A nın sütunlarının lineer bileşimi ile oluşturulan vektör uzayıdır ve bu uzay R^m in bir alt uzayıdır.
- O halde $A\mathbf{x}$ vektörü A matrisinin sütun uzayının bir elemanıdır.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Hatırlatma $A_{m\times n}$ matrisinin sütun uzayı, A nın sütunlarının lineer bileşimi ile oluşturulan vektör uzayıdır ve bu uzay R^m in bir alt uzayıdır.
- O halde $A\mathbf{x}$ vektörü A matrisinin sütun uzayının bir elemanıdır.
- Ayrıca, A matrisi ve $\mathbf{x}$ sütun vektörünün çarpımı sonucunda oluşan $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ vektörünün her bir bileşeni, A nın her bir satır vektörü ile $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ sütun vektörünün skaler çapımı olduğuna dikkat edelim. $\mathbf{y} =A\mathbf{x}$ vektörünün $i - inci$ bileşeni

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(i) &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} A(i,j) * \mathbf{x}(j), i = 1, 2, ..., m \end{aligned}$$

olarak ifade edilir ve aşağıdaki yığmalı toplam ile hesaplanabilir:

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $for \;\; i = 1 : m$

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $\quad for \;\; i = 1 : m$
- $\quad top = 0;$

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $for\ \ i = 1 : m$
- $top = 0;$
- $for\ \ j = 1 : n$

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $for\ \ i = 1 : m$
- $top = 0;$
- $for\ \ j = 1 : n$
- $top = top + A(i, j) * X(j);$

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $for\ i = 1 : m$
- $top = 0;$
- $for\ j = 1 : n$
- $top = top + A(i,j) * X(j);$
- end

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $for\ i = 1 : m$
- $top = 0;$
- $for\ j = 1 : n$
- $top = top + A(i,j) * X(j);$
- end
- $Y(i) = top;$

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $for\ i = 1 : m$
- $top = 0;$
- $for\ j = 1 : n$
- $top = top + A(i,j) * X(j);$
- end
- $Y(i) = top;$
- end

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Yukarıda tanımlanan **skaler cebirsel** yığmalı toplam, MATLAB/Octave ortamında **vektör cebiri** yardımıyla daha pratik bir biçimde hesaplanabilir.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Yukarıda tanımlanan **skaler cebirsel** yığmalı toplam, MATLAB/Octave ortamında **vektör cebiri** yardımıyla daha pratik bir biçimde hesaplanabilir.
- Burada *skaler cebirsel işlem* ile skalerler üzerindeki aritmetik işlemleri, *vektör cebirsel işlem* ile de vektörler üzerindeki cebirsel işlemleri kastediyoruz.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Yukarıda tanımlanan **skaler cebirsel** yığmalı toplam, MATLAB/Octave ortamında **vektör cebiri** yardımıyla daha pratik bir biçimde hesaplanabilir.
- Burada *skaler cebirsel işlem* ile skalerler üzerindeki aritmetik işlemleri, *vektör cebirsel işlem* ile de vektörler üzerindeki cebirsel işlemleri kastediyoruz.
- $A(i,:)$ ile A matrisinin $i-inci$ satır vektörünü gösterelim. $\mathbf{x}$ bir sütun vektörü olmak üzere, $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ çarpım vektörünün her bir bileşeni vektörel iç çarpım ile

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Yukarıda tanımlanan **skaler cebirsel** yığmalı toplam, MATLAB/Octave ortamında **vektör cebiri** yardımıyla daha pratik bir biçimde hesaplanabilir.
- Burada *skaler cebirsel işlem* ile skalerler üzerindeki aritmetik işlemleri, *vektör cebirsel işlem* ile de vektörler üzerindeki cebirsel işlemleri kastediyoruz.
- $A(i,:)$ ile A matrisinin $i - inci$ satır vektörünü gösterelim. $\mathbf{x}$ bir sütun vektörü olmak üzere, $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ çarpım vektörünün her bir bileşeni vektörel iç çarpım ile
-
$$\mathbf{y}(i) = A(i,:) * \mathbf{x}, \quad i = 1, 2, ..., m$$

olarak elde edilir ve bu işlem MATLAB/Octave ortamında vektör cebirsel işlemler yardımıyla aşağıdaki gibi gerçekleştirilebilir:

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $for\ i = 1 : m$

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $\quad\quad for\ i = 1 : m$
- $\quad\quad\quad\quad Y(i) = A(i, :) * x;$

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $for\ i = 1 : m$
- $Y(i) = A(i,:) * x;$
- *end*

