$A = QR$ ayrışımı ve $Ax = b$ sistemi

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Eylül 2020

$A = QR$ ayrışımı ve Ax=b sistemi

Bu bölümde

- A matrisinin QR ayrışımı ve bir uygulama olarak ta söz konusu ayrışım yardımıyla $Ax = b$ lineer denklem sistem çözümünü inceliyoruz.

$A = QR$ ayrışımı

- $A_{m \times n}$ $(m \geq n)$ matrisinin sütunlarının lineer bağımsız olduğunu kabul edelim. A nın sütunları Gram-Schmidt yardımıyla ortogonelleştrilerek, söz konusu ortogonal(ortonormal) kümeyi sütunları olarak kabul eden

$$Q = [q_1 \ q_2 \cdots q_n]$$

matrisi ve

$A = QR$ ayrışımı

- $A_{m \times n}$ $(m \geq n)$ matrisinin sütunlarının lineer bağımsız olduğunu kabul edelim. A nın sütunları Gram-Schmidt yardımıyla ortogonelleştrilerek, söz konusu ortogonal(ortonormal) kümeyi sütunları olarak kabul eden

$$Q = [q_1 \;\; q_2 \cdots q_n]$$

matrisi ve

- $$R = Q^T A$$

ile tanımlanan üst üçgensel R matrisi ile

$A = QR$ ayrışımı

- $A_{m\times n}$ $(m \geq n)$ matrisinin sütunlarının lineer bağımsız olduğunu kabul edelim. A nın sütunları Gram-Schmidt yardımıyla ortogonelleştrilerek, söz konusu ortogonal(ortonormal) kümeyi sütunları olarak kabul eden

$$Q = [q_1 \;\; q_2 \cdots q_n]$$

matrisi ve

- $$R = Q^T A$$

ile tanımlanan üst üçgensel R matrisi ile

- $$A = QR$$

ayrışımı elde edilebilir.

- Bu işlemin nasıl gerçekleştirildiğini görmek için öncelikle skaler ve vektörel izdüşüm kavramları ve ardından da Gram-Schmidt yöntemini hatırlayalım:

- Bu işlemin nasıl gerçekleştirildiğini görmek için öncelikle skaler ve vektörel izdüşüm kavramları ve ardından da Gram-Schmidt yöntemini hatırlayalım:
- *Skaler izdüşüm:* Bir **b** vektörünün **a** vektörü yönündeki skaler izdüşümü $||\mathbf{b}|| \cos\theta$ dır, burada $\theta \in (0, \pi)$, **a** ile **b** arasındaki açıdır.

$A = QR$ ayrışımı

- Bu işlemin nasıl gerçekleştirildiğini görmek için öncelikle skaler ve vektörel izdüşüm kavramları ve ardından da Gram-Schmidt yöntemini hatırlayalım:
- *Skaler izdüşüm:* Bir **b** vektörünün **a** vektörü yönündeki skaler izdüşümü $||\mathbf{b}|| \cos\theta$ dır, burada $\theta \in (0, \pi)$, **a** ile **b** arasındaki açıdır.
- *Vektörel izdüşüm:* Bir **b** vektörünün **a** vektörü yönündeki vektörel izdüşümü, **b** nin **a** yönündeki skaler izdüşümü ile **a** yönündeki birim vektör, yani $\mathbf{a}/||\mathbf{a}||$, ile çarpımıdır.

$A = QR$ ayrışımı

- Bu işlemin nasıl gerçekleştirildiğini görmek için öncelikle skaler ve vektörel izdüşüm kavramları ve ardından da Gram-Schmidt yöntemini hatırlayalım:
- *Skaler izdüşüm:* Bir **b** vektörünün **a** vektörü yönündeki skaler izdüşümü $||\mathbf{b}|| \cos\theta$ dır, burada $\theta \in (0, \pi)$, **a** ile **b** arasındaki açıdır.
- *Vektörel izdüşüm:* Bir **b** vektörünün **a** vektörü yönündeki vektörel izdüşümü, **b** nin **a** yönündeki skaler izdüşümü ile **a** yönündeki birim vektör, yani $\mathbf{a}/||\mathbf{a}||$, ile çarpımıdır.
- Vektörel izdüşümü $\mathrm{Pr}(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ sembolü ile gösteriyoruz, burada Pr(Projeksiyon=izdüşüm) sözcüğünün ilk iki harfidir.

$A = QR$ ayrışımı

- O halde

$$\Pr(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = ||\mathbf{b}|| \cos\theta \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}$$

$A = QR$ ayrışımı

- O halde

$$\Pr(\mathbf{b},\mathbf{a}) = ||\mathbf{b}|| \cos\theta \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}$$

- Öte yandan

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||}$$

olduğunu hatırlayarak,

$$\begin{aligned}\Pr(\mathbf{b},\mathbf{a}) &= ||\mathbf{b}|| \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||} \cos\theta \\ &= ||\mathbf{b}|| \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||} \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||} = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||} \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}\end{aligned}$$

elde ederiz. Özel olarak $||\mathbf{a}|| = 1$ olması durumunda,

$$\Pr(\mathbf{b},\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T\mathbf{b}\mathbf{a}$$

olur.

$A = QR$ ayrışımı

- *Gram-Schmidt yöntemi, lineer bağımsız bir kümeden ortogonal veya ortonormal bir küme elde etme işlemdir: A matrisi,* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ sütunlarından oluşan bir matris olsun. Aşağıda verilen *Gram-Schmidt prosedürü* ile ortonormal sütunlara sahip $Q = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$ matrisi elde edilir.