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $\quad for\ i = 1 : m$
- $\qquad Y(i) = A(i,:) * x;$
- $\quad end$
- Gözlem:
  Vektör cebiri yardımıyla, skaler cebirsel işlemde gerekli olan iç içe for döngüsü yerine, aynı işlemin tek bir döngü ile gerçekleştirilebildiğine dikkat edelim.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Alternatif olarak, matris-vektör çarpımı MATLAB/Octave ortamında

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Alternatif olarak, matris-vektör çarpımı MATLAB/Octave ortamında
- $$\mathbf{y} = A * \mathbf{x}$$

  olarak tanımlanır ve çapım vektörünün $i-$inci eleman ise $\mathbf{y}(i)$ dir.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin sütunlarına bakıldığında lineer cebiri, satırlarına bakıldığında ise geometriyi görürüz. Bu tesbit Gilber Strang'a[8] aittir.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin sütunlarına bakıldığında lineer cebiri, satırlarına bakıldığında ise geometriyi görürüz. Bu tesbit Gilber Strang'a[8] aittir.
- Öncelikle denklem sistemini lineer cebirsel açıdan inceleyelim:

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin sütunlarına bakıldığında lineer cebiri, satırlarına bakıldığında ise geometriyi görürüz. Bu tesbit Gilber Strang'a[8] aittir.
- Öncelikle denklem sistemini lineer cebirsel açıdan inceleyelim:
- Eğer bir $\mathbf{b}$ vektörü A matrisinin sütun uzayında ise, bu taktirde $\mathbf{b}$ vektörü, A matrisinin sütunlarının lineer bileşimi olarak yazılabilir, yani $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eşitliği sağlanacak biçimde $\mathbf{x}$ vektörü mevcuttur,

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin sütunlarına bakıldığında lineer cebiri, satırlarına bakıldığında ise geometriyi görürüz. Bu tesbit Gilber Strang'a[8] aittir.
- Öncelikle denklem sistemini lineer cebirsel açıdan inceleyelim:
- Eğer bir $\mathbf{b}$ vektörü A matrisinin sütun uzayında ise, bu taktirde $\mathbf{b}$ vektörü, A matrisinin sütunlarının lineer bileşimi olarak yazılabilir, yani $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eşitliği sağlanacak biçimde $\mathbf{x}$ vektörü mevcuttur,
- diğer bir değimle, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi çözüme sahiptir.

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin sütunlarına bakıldığında lineer cebiri, satırlarına bakıldığında ise geometriyi görürüz. Bu tesbit Gilber Strang'a[8] aittir.
- Öncelikle denklem sistemini lineer cebirsel açıdan inceleyelim:
- Eğer bir $\mathbf{b}$ vektörü A matrisinin sütun uzayında ise, bu taktirde $\mathbf{b}$ vektörü, A matrisinin sütunlarının lineer bileşimi olarak yazılabilir, yani $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eşitliği sağlanacak biçimde $\mathbf{x}$ vektörü mevcuttur,
- diğer bir değimle, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi çözüme sahiptir.
- Öte yandan, eğer $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi bir çözüme sahipse, $\mathbf{b}$ vektörü A matrisinin sütun uzayındadır: O halde

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin sütunlarına bakıldığında lineer cebiri, satırlarına bakıldığında ise geometriyi görürüz. Bu tesbit Gilber Strang'a[8] aittir.
- Öncelikle denklem sistemini lineer cebirsel açıdan inceleyelim:
- Eğer bir $\mathbf{b}$ vektörü A matrisinin sütun uzayında ise, bu taktirde $\mathbf{b}$ vektörü, A matrisinin sütunlarının lineer bileşimi olarak yazılabilir, yani $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eşitliği sağlanacak biçimde $\mathbf{x}$ vektörü mevcuttur,
- diğer bir değimle, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi çözüme sahiptir.
- Öte yandan, eğer $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi bir çözüme sahipse, $\mathbf{b}$ vektörü A matrisinin sütun uzayındadır: O halde
- *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümünün var olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{b}$ vektörünün A matrisinin sütun uzayında yer almasıdır.*

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin sütunları lineer bağımsızdır(Vektörlerden birisi diğerinin sıfırdan farklı bir sabit katı değildir).
O halde A nın sütun vektörleri R^2 nin bir tabanını oluşturur. Dolayısıyla herhangi $\mathbf{b} \in R^2$, A nın sütunlarının lineer bileşimi, yani $A\mathbf{x}$ biçimde ifade edilebilir:
Sonuç olarak herhangi $\mathbf{b} \in R^2$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi çözüme sahiptir.