- *Gram-Schmidt yöntemi, lineer bağımsız bir kümeden ortogonal veya ortonormal bir küme elde etme işlemdir: A matrisi,* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ sütunlarından oluşan bir matris olsun. Aşağıda verilen *Gram-Schmidt prosedürü* ile ortonormal sütunlara sahip $Q = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$ matrisi elde edilir.
-
$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1 = \mathbf{v}_1/||\mathbf{v}_1|| \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \mathrm{Pr}(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_1) = \mathbf{a}_2 - \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 = \mathbf{v}_2/||\mathbf{v}_2|| \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{a}_3 - \mathrm{Pr}(\mathbf{a}_3, \mathbf{q}_1) - \mathrm{Pr}(\mathbf{a}_3, \mathbf{q}_2) \\
&= \mathbf{a}_3 - \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_3 \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_3 \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 = \mathbf{v}_3/||\mathbf{v}_3||
\end{aligned}$$

  işlemi ile önceki vektörler yönünde bileşen içermeyen ve dolayısıyla ortogonal
$$Q = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \mathbf{q}_3]$$
  matrisi elde edilir .

- Gram-Schmidt yöntemi ile bir A matrisinin QR ayrışımını bir örnek üzerinde inceleyelim:

Örnek 1.

$$A = [a_1 \ a_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin sütunlarını Gram-Schmidt yöntemi yardımıyla ortogonalleştirerek, ortonormal sütunları içeren Q matrisini belirleyiniz. Daha sonra $R = Q^T A$ ile tanımlı R üst üçgensel matrisini hesaplayarak $A = QR$ ayrışımını belirleyiniz.

Yukarıdaki kısa özete göre

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1 = [1 \ \ -1 \ 1]^T, \\
\mathbf{q}_1 &= \mathbf{v}_1/||\mathbf{v}_1|| = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 \ \ -1 \ 1]^T \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \Pr(\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_1) = \mathbf{a}_2 - \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{q}_1 \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}[1 \ \ -1 \ 1] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 7/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{q}_2 &= \mathbf{v}_2/||\mathbf{v}_2|| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 7/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Klasik Gram-Schmidt yöntemi ile A nın sütunlarında Q matrisi oluşturur

- Öte yandan

$$R = Q^T A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{26} & 7/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}$$

olur.

Klasik Gram-Schmidt yöntemi ile A nın sütunlarında Q matrisi oluşturur

- Öte yandan

$$\begin{aligned} R &= Q^T A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{26} & 7/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur.

- O halde

$$A = QR = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{26} \\ -1 & 7/\sqrt{26} \\ 1 & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}$$

ayrışımını elde ederiz.

Klasik Gram-Schmidt yöntemi ile A nın sütunlarında Q matrisi oluşturur

- Öte yandan

$$\begin{aligned} R &= Q^T A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{26} & 7/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

  olur.

- O halde

$$A = QR = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{26} \\ -1 & 7/\sqrt{26} \\ 1 & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}$$

  ayrışımını elde ederiz.

- Vektör tabanlı Gram-Schmidt algoritması aşağıda verilmektedir:

Klasik Gram-Schmidt yöntemi ile A nın sütunlarında Q matrisi oluşturur

- Öte yandan

$$\begin{aligned} R &= Q^T A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{26} & 7/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

  olur.
- O halde

$$A = QR = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{26} \\ -1 & 7/\sqrt{26} \\ 1 & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}$$

  ayrışımını elde ederiz.
- Vektör tabanlı Gram-Schmidt algoritması aşağıda verilmektedir:

Klasik Gram-Schmidt yöntemi ile A nın sütunlarında Q matrisi oluşturur

- Öte yandan

$$\begin{aligned} R &= Q^T A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{26} & 7/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

  olur.

- O halde

$$A = QR = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{26} \\ -1 & 7/\sqrt{26} \\ 1 & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}$$

  ayrışımını elde ederiz.

- Vektör tabanlı Gram-Schmidt algoritması aşağıda verilmektedir:

Klasik Gram-Schmidt yöntemi ile A nın sütunlarında Q matrisi oluşturur

- Öte yandan

$$
\begin{aligned}
R &= Q^T A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{26} & 7/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

  olur.

- O halde

$$
A = QR = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{26} \\ -1 & 7/\sqrt{26} \\ 1 & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}
$$

  ayrışımını elde ederiz.

- Vektör tabanlı Gram-Schmidt algoritması aşağıda verilmektedir:

Klasik Gram-Schmidt yöntemi ile A nın sütunlarında Q matrisi oluşturur

- Öte yandan

$$
\begin{aligned}
R &= Q^T A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{26} & 7/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olur.

- O halde

$$
A = QR = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{26} \\ -1 & 7/\sqrt{26} \\ 1 & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}
$$

ayrışımını elde ederiz.

- Vektör tabanlı Gram-Schmidt algoritması aşağıda verilmektedir:

Klasik Gram-Schmidt yöntemi ile A nın sütunlarında Q matrisi oluşturur

- Öte yandan

$$
\begin{aligned}
R &= Q^T A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{26} & 7/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olur.

- O halde

$$
A = QR = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{26} \\ -1 & 7/\sqrt{26} \\ 1 & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}
$$

ayrışımını elde ederiz.

- Vektör tabanlı Gram-Schmidt algoritması aşağıda verilmektedir:

Klasik Gram-Schmidt yöntemi ile A nın sütunlarında Q matrisi oluşturur

- Öte yandan

$$\begin{aligned} R &= Q^T A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{26} & 7/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

  olur.

- O halde

$$A = QR = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{26} \\ -1 & 7/\sqrt{26} \\ 1 & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}$$

  ayrışımını elde ederiz.

- Vektör tabanlı Gram-Schmidt algoritması aşağıda verilmektedir:

Klasik Gram-Schmidt yöntemi ile A nın sütunlarında Q matrisi oluşturur

- Öte yandan

$$\begin{aligned} R &= Q^T A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{26} & 7/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

  olur.

- O halde

$$A = QR = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{26} \\ -1 & 7/\sqrt{26} \\ 1 & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}$$

  ayrışımını elde ederiz.

- Vektör tabanlı Gram-Schmidt algoritması aşağıda verilmektedir:

Klasik Gram-Schmidt yöntemi ile A nın sütunlarında Q matrisi oluşturur

- Öte yandan

$$
\begin{aligned}
R &= Q^T A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{26} & 7/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olur.

- O halde

$$
A = QR = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{26} \\ -1 & 7/\sqrt{26} \\ 1 & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}
$$

ayrışımını elde ederiz.

- Vektör tabanlı Gram-Schmidt algoritması aşağıda verilmektedir:

Klasik Gram-Schmidt yöntemi ile A nın sütunlarında Q matrisi oluşturur

- Öte yandan

$$
\begin{aligned}
R &= Q^T A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{26} & 7/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olur.

- O halde

$$
A = QR = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{26} \\ -1 & 7/\sqrt{26} \\ 1 & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}
$$

ayrışımını elde ederiz.

- Vektör tabanlı Gram-Schmidt algoritması aşağıda verilmektedir:

Klasik Gram-Schmidt yöntemi ile A nın sütunlarında Q matrisi oluşturur

- Öte yandan

$$
\begin{aligned}
R &= Q^T A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2/\sqrt{26} & 7/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olur.

- O halde

$$
A = QR = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{26} \\ -1 & 7/\sqrt{26} \\ 1 & 5/\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}
$$

ayrışımını elde ederiz.

- Vektör tabanlı Gram-Schmidt algoritması aşağıda verilmektedir:

matrisi oluşturur.

- $$function\ Q = gs(A)$$

matrisi oluşturur.

- $function\ Q = gs(A)$
- $[m, n] = size(A); Q(:, 1) = A(:, 1)/norm(A(:, 1));$

matrisi oluşturur.

- $function\ Q = gs(A)$
- $[m, n] = size(A); Q(:, 1) = A(:, 1)/norm(A(:, 1));$
- $for\ i = 2 : n$

matrisi oluşturur.

- $function\ \ Q = gs(A)$
- $[m, n] = size(A); Q(:, 1) = A(:, 1)/norm(A(:, 1));$
- $for\ \ i = 2 : n$
- $\quad top = 0;$

matrisi oluşturur.

- $function\ \ Q = gs(A)$
- $[m, n] = size(A); Q(:, 1) = A(:, 1)/norm(A(:, 1));$
- $for\ \ i = 2 : n$
- $\quad top = 0;$
- $\quad for\ \ k = 1 : i - 1$

- $function \;\; Q = gs(A)$
- $[m, n] = size(A); Q(:, 1) = A(:, 1)/norm(A(:, 1));$
- $for \;\; i = 2 : n$
- $\quad top = 0;$
- $\quad for \;\; k = 1 : i - 1$
- $\qquad top = top + proj(A(:, i), Q(:, k));$

- $function\ \ Q = gs(A)$
- $[m, n] = size(A); Q(:, 1) = A(:, 1) / norm(A(:, 1));$
- $for\ \ i = 2 : n$
- $\quad top = 0;$
- $\quad for\ \ k = 1 : i - 1$
- $\qquad top = top + proj(A(:, i), Q(:, k));$
- $\quad end$

- $function\ \ Q = gs(A)$
- $[m, n] = size(A); Q(:, 1) = A(:, 1)\,/\,norm(A(:, 1));$
- $for\ \ i = 2 : n$
- $\quad top = 0;$
- $\quad for\ \ k = 1 : i - 1$
- $\quad\quad top = top + proj(A(:, i), Q(:, k));$
- $\quad end$
- $\quad uu = A(:, i) - top;$

- $function\ \ Q = gs(A)$
- $[m, n] = size(A); Q(:, 1) = A(:, 1)\,/\,norm(A(:, 1));$
- $for\ \ i = 2 : n$
- $\quad top = 0;$
- $\quad for\ \ k = 1 : i - 1$
- $\qquad top = top + proj(A(:, i), Q(:, k));$
- $\quad end$
- $\quad uu = A(:, i) - top;$
- $\quad Q(:, i) = uu\,/\,norm(uu);$

- $function\ \ Q = gs(A)$
- $[m, n] = size(A); Q(:, 1) = A(:, 1)/norm(A(:, 1));$
- $for\ \ i = 2 : n$
- $\quad top = 0;$
- $\quad for\ \ k = 1 : i - 1$
- $\qquad top = top + proj(A(:, i), Q(:, k));$
- $\quad end$
- $\quad uu = A(:, i) - top;$
- $\quad Q(:, i) = uu/norm(uu);$
- end

- $function\ \ Q = gs(A)$
- $[m, n] = size(A); Q(:, 1) = A(:, 1)/norm(A(:, 1));$
- $for\ \ i = 2 : n$
- $top = 0;$
- $for\ \ k = 1 : i - 1$
- $top = top + proj(A(:, i), Q(:, k));$
- end
- $uu = A(:, i) - top;$
- $Q(:, i) = uu/norm(uu);$
- end
- $function\ uv = proj(u, v)$

- $function\ \ Q = gs(A)$
- $[m, n] = size(A); Q(:, 1) = A(:, 1)/norm(A(:, 1));$
- $for\ \ i = 2 : n$
- $top = 0;$
- $for\ \ k = 1 : i - 1$
- $top = top + proj(A(:, i), Q(:, k));$
- end
- $uu = A(:, i) - top;$
- $Q(:, i) = uu/norm(uu);$
- end
- $function\ uv = proj(u, v)$
- $uv = (v' * u) * v;$