Önerme

Eğer $\mathbf{b}$ *vektörü* A *matrisinin sütun uzayında yer almakta ve* A *nın sütunları lineer bağımsız ise bu taktirde* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *denklem sistemi tek bir çözüme sahiptir.*

İspat $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ olmak üzere $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ olduğunu kabul edelim, diğer bir deyimle $\mathbf{y}$ de bir diğer çözüm olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A\mathbf{y} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

denklem sistemlerinin taraf tarafa farkını alarak

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$$

olmak üzere

$$A\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

elde ederiz ki bu sonuç A matrisinin sütunlarının lineer bağımsız olmasıyla çelişir. O halde birden fazla çözüm kabulümüz yanlıştır.

Sonuç:
Eğer $\mathbf{b}$ vektörü A matrisinin sütun uzayında ve A nın sütunları lineer bağımlı ise $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi sonsuz sayıda çözüme sahiptir.

- **İspat b** vektörü A nın sütun uzayında olduğundan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklemini sağlayan en az bir $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ö}$ *özel çözümü* mevcuttur. Öte yandan A nın sütunları lineer bağımlı olduğundan, A matrisinin sıfır uzayı boştan farklıdır. $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$,$(k \geq 1)$ kümesi A matrisinin sıfır uzayının bir tabanı olsun. Bu taktirde

- **İspat** $\mathbf{b}$ vektörü A nın sütun uzayında olduğundan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklemini sağlayan en az bir $\mathbf{x} = \mathbf{x}_ö$ *özel çözümü* mevcuttur. Öte yandan A nın sütunları lineer bağımlı olduğundan, A matrisinin sıfır uzayı boştan farklıdır. $\{x_1, x_2, ..., x_k\}, (k \geq 1)$ kümesi A matrisinin sıfır uzayının bir tabanı olsun. Bu taktirde
- $$\mathbf{x}_h = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + ... + c_k\mathbf{x}_k, \; c_i \in R$$

  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homojen sisteminin genel çözümüdür ve homojen olmayan sistemin çözümü $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_ö$ biçimindedir.

- **İspat** $\mathbf{b}$ vektörü A nın sütun uzayında olduğundan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklemini sağlayan en az bir $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ö}$ *özel çözümü* mevcuttur. Öte yandan A nın sütunları lineer bağımlı olduğundan, A matrisinin sıfır uzayı boştan farklıdır. $\{x_1, x_2, ..., x_k\}, (k \geq 1)$ kümesi A matrisinin sıfır uzayının bir tabanı olsun. Bu taktirde
- $$\mathbf{x}_h = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + ... + c_k\mathbf{x}_k,\, c_i \in R$$

  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homojen sisteminin genel çözümüdür ve homojen olmayan sistemin çözümü $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_{ö}$ biçimindedir.
- Buradan sonsuz sayıda çözüm olduğu açıktır.

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

için $A\mathbf{x} = b$ *denklem sisteminin çözümünü irdeleyiniz.*

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Açıkça A matrisinin sütunları lineer bağımlıdır.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Açıkça A matrisinin sütunları lineer bağımlıdır.
- A nın sütun uzayı ikinci bileşeni birincisinin 2 katı olan noktalar kümesidir: Yani düzlemde $y = 2x$ bağıntısı ile tanımlanan doğru üzerindeki noktalardan oluşur.

- Açıkça A matrisinin sütunları lineer bağımlıdır.
- A nın sütun uzayı ikinci bileşeni birincisinin 2 katı olan noktalar kümesidir: Yani düzlemde $y = 2x$ bağıntısı ile tanımlanan doğru üzerindeki noktalardan oluşur.
- b de A nın sütun uzayında yani $y = 2x$ doğrusu üzerinde yer alır.

- Açıkça A matrisinin sütunları lineer bağımlıdır.
- A nın sütun uzayı ikinci bileşeni birincisinin 2 katı olan noktalar kümesidir: Yani düzlemde $y = 2x$ bağıntısı ile tanımlanan doğru üzerindeki noktalardan oluşur.
- b de A nın sütun uzayında yani $y = 2x$ doğrusu üzerinde yer alır.
- O halde $\mathbf{x} = [x, y]^T$ için $A\mathbf{x} = b$ denklem sistemi çözüme sahiptir.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Açıkça A matrisinin sütunları lineer bağımlıdır.
- A nın sütun uzayı ikinci bileşeni birincisinin 2 katı olan noktalar kümesidir: Yani düzlemde $y = 2x$ bağıntısı ile tanımlanan doğru üzerindeki noktalardan oluşur.
- b de A nın sütun uzayında yani $y = 2x$ doğrusu üzerinde yer alır.
- O halde $\mathbf{x} = [x, y]^T$ için $A\mathbf{x} = b$ denklem sistemi çözüme sahiptir.
- Standart yok etme işlemi ile