Klasik Gram-Schmidt ile QR ayrışımı

- $function\ [Q, R] = vqr(A)$

Klasik Gram-Schmidt ile QR ayrışımı

- $function\ [Q, R] = vqr(A)$
- $Q = gs(A); R = Q' * A;$

Klasik Gram-Schmidt ile QR ayrışım uygulaması

$>> A = rand(3,3)$

0.3922	0.7060	0.0462
0.6555	0.0318	0.0971
0.1712	0.2769	0.8235

$>> [q,r] = vqr(A)$

q=	0.5010	0.7851	-0.3640
	0.8373	-0.5461	-0.0253
	0.2187	0.2921	0.9310
r=	0.7828	0.4410	0.2845
	-0.0000	0.6179	0.2238
	0.0000	0.0000	0.7474

$>> q * r$

0.3922	0.7060	0.0462
0.6555	0.0318	0.0971
0.1712	0.2769	0.8235

Klasik ve modifiye Gram-Schmidt

- Aşağıdaki örneklerden göreceğimiz üzere klasik Gram-Schmidt yöntemi sayısal olarak kararlı değildir ve kabul edilemeyecek büyüklükte yuvarlama hatalarına neden olmaktadır.

Klasik ve modifiye Gram-Schmidt

- Aşağıdaki örneklerden göreceğimiz üzere klasik Gram-Schmidt yöntemi sayısal olarak kararlı değildir ve kabul edilemeyecek büyüklükte yuvarlama hatalarına neden olmaktadır.
- Bu durumda *Modifiye Gram-Schmidt yöntemi* kullanılır.

Klasik ve modifiye Gram-Schmidt

- Aşağıdaki örneklerden göreceğimiz üzere klasik Gram-Schmidt yöntemi sayısal olarak kararlı değildir ve kabul edilemeyecek büyüklükte yuvarlama hatalarına neden olmaktadır.
- Bu durumda *Modifiye Gram-Schmidt yöntemi* kullanılır.
- Modifiye yöntem ile klasik yöntem arasındaki fark şudur:

Klasik ve modifiye Gram-Schmidt

- Klasik yöntemde

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{q}_k^T \mathbf{a}_i \mathbf{q}_k$$

ile $\mathbf{a}_i$ vektöründen, bu vektörün $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_{i-1}\}$ ortonormal kümesi üzerindeki izdüşümü çıkarılarak, oluşan $\mathbf{v}_i$ vektöründen ortonormal kümenin $i-$inci elemanı olan

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{v}_i / ||\mathbf{v}_i||$$

ile elde edilmektedir.

Klasik ve modifiye Gram-Schmidt

- Klasik yöntemde

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{q}_k^T \mathbf{a}_i \mathbf{q}_k$$

  ile $\mathbf{a}_i$ vektöründen, bu vektörün $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_{i-1}\}$ ortonormal kümesi üzerindeki izdüşümü çıkarılarak, oluşan $\mathbf{v}_i$ vektöründen ortonormal kümenin $i-$inci elemanı olan

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{v}_i / ||\mathbf{v}_i||$$

  ile elde edilmektedir.

- Modifiye yöntemde ise $\mathbf{v}_i$ vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:

Klasik ve modifiye Gram-Schmidt

- Klasik yöntemde

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{q}_k^T \mathbf{a}_i \mathbf{q}_k$$

ile $\mathbf{a}_i$ vektöründen, bu vektörün $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_{i-1}\}$ ortonormal kümesi üzerindeki izdüşümü çıkarılarak, oluşan $\mathbf{v}_i$ vektöründen ortonormal kümenin $i-$inci elemanı olan

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{v}_i / ||\mathbf{v}_i||$$

ile elde edilmektedir.

- Modifiye yöntemde ise $\mathbf{v}_i$ vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:
    1. $a_i^{(1)} = \mathbf{a}_i - \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_i \mathbf{q}_1$

Klasik ve modifiye Gram-Schmidt

- Klasik yöntemde

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{q}_k^T \mathbf{a}_i \mathbf{q}_k$$

  ile $\mathbf{a}_i$ vektöründen, bu vektörün $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_{i-1}\}$ ortonormal kümesi üzerindeki izdüşümü çıkarılarak, oluşan $\mathbf{v}_i$ vektöründen ortonormal kümenin $i-$inci elemanı olan

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{v}_i / ||\mathbf{v}_i||$$

  ile elde edilmektedir.

- Modifiye yöntemde ise $\mathbf{v}_i$ vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:
  1. $a_i^{(1)} = \mathbf{a}_i - \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_i \mathbf{q}_1$
  2. $a_i^{(2)} = \mathbf{a}_i^{(1)} - \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_i^{(1)} \mathbf{q}_2$

Klasik ve modifiye Gram-Schmidt

- Klasik yöntemde

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{q}_k^T \mathbf{a}_i \mathbf{q}_k$$

  ile $\mathbf{a}_i$ vektöründen, bu vektörün $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_{i-1}\}$ ortonormal kümesi üzerindeki izdüşümü çıkarılarak, oluşan $\mathbf{v}_i$ vektöründen ortonormal kümenin $i-$inci elemanı olan

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{v}_i / ||\mathbf{v}_i||$$

  ile elde edilmektedir.