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

dan $x + 2y = 3$ veya $y = (x - 3)/2$ elde ederiz

- Bu durumda sonsuz sayıda noktadan oluşan çözüm kümesi

- Bu durumda sonsuz sayıda noktadan oluşan çözüm kümesi
-

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ (x-3)/2 \end{bmatrix} \\
&= x\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \end{bmatrix}, x \in R \\
&= \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_{ö}
\end{aligned}
$$

biçiminde iki bileşenden oluşmaktadır.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Burada

$$\mathbf{x}_h = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, c \in R$$

$A\mathbf{x} = 0$ homojen sisteminin *genel çözümü*, yani A nın sıfır uzayındaki noktalar kümesi ve

$$\mathbf{x}_{ö} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

ise $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nin $c = 0$ skalerine karşılık gelen bir *özel çözümüdür.*

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ile verilen A *matrisi ve herhangi* $\mathbf{b} \in R^3$ *için* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *denklem sisteminin çözümünü irdeleyiniz.*

- A matrisinin sütunları lineer bağımsızdır $(A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ dır$)$. Dolayısıyla A nın sütunları R^3 için bir tabandır. R^3 de alınan herhangi bir **b** vektörü, bu taban elemanlarının lineer bileşimi olarak yazılabilir.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- A matrisinin sütunları lineer bağımsızdır $(A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ dır$)$. Dolayısıyla A nın sütunları R^3 için bir tabandır. R^3 de alınan herhangi bir $\mathbf{b}$ vektörü, bu taban elemanlarının lineer bileşimi olarak yazılabilir.
- O halde her $\mathbf{b} \in R^3$ için

$$\begin{bmatrix} 3x+2y+z \\ x-y+2z \\ 2x+y+4z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

sistemi çözüme sahiptir.

Örnek

Sütunları lineer bağımlı olan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

matrisi ve herhangi $\mathbf{b} = [\mathbf{1}\ 1\ 1]^T$ *ve* $\mathbf{b} = [2\ 1\ 1]^T$ *için* $A\mathbf{x} = b$ *denklem sisteminin çözümünü irdeleyiniz.*

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $\mathbf{b} = [1\ 1\ 1]^T$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümü yoktur.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $\mathbf{b} = [1\ 1\ 1]^T$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümü yoktur.
- Çünkü bu **b** vektörü *A* matrisinin sütun uzayında yer almamaktadır.

- $\mathbf{b} = [1\ 1\ 1]^T$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümü yoktur.
- Çünkü bu **b** vektörü A matrisinin sütun uzayında yer almamaktadır.
- A matrisinin satırları arasında

$$satır\_1 + 3 \times satır\_2 = 5 \times satır\_3 \tag{3}$$

bağıntısının olduğuna dikkat edelim.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $\mathbf{b} = [1\ 1\ 1]^T$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümü yoktur.
- Çünkü bu $\mathbf{b}$ vektörü A matrisinin sütun uzayında yer almamaktadır.
- A matrisinin satırları arasında

$$satır\_1 + 3 \times satır\_2 = 5 \times satır\_3 \tag{3}$$

bağıntısının olduğuna dikkat edelim.

- O halde herhangi $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]^T$ vektörü için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümün var olması ancak ve ancak

$$b_1 + 3 \times b_2 = 5 \times b_3 \tag{4}$$

bağıntısının sağlamasıyla mümkündür. Oysa $\mathbf{b} = [1\ 1\ 1]^T$ vektörü bu özelliği sağlamamaktadır.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Öte yandan $\mathbf{b} = [2\ 1\ 1]^T$ vektörü (4) özelliğini sağlar. Dolayısıyla bu $\mathbf{b}$ vektörü için çözüm mevcuttur.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Öte yandan $\mathbf{b} = [2\ 1\ 1]^T$ vektörü (4) özelliğini sağlar. Dolayısıyla bu $\mathbf{b}$ vektörü için çözüm mevcuttur.
- Ancak (2) ile tanımlanan A matrisinin sütunları lineer bağımlı olduğu için sonsuz sayıda çözüm vardır. Bu durumda sistemin çözümü