- Modifiye yöntemde ise $\mathbf{v}_i$ vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:

  1. $a_i^{(1)} = \mathbf{a}_i - \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_i \mathbf{q}_1$
  2. $a_i^{(2)} = \mathbf{a}_i^{(1)} - \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_i^{(1)} \mathbf{q}_2$
  3. $\vdots$

Klasik ve modifiye Gram-Schmidt

- Klasik yöntemde
$$\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{q}_k^T \mathbf{a}_i \mathbf{q}_k$$
ile $\mathbf{a}_i$ vektöründen, bu vektörün $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_{i-1}\}$ ortonormal kümesi üzerindeki izdüşümü çıkarılarak, oluşan $\mathbf{v}_i$ vektöründen ortonormal kümenin $i-$inci elemanı olan
$$\mathbf{q}_i = \mathbf{v}_i / ||\mathbf{v}_i||$$
ile elde edilmektedir.
- Modifiye yöntemde ise $\mathbf{v}_i$ vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:
    1. $a_i^{(1)} = \mathbf{a}_i - \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_i \mathbf{q}_1$
    2. $a_i^{(2)} = \mathbf{a}_i^{(1)} - \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_i^{(1)} \mathbf{q}_2$
    3. $\vdots$
    4. $a_i^{(i-1)} = \mathbf{a}_i^{(i-2)} - \mathbf{q}_{i-1}^T \mathbf{a}_i^{(i-1)} \mathbf{q}_{i-1}$, ve $\mathbf{v}_i = a_i^{(i-1)}$ olarak tanımlanır.

Vektör tabanlı **Modifiye Gram-Schmidt algoritması**

1. Girdi: A matrisi

Vektör tabanlı **Modifiye Gram-Schmidt algoritması**

1. Girdi: A matrisi
2. n: A matrisinin sütun sayısı

Vektör tabanlı **Modifiye Gram-Schmidt algoritması**

1. Girdi: A matrisi
2. n: A matrisinin sütun sayısı
3. $Q(:,1) = A(:,1)/norm(A(:,1))$

Vektör tabanlı **Modifiye Gram-Schmidt algoritması**

1. Girdi: A matrisi
2. n: A matrisinin sütun sayısı
3. $Q(:,1) = A(:,1) / norm(A(:,1))$
4. $i = 2, 3, ..., n$ $icin$

Vektör tabanlı **Modifiye Gram-Schmidt algoritması**

1. Girdi: A matrisi
2. n: A matrisinin sütun sayısı
3. $Q(:,1) = A(:,1) / norm(A(:,1))$
4. $i = 2, 3, ..., n$ *icin*
    1. $k = 1, 2, ..., i - 1$ *icin*

Vektör tabanlı **Modifiye Gram-Schmidt algoritması**

1. Girdi: A matrisi
2. n: A matrisinin sütun sayısı
3. $Q(:,1) = A(:,1)\,/\,norm(A(:,1))$
4. $i = 2, 3, ..., n$ $icin$
    1. $k = 1, 2, ..., i-1$ $icin$
        1. $A(:,i) = A(:,i) - proj(A(:,i), Q(:,k))$

Vektör tabanlı **Modifiye Gram-Schmidt algoritması**

1. Girdi: A matrisi
2. n: A matrisinin sütun sayısı
3. $Q(:,1) = A(:,1)\,/\,norm(A(:,1))$
4. $i = 2, 3, ..., n\ icin$
    1. $k = 1, 2, ..., i-1\ icin$
        1. $A(:,i) = A(:,i) - proj(A(:,i), Q(:,k))$
    2. $qq = A(:,i);$

Vektör tabanlı **Modifiye Gram-Schmidt algoritması**

1. Girdi: A matrisi
2. n: A matrisinin sütun sayısı
3. $Q(:,1) = A(:,1)\,/\,norm(A(:,1))$
4. $i = 2, 3, ..., n$ *icin*
    1. $k = 1, 2, ..., i-1$ *icin*
        1. $A(:,i) = A(:,i) - proj(A(:,i), Q(:,k))$
    2. $qq = A(:,i);$
    3. $Q(:,i) = qq\,/\,norm(qq);$

Vektör tabanlı **Modifiye Gram-Schmidt algoritması**

1. Girdi: A matrisi
2. n: A matrisinin sütun sayısı
3. $Q(:,1) = A(:,1)\,/\,norm(A(:,1))$
4. $i = 2, 3, ..., n$ $icin$
    1. $k = 1, 2, ..., i-1$ $icin$
        1. $A(:,i) = A(:,i) - proj(A(:,i), Q(:,k))$
    2. $qq = A(:,i);$
    3. $Q(:,i) = qq\,/\,norm(qq);$
5. çıktı: Ortogonal Q matrisi

Modifiye Gram-Schmidt ile Q matrisi

1. $function\ Q = modgs(A)$

Modifiye Gram-Schmidt ile Q matrisi

1. $function\ Q = modgs(A)$
2. $n = size(A, 2); Q(:, 1) = A(:, 1) / norm(A(:, 1));$

Modifiye Gram-Schmidt ile Q matrisi

1. $function\ \ Q = modgs(A)$
2. $n = size(A, 2); Q(:, 1) = A(:, 1)/norm(A(:, 1));$
3. $for\ \ i = 2 : n$

Modifiye Gram-Schmidt ile Q matrisi

1. $function\ \ Q = modgs(A)$
2. $n = size(A,2);\ Q(:,1) = A(:,1)/norm(A(:,1));$
3. $for\ \ i = 2:n$
4. $\quad im = i - 1;$

Modifiye Gram-Schmidt ile Q matrisi

1. $function \ \ Q = modgs(A)$
2. $n = size(A, 2); Q(:, 1) = A(:, 1) / norm(A(:, 1));$
3. $for \ \ i = 2 : n$
4. $\quad im = i - 1;$
5. $\quad for \ \ k = 1 : im$