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Öte yandan $\mathbf{b} = [2\ 1\ 1]^T$ vektörü (4) özelliğini sağlar. Dolayısıyla bu $\mathbf{b}$ vektörü için çözüm mevcuttur.
- Ancak (2) ile tanımlanan A matrisinin sütunları lineer bağımlı olduğu için sonsuz sayıda çözüm vardır. Bu durumda sistemin çözümü
-
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_{\ddot{o}}$$
olacak biçimde iki bileşenden oluşur.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Öte yandan $\mathbf{b} = [2\ 1\ 1]^T$ vektörü (4) özelliğini sağlar. Dolayısıyla bu $\mathbf{b}$ vektörü için çözüm mevcuttur.
- Ancak (2) ile tanımlanan A matrisinin sütunları lineer bağımlı olduğu için sonsuz sayıda çözüm vardır. Bu durumda sistemin çözümü
- $$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_ö$$

  olacak biçimde iki bileşenden oluşur.
- Burada $\mathbf{x}_h$, $A\mathbf{x} = 0$ homojen sistemin keyfi parametre veya parametreler içeren genel çözümü ve $\mathbf{x}_ö$ ise homojen olmayan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistemin bir özel çözümüdür. Örneğimiz için

- Öte yandan $\mathbf{b} = [2\ 1\ 1]^T$ vektörü (4) özelliğini sağlar. Dolayısıyla bu $\mathbf{b}$ vektörü için çözüm mevcuttur.
- Ancak (2) ile tanımlanan A matrisinin sütunları lineer bağımlı olduğu için sonsuz sayıda çözüm vardır. Bu durumda sistemin çözümü
- $$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_{ö}$$

  olacak biçimde iki bileşenden oluşur.
- Burada $\mathbf{x}_h$, $A\mathbf{x} = 0$ homojen sistemin keyfi parametre veya parametreler içeren genel çözümü ve $\mathbf{x}_{ö}$ ise homojen olmayan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistemin bir özel çözümüdür. Örneğimiz için
- $$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_{ö} = c \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, c \in R$$

  dir.

- Özetle,
  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi verilmiş olsun.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Özetle,
  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi verilmiş olsun.
- *Eğer* $\mathbf{b}$ *vektörü,* A *matrisinin sütun uzayında ise çözüm mevcuttur, aksi halde çözüm mevcut değildir.*

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Özetle,
  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi verilmiş olsun.
- *Eğer* $\mathbf{b}$ *vektörü,* A *matrisinin sütun uzayında ise çözüm mevcuttur, aksi halde çözüm mevcut değildir.*
- *Eğer* $\mathbf{b}$ *vektörü* A *matrisinin sütun uzayında ve* A *nın sütunları lineer bağımsız ise bir tek çözüm, lineer bağımlı ise sonsuz sayıda çözüm mevcuttur.*

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Özetle,
  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemi verilmiş olsun.
- *Eğer* $\mathbf{b}$ *vektörü, A matrisinin sütun uzayında ise çözüm mevcuttur, aksi halde çözüm mevcut değildir.*
- *Eğer* $\mathbf{b}$ *vektörü A matrisinin sütun uzayında ve A nın sütunları lineer bağımsız ise bir tek çözüm, lineer bağımlı ise sonsuz sayıda çözüm mevcuttur.*
- *Sonsuz sayıdaki çözümler ise*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_ö$$

biçiminde $\mathbf{x}_h$ *ile gösterilen homojen kısmın genel çözümü ve* $\mathbf{x}_ö$ *ile gösterilen homojen olmayan sitemin özel çözümünün toplamı olarak ifade edilir.*

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Şimdi de denklem sistemini geometrik açıdan inceleyelim:

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Şimdi de denklem sistemini geometrik açıdan inceleyelim:
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin her bir denklemine(satırına) bakıldığında ne gözlemleriz?

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Şimdi de denklem sistemini geometrik açıdan inceleyelim:
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin her bir denklemine(satırına) bakıldığında ne gözlemleriz?
- $n = 1, m = 1$ için sistem $ax = b$ denklemine indirgenir. Bu durumda $a \neq 0$ için tek bir çözüm($x = b/a$) elde edilir.$a = 0$ olması durumda ise çözüm yalnız ve yalnız $b = 0$ olması durumunda mümkündür ve bu durumda sonsuz sayıda çözüm mevcuttur(her reel sayı bir çözümdür).

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- Şimdi de denklem sistemini geometrik açıdan inceleyelim:
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin her bir denklemine(satırına) bakıldığında ne gözlemleriz?
- $n = 1, m = 1$ için sistem $ax = b$ denklemine indirgenir. Bu durumda $a \neq 0$ için tek bir çözüm($x = b/a$) elde edilir.$a = 0$ olması durumda ise çözüm yalnız ve yalnız $b = 0$ olması durumunda mümkündür ve bu durumda sonsuz sayıda çözüm mevcuttur(her reel sayı bir çözümdür).
- $n = 2, m = 2$ için

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Her bir denklemin R^2 de bir doğru belirlediğini biliyoruz.

- O halde sistem her iki doğru üzerinde bulunan noktaların geometrik yerini araştırmaktadır. Söz konusu doğrular farklı veya aynı eğimlere sahip olabilirler.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- O halde sistem her iki doğru üzerinde bulunan noktaların geometrik yerini araştırmaktadır. Söz konusu doğrular farklı veya aynı eğimlere sahip olabilirler.
- Eğer farklı eğimlere sahip olurlarsa, tek bir noktada kesişirler(tek bir çözüm).

- O halde sistem her iki doğru üzerinde bulunan noktaların geometrik yerini araştırmaktadır. Söz konusu doğrular farklı veya aynı eğimlere sahip olabilirler.
- Eğer farklı eğimlere sahip olurlarsa, tek bir noktada kesişirler(tek bir çözüm).
- Aynı eğime sahip olmaları durumunda ise çakışık doğrular olabilirler(sonsuz çözüm) veya hiç kesişmeyebilirler(çözüm yok).

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $n \geq 3$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin her bir satırı $n = 3$ için bir düzlem ve$n > 3$ için *hiperdüzlem* belirler.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $n \geq 3$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin her bir satırı $n = 3$ için bir

  düzlem ve$n > 3$ için *hiperdüzlem* belirler.
- Bu durumda problem, *m* adet hiperdüzlemin arakesit noktasının geometrik yerini araştırmaktadır.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $n \geq 3$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin her bir satırı $n = 3$ için bir düzlem ve$n > 3$ için *hiperdüzlem* belirler.
- Bu durumda problem, m adet hiperdüzlemin arakesit noktasının geometrik yerini araştırmaktadır.
- Tek bir noktada kesişmeleri durumunda, kesişim noktası sistemin tek bir çözümüdür.

Skaler ve vektör cebiri ile matris-vektör çarpımı

- $n \geq 3$ için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin her bir satırı $n = 3$ için bir

  düzlem ve$n > 3$ için *hiperdüzlem* belirler.
- Bu durumda problem, m adet hiperdüzlemin arakesit noktasının geometrik yerini araştırmaktadır.
- Tek bir noktada kesişmeleri durumunda, kesişim noktası sistemin tek bir çözümüdür.
- Denklemlerden bazıları diğerlerinin lineer bileşimi olabilir, buna göre sistem değişik sayıda parametreli sonsuz çözüme sahip olabilir veya hiçbir ortak noktada kesişmeyebilirler ki bu durumda sistem herhangi bir çözüme sahip değildir.

Neden Ax=b?

- Farklı alanlardaki bir çok problem, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ biçiminde ifade edilebilen lineer cebirsel bir sistemin çözümünü gerektirir:

Neden Ax=b?

- Farklı alanlardaki bir çok problem, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ biçiminde ifade edilebilen

  lineer cebirsel bir sistemin çözümünü gerektirir:
- En basit durumda $n = 1, m = 1$ için $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - xb = \frac{1}{2}xax - xb$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer $a > 0$ $(a < 0)$ise f fonksiyonu minimumuna(maksimumuna), $ax = b$ denkleminin çözümünde ulaşır.

Neden Ax=b?

- Farklı alanlardaki bir çok problem, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ biçiminde ifade edilebilen

  lineer cebirsel bir sistemin çözümünü gerektirir:
- En basit durumda $n = 1, m = 1$ için $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - xb = \frac{1}{2}xax - xb$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer $a > 0$ ($a < 0$)ise f fonksiyonu minimumuna(maksimumuna), $ax = b$ denkleminin çözümünde ulaşır.
- $n = 2, m = 2$ için

$$f(x,y) = \frac{1}{2}[x\ y]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - [x\ y]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

fonksiyonu ekstremum noktasına

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 0 \\ f_y(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Neden Ax=b?

- Simetrik bir A matrisi için sonlu bilinmeyenli bir çok fiziksel

  sistemin(yapı elemanları, yaylar, kütleler vb) toplam enerjisini ifade eden

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}$$

  fonksiyonu, ekstremum noktasına(denge noktasına)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  denklem sisteminin çözümünde ulaşır. Eğer A pozitif definit ise çözüm noktası minimum, negatif definit ise maksimum ve indefinit ise eyer noktasıdır[8].

Neden Ax=b?

- Sadece doğa olaylarında değil, ekonomide de denge bir lineer denklem sistemininin çözümünü gerektirir.

[1] Wasilly Leontief, Rus iktisatçı.

Neden Ax=b?