Modifiye Gram-Schmidt ile Q matrisi

1. $function\ \ Q = modgs(A)$
2. $n = size(A,2); Q(:,1) = A(:,1)/norm(A(:,1));$
3. $for\ \ i = 2 : n$
4. $\quad im = i - 1;$
5. $\quad for\ \ k = 1 : im$
6. $\qquad A(:,i) = A(:,i) - proj(A(:,i), Q(:,k));$

Modifiye Gram-Schmidt ile Q matrisi

```
function Q = modgs(A)
n = size(A, 2); Q(:, 1) = A(:, 1) / norm(A(:, 1));
for i = 2 : n
  im = i − 1;
  for k = 1 : im
      A(:, i) = A(:, i) − proj(A(:, i), Q(:, k));
  end
```

Modifiye Gram-Schmidt ile Q matrisi

```
function Q = modgs(A)
n = size(A, 2); Q(:, 1) = A(:, 1) / norm(A(:, 1));
for i = 2 : n
  im = i − 1;
  for k = 1 : im
      A(:, i) = A(:, i) − proj(A(:, i), Q(:, k));
  end
  qq = A(:, i); Q(:, i) = qq / norm(qq);
```

Modifiye Gram-Schmidt ile Q matrisi

```
function Q = modgs(A)
n = size(A,2); Q(:,1) = A(:,1)/norm(A(:,1));
for i = 2 : n
  im = i - 1;
  for k = 1 : im
      A(:,i) = A(:,i) - proj(A(:,i), Q(:,k));
  end
  qq = A(:,i); Q(:,i) = qq/norm(qq);
end
```

Modifiye Gram-Schmidt ile Q matrisi

```
function Q = modgs(A)
n = size(A,2); Q(:,1) = A(:,1)/norm(A(:,1));
for i = 2 : n
  im = i - 1;
  for k = 1 : im
      A(:,i) = A(:,i) - proj(A(:,i), Q(:,k));
  end
  qq = A(:,i); Q(:,i) = qq/norm(qq);
end
function uv = proj(u, v)
```

Modifiye Gram-Schmidt ile Q matrisi

```
function Q = modgs(A)
n = size(A, 2); Q(:, 1) = A(:, 1)/norm(A(:, 1));
for i = 2 : n
  im = i − 1;
  for k = 1 : im
      A(:, i) = A(:, i) − proj(A(:, i), Q(:, k));
  end
  qq = A(:, i); Q(:, i) = qq/norm(qq);
end
function uv = proj(u, v)
uv = (v′ ∗ u) ∗ v;
```

Modifiye ve Klasik Gram-Schmidt ile Q

- Modifiye Gram-Schmidt yöntemi her adımda oluşabilecek yuvarlama hatalarını dikkate alarak ortonormal kümeyi inşa ederken, klasik yöntem ise teorik ortonormal kümeyi inşa eder.

Modifiye ve Klasik Gram-Schmidt ile Q

- Modifiye Gram-Schmidt yöntemi her adımda oluşabilecek yuvarlama hatalarını dikkate alarak ortonormal kümeyi inşa ederken, klasik yöntem ise teorik ortonormal kümeyi inşa eder.
- Şuphesiz teorik olarak iki formülasyon birbirine denktir, ancak klasik yöntemle elde edilen ortonormal küme pratikte ortonormal olmayabilir.

Modifiye ve Klasik Gram-Schmidt ile Q

- Modifiye Gram-Schmidt yöntemi her adımda oluşabilecek yuvarlama hatalarını dikkate alarak ortonormal kümeyi inşa ederken, klasik yöntem ise teorik ortonormal kümeyi inşa eder.
- Şuphesiz teorik olarak iki formülasyon birbirine denktir, ancak klasik yöntemle elde edilen ortonormal küme pratikte ortonormal olmayabilir.
- Bu durumu sütunları "lineer bağımlı olmaya yatkın" Hilbert matrisi üzerinde inceleyelim:

Örnek 2.

$H_{n\times n}$ Hilbert matrisinin(örneğin $n = 7$ için) sütunlarını Gram-Schmidt ve modifiye Gram-Schmidt yöntemiyle ortonormalleştirerek, her iki yöntemle elde edilen ortogonal matrisin pratik olarak ortogonal olup olmadığını kontrol ediniz.

Öncelikle 7×7 lik Hilbert matrisini MATLAB/Octave ortamında üretelim.
$>>$ H=hilb(7)

$$H = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 \\ 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 \\ 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 & 0.1111 \\ 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 & 0.1111 & 0.1000 \\ 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 & 0.1111 & 0.1000 & 0.0909 \\ 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 & 0.1111 & 0.1000 & 0.0909 & 0.0833 \\ 0.1429 & 0.1250 & 0.1111 & 0.1000 & 0.0909 & 0.0833 & 0.0769 \end{bmatrix}$$

Modifiye ve Klasik Gram-Schmidt ile Q

Daha sonra geliştirdiğimiz **gs** isimli program ile klasik Gram-Schmidt yardımıyla Q yu hesaplayalim:

>> Q=gs(H)

$$\begin{bmatrix} 0.8133 & -0.5438 & 0.1991 & -0.0551 & 0.0120 & -0.0020 & -0.0001 \\ 0.4067 & 0.3033 & -0.6886 & 0.4760 & -0.1974 & 0.0541 & -0.0008 \\ 0.2711 & 0.3939 & -0.2071 & -0.4901 & 0.6108 & -0.3269 & 0.0396 \\ 0.2033 & 0.3817 & 0.1124 & -0.4396 & -0.2542 & 0.6410 & -0.2588 \\ 0.1627 & 0.3514 & 0.2915 & -0.1123 & -0.4992 & -0.2022 & 0.6394 \\ 0.1356 & 0.3202 & 0.3892 & 0.2309 & -0.1506 & -0.5418 & -0.6757 \\ 0.1162 & 0.2921 & 0.4407 & 0.5206 & 0.5013 & 0.3805 & 0.2571 \end{bmatrix}$$

Klasik Gram-Schmidt ile Q

Şimdi de $Q^T Q$ yu hesaplayalım:

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & \mathbf{0.0016} \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & \mathbf{0.1557} \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \mathbf{0.0016} & \mathbf{0.1557} & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü üzere elde edilen matrisin sağ alt $3x3$ lük bloku birim matris değildir.

Modifiye Gram-Schmidt ile Qm

Şimdi de Modifiye Gram-Schmidt yöntemini uygulayan *modgs* programımız ile ortogonal matrisi elde edelim ve Q_m olarak adlandıralım:

$>>$ Qm=modgs(H)

$$\begin{bmatrix} 0.8133 & -0.5438 & 0.1991 & -0.0551 & 0.0120 & -0.0020 & 0.0002 \\ 0.4067 & 0.3033 & -0.6886 & 0.4760 & -0.1974 & 0.0541 & -0.0091 \\ 0.2711 & 0.3939 & -0.2071 & -0.4901 & 0.6108 & -0.3269 & 0.0907 \\ 0.2033 & 0.3817 & 0.1124 & -0.4396 & -0.2542 & 0.6410 & -0.3626 \\ 0.1627 & 0.3514 & 0.2915 & -0.1123 & -0.4992 & -0.2022 & 0.6800 \\ 0.1356 & 0.3202 & 0.3892 & 0.2309 & -0.1506 & -0.5418 & -0.5984 \\ 0.1162 & 0.2921 & 0.4407 & 0.5206 & 0.5013 & 0.3805 & 0.1995 \end{bmatrix}$$

Modifiye Gram-Schmidt ile Qm

Şimdi de $Q_m^T Q_m$ i hesaplayalım:

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü üzere elde edilen matris birim matristir[1]. O halde modifiye Gram-Schmidt yöntemi klasik Gram-Schmidt yöntemine göre daha hassastır.

[1]Octave ortamında $Q_m' * Q_m(3,3)$ =0.99990 olarak elde edilmektedir.

QR ayrışımı yöntemi yardımıyla $Ax = b$ sisteminin çözümü:

- QR ayrışımı için MATLAB/Octave yazılımları veya LAPACK isimli sayısal Lineer Cebir Paket yazılımında mevcut uygun fonksiyonları kullanmaktadırlar. Profesyonel işlemler için LAPACK tercih edilmelidir.
  Sütunları lineer bağımsız olan $A_{m\times n}$ matrisi ve bu matrisi katsayı matrisi kabul eden
  $$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$
  sistemi verilmiş olsun.Yukarıda incelendiği üzere $Q_{m\times m}$ ortogonal ve $R_{n\times n}$ üst üçgensel matrisi yardımıyla
  $$A = QR \tag{2}$$
  biçiminde yazalım.

QR ayrışımı yöntemi yardımıyla $Ax = b$ sisteminin çözümü

- Bu durumda (1) sistemi
$$QR\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3}$$
olarak ifade edilir ve ortogonal matrisin $Q^T = Q^{-1}$ özelliği yardımıyla (3) nin her iki yanını Q^T ile çarpmak suretiyle
$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b} \tag{4}$$
üst üçgensel sistemini elde ederiz, burada R tersinir bir matristir.

QR ayrışımı yöntemi yardımıyla $Ax = b$ sisteminin çözümü

- Bu durumda (1) sistemi
$$QR\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3}$$
olarak ifade edilir ve ortogonal matrisin $Q^T = Q^{-1}$ özelliği yardımıyla (3) nin her iki yanını Q^T ile çarpmak suretiyle
$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b} \tag{4}$$
üst üçgensel sistemini elde ederiz, burada R tersinir bir matristir.
- Dolayısıyla (1) sisteminin çözümü (4) üst üçgensel sisteminin çözümüne indirgenmiş olur .

QR ayrışımı yöntemi yardımıyla $Ax = b$ sisteminin çözümü

- Bu durumda (1) sistemi
$$QR\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3}$$
olarak ifade edilir ve ortogonal matrisin $Q^T = Q^{-1}$ özelliği yardımıyla (3) nin her iki yanını Q^T ile çarpmak suretiyle
$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b} \tag{4}$$
üst üçgensel sistemini elde ederiz, burada R tersinir bir matristir.
- Dolayısıyla (1) sisteminin çözümü (4) üst üçgensel sisteminin çözümüne indirgenmiş olur .
- (2) deki Q matrisi, A nın lineer bağımsız sütunlarının Gram-Schmidt yöntemi yardımıyla ortogonalleştirilmesi ile elde edilen vektörleri sütun kabul eden matristir. Öteyandan $R = Q^T A$ olduğu açıktır.

QR ayrışımı ile $Ax = b$ sisteminin çözümü

Örnek 3.

$A = [1\ 2; 1\ 1; 1\ 3]$ *matrisi ve* $b = [3\ 0\ 3]^T$ *verilsin.*

- $Ax = b$ *denklem sisteminin çözümünün olmadığını gösteriniz.*
- $||Ax - b||$ *normunu minimum yapan* $x = [x, y, z]^T$ *noktasını belirleyiniz.*
- $A^T Ax = A^T b$ *sisteminin çözümünü belirleyiniz.*
- $Rx = Q^T b$ *sisteminin çözümünü belirleyiniz.*
- *MATLAB/Octave ortamında '\' operatörü ile çözüm için yaklaşım belirleyiniz.*
- *Son dört şıkta elde ettiğiniz* x *değerlerini karşılaştırınız. Ne gözlemliyorsunuz?*