- Sadece doğa olaylarında değil, ekonomide de denge bir lineer denklem

  sisteminin çözümünü gerektirir.
- Örneğin ulusal ekonomi modelinde D vektörü ile dış ülkelerden gelen ithalat talebini gösterelim. Bu talebi karşılamak üzere ülkenin her bir ekonomi sektöründe üretilmesi gereken miktarı ise $\mathbf{x}$ ile gösterim.

[1] Wasilly Leontief, Rus iktisatçı.

Neden Ax=b?

- Sadece doğa olaylarında değil, ekonomide de denge bir lineer denklem

  sisteminin çözümünü gerektirir.
- Örneğin ulusal ekonomi modelinde D vektörü ile dış ülkelerden gelen ithalat talebini gösterelim. Bu talebi karşılamak üzere ülkenin her bir ekonomi sektöründe üretilmesi gereken miktarı ise $\mathbf{x}$ ile gösterim.
- Bu üretim sürecinde ülkenin iç tüketimi $A\mathbf{x}$ e eşittir ve dış talebi karşılamak için üretilmesi gereken miktar

$$\mathbf{x} - A\mathbf{x} = D$$

veya

$$(I - A)\mathbf{x} = D$$

biçiminde bir lineer sistemin çözümü olarak elde edilir. Bu model Leontief[1] input-output modeli olarak bilinir[4].

[1] Wasilly Leontief, Rus iktisatçı.

Neden Ax=b?

- Diferensiyel denklemler ile oluşturulan sınır-değer problemleri, sonlu elemanlar veya sonlu farklar yöntemleri yardımıyla elde edilen yaklaşımlar sonunda lineer cebirsel sistemlerin çözümünü gerektirirler[3].

Neden Ax=b?

- Diferensiyel denklemler ile oluşturulan sınır-değer problemleri, sonlu elemanlar veya sonlu farklar yöntemleri yardımıyla elde edilen yaklaşımlar sonunda lineer cebirsel sistemlerin çözümünü gerektirirler[3].
- Verilen veri kümesine uygun eğrinin belirlenmesi problemi lineer denklem sistemi çözümünü gerektirir(Bölüm 5).

Neden Ax=b?

- Diferensiyel denklemler ile oluşturulan sınır-değer problemleri, sonlu elemanlar veya sonlu farklar yöntemleri yardımıyla elde edilen yaklaşımlar sonunda lineer cebirsel sistemlerin çözümünü gerektirirler[3].
- Verilen veri kümesine uygun eğrinin belirlenmesi problemi lineer denklem sistemi çözümünü gerektirir(Bölüm 5).
- Nonlineer cebirsel sistemler için geliştirilen bir çok yöntem(örneğin Newton yöntemi ve varyasyonları) her adımda lineer cebirsel sistemlerin çözümünü gerektirir(Bölüm 6).

Neden Ax=b?

- Yukarıdaki örnekleri çoğaltmak mümkündür, şimdi söz konusu sistemin nasıl çözüleceği problemine geri dönelim.

Çözüm yöntemleri

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin çözümü için esas itibariyle iki çözüm sınıfı mevcuttur.

Çözüm yöntemleri

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin çözümü için esas itibariyle iki çözüm sınıfı

  mevcuttur.
- Bu yöntemler *doğrudan(direkt)* ve *yinelemeli(iteratif)* çözüm yöntemleri olarak adlandırılırlar.

Çözüm yöntemleri

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin çözümü için esas itibariyle iki çözüm sınıfı

  mevcuttur.
- Bu yöntemler *doğrudan(direkt)* ve *yinelemeli(iteratif)* çözüm yöntemleri olarak adlandırılırlar.
- Ayrıca *yarı yinelemeli(semi-iterative)*[7] olarak adlandırılan ve bazı özel matrisler için daha etkin çözüm üreten yöntemler *Gradyan yöntemleri* gibi yöntemler de mevcuttur, ancak söz konusu yöntemlere bu çalışmanın kapsamını sınırlı tutmak amacıyla yer veremiyoruz..

Çözüm yöntemleri

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin çözümü için esas itibariyle iki çözüm sınıfı

  mevcuttur.
- Bu yöntemler *doğrudan(direkt)* ve *yinelemeli(iteratif)* çözüm yöntemleri olarak adlandırılırlar.
- Ayrıca *yarı yinelemeli(semi-iterative)*[7] olarak adlandırılan ve bazı özel matrisler için daha etkin çözüm üreten yöntemler *Gradyan yöntemleri* gibi yöntemler de mevcuttur, ancak söz konusu yöntemlere bu çalışmanın kapsamını sınırlı tutmak amacıyla yer veremiyoruz..
- *Doğrudan çözüm yöntemleri* sonlu sayıda işlem yardımıyla çözümü belirli bir yuvarlama hatası ile elde eden yöntemlerdir.

Çözüm yöntemleri

- İlerleyen bölümlerde inceleyeceğimiz Gauss yok etme yöntemi, LU ayrışım yöntemi ve QR ayrışım yöntemi doğrudan çözüm yöntemlerinden sıkça kullanılanlarıdırlar.

Çözüm yöntemleri

- İlerleyen bölümlerde inceleyeceğimiz Gauss yok etme yöntemi, LU ayrışım yöntemi ve QR ayrışım yöntemi doğrudan çözüm yöntemlerinden sıkça kullanılanlarıdırlar.
- **Doğrudan çözüm yöntemleri** A katsayı matrisinin çok fazla sayıda

  sıfırdan farklı elemanı olması veya diğer bir deyimle "yoğun(dense)" matris olması durumunda ve boyutunun ise "küçük" olması durumda tercih edilirler.

Yinelemeli çözüm yöntemleri

- *Yinelemeli yöntemler* ise verilen denklem siteminin çözümünü, çok değişkenli ve lineer bir fonksiyon olan

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$$

fonksiyonunun sıfıryerini belirleme problemini olarak gözönüne alırlar.

Yinelemeli çözüm yöntemleri

- *Yinelemeli yöntemler* ise verilen denklem siteminin çözümünü, çok değişkenli ve lineer bir fonksiyon olan

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$$

fonksiyonunun sıfıryerini belirleme problemini olarak gözönüne alırlar.

- Bu biçimde tanımlanan f nin sıfıryerini belirleme problemini ise uygun biçimde seçilen ve *yineleme fonksiyonu* adı verilen fonksiyonun *sabit noktasını* belirleme problemine dönüştürürler.

Yinelemeli çözüm yöntemleri

- *Yinelemeli yöntemler* ise verilen denklem siteminin çözümünü, çok değişkenli ve lineer bir fonksiyon olan

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$$

fonksiyonunun sıfıryerini belirleme problemini olarak gözönüne alırlar.

- Bu biçimde tanımlanan f nin sıfıryerini belirleme problemini ise uygun biçimde seçilen ve *yineleme fonksiyonu* adı verilen fonksiyonun *sabit noktasını* belirleme problemine dönüştürürler.
- Bu amaçla yinelemeli yöntemler uygun $\mathbf{x}^{(0)} \in R^n$ başlangıç noktası ve g ile gösterilen yineleme fonksiyonu yardımıyla

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = g(\mathbf{x}^{(k)}), k = 0, 1, \cdots$$

ile elde edilen ve yakınsaması ümit edilen dizinin limit noktasını belirlemeyi veya limit noktasına yeterince yaklaşmayı amaçlarlar.

Yinelemeli çözüm yöntemleri

- *Yinelemeli yöntemler* ise verilen denklem siteminin çözümünü, çok değişkenli ve lineer bir fonksiyon olan

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$$

fonksiyonunun sıfıryerini belirleme problemini olarak gözönüne alırlar.

- Bu biçimde tanımlanan f nin sıfıryerini belirleme problemini ise uygun biçimde seçilen ve *yineleme fonksiyonu* adı verilen fonksiyonun *sabit noktasını* belirleme problemine dönüştürürler.
- Bu amaçla yinelemeli yöntemler uygun $\mathbf{x}^{(0)} \in R^n$ başlangıç noktası ve g ile gösterilen yineleme fonksiyonu yardımıyla

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = g(\mathbf{x}^{(k)}), k = 0, 1, \cdots$$

ile elde edilen ve yakınsaması ümit edilen dizinin limit noktasını belirlemeyi veya limit noktasına yeterince yaklaşmayı amaçlarlar.

- **Yinelemeli yöntemler** genelde büyük boyutlu ve yoğun olmayan(sparse) katsayı matrisine sahip sistemler için tercih edilirler.

Kaynaklar

- Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1988.
- Coşkun, E. MATLAB/Octave ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:erhancoskun.com.tr).
- Coşkun, E. MATLAB/Octave Uygulamalarıyla Diferensiyel Denklemler için Sonlu Fark Yöntemleri(URL:erhancoskun.com.tr).
- Coşkun, E. Endüstriyel ve Uygulamalı Matematiğe giriş(URL:erhancoskun.com.tr).
- LAPACK, Linear Algebra Package,(URL:netlib.org)
- OCTAVE, GNU özgür yazılım(*URL:OCTAVE.sourceforge.net*).
- Stoer, J., Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1976.
- Strang, G., Introduction to Applied Mathematics, Wellesley-Cambridge, 1986.