QR ayrışımı ile $Ax = b$ sisteminin çözümü

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini açıkça yazarak

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ -x + y &= 0 \\ x + 3y &= 3 \end{aligned}$$

  elde ederiz. İlk iki denklemden $x = y = 1$ elde ederiz, ancak bu değerler üçüncü denklemi sağlamaz.
- $f(\mathbf{x}) = ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||^2$ ile tanımlanan f fonksiyonunu minimum yapan $\mathbf{x}$ noktası $||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||$ yi de minimum yapar. O halde

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 3)^2 + (-x + y)^2 + (x + 3y - 3)^2$$

  fonksiyonunu minimum yapan $\mathbf{x} = (x, y, z)$ noktasını belirlemeliyiz. Minimum nokta için gerek şartları

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2(x + 2y - 3) + 2(-x + y)(-1) + 2(x + 3y - 3) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2(x + 2y - 3)(2) + 2(-x + y) + 2(x + 3y - 3)(3) = 0 \end{aligned}$$

- veya

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 6 \\ 4x + 14y &= 15 \end{aligned} \tag{5}$$

olarak elde ederiz. (5) sistemini çözerek,

$$x = \frac{12}{13} = 0.9231, y = \frac{21}{26} = 0.8077$$

elde ederiz. Ayrıca bu noktada

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 28$$

olup,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$$

ve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 6 \times 28 - 64 = 104 > 0$$

QR ayrışımı ile $Ax = b$ sisteminin çözümü

- Öte yandan

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}, A^T b = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

olup,

$$A^T A\mathbf{x} = A^T b$$

denklem sistemi ile (5) aynıdır, ve dolayısıyla da aynı **x** çözümüne sahiptirler.

QR ayrışımı ile $Ax = b$ sisteminin çözümü

- Son olarak

$$Q^T b = \begin{bmatrix} 0.57735 & -0.57735 & 0.57735 \\ 0.22646 & 0.79259 & 0.56614 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4641 \\ 2.3778 \end{bmatrix}$$

ve

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{2}{39}\sqrt{3}\sqrt{26} \\ 0 & \frac{1}{26}\sqrt{3}\sqrt{26} \end{bmatrix}$$

olup $R\mathbf{x} = Q^T b$ den

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= R^{-1}(Q^T b) \\ &= \begin{bmatrix} 0.92307 \\ 0.80770 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde ederiz.

QR ayrışımı ile $Ax = b$ sisteminin çözüm

- MATLAB/Octave oratmında ise
  >> x=A\b
  x =
  0.92308
  0.80769
  çözümünü elde ederiz.

QR ayrışımı ile $Ax = b$ sisteminin çözüm

- MATLAB/Octave oratmında ise
  $>>$ x=A\b
  x =
  0.92308
  0.80769
  çözümünü elde ederiz.
- Her dört yöntemle de elde edilen sonuçlar yuvarlama hatası farkıyla aynıdır.

$Ax = b$ sisteminin Klasik veya Modifiye QR ayrışımı yardımıyla çözüm kodu

- $function\ X = qrilecoz(A, b)$

$Ax = b$ sisteminin Klasik veya Modifiye QR ayrışımı yardımıyla çözüm kodu

- $function\ X = qrilecoz(A, b)$
- $Q = gs(A)$;veya $Q = modgs(A)$;

$Ax = b$ sisteminin Klasik veya Modifiye QR ayrışımı yardımıyla çözüm kodu

- $function\ X = qrilecoz(A, b)$
- $Q = gs(A)$;veya $Q = modgs(A)$;
- $R = Q' * A; C = Q' * b;$

$Ax = b$ sisteminin Klasik veya Modifiye QR ayrışımı yardımıyla çözüm kodu

- $function\ X = qrilecoz(A, b)$
- $Q = gs(A)$;veya $Q = modgs(A)$;
- $R = Q' * A$; $C = Q' * b$;
- $X = ustucgen(R, C)$;

$Ax = b$ sisteminin Klasik veya Modifiye QR ayrışım uygulaması

$>> A = [1\ 2; -1\ 1; 1\ 3];$
$>> b = [3; 0; 3];$
$>> x = qrilecoz(A, b)$
x =
0.92308
0.80769

$Ax = b$ sisteminin Klasik veya Modifiye QR ayrışım uygulaması

Sonuç

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||^2 \\ &= (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T A^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \end{aligned}$$

fonksiyonunun minimum yapan çözüm ile

$$A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$

denklem sistemi ve ayrıca

$$QR\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

denklem sisteminin çözümleri aynıdır.

Teorem 1.

[9]A matrisi sütunları lineer bağımsız olan bir matris, A_{mxn}, $\mathbf{b}_{mx1}$, $\mathbf{x}_{nx1}$ ve $m > n$ olmak üzere, $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ sisteminin çözümü

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||^2 \\ &= (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{x}^T A^T - \mathbf{b}^T)(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T A^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

fonksiyonunu minimum yapan çözümdür ve bu çözüm $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin Standart En Küçük Kareler Yöntemi(SEKKY) çözümü olarak adlandırılır.

İspat $\mathbf{x}$, $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ sisteminin çözümü olsun. $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ için

$$
\begin{aligned}
& f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \\
= \;& \mathbf{y}^T A^T A\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T A^T\mathbf{b} + \mathbf{b}^T\mathbf{b} - (\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T A^T\mathbf{b} + \mathbf{b}^T\mathbf{b}) \\
= \;& \mathbf{y}^T A^T A\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T A^T\mathbf{b} - \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T A^T\mathbf{b} \\
= \;& \mathbf{y}^T A^T A\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T A^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} \\
= \;& (\mathbf{y} - \mathbf{x})^T A^T A(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\
> \;& 0
\end{aligned}
$$

dır, çünkü $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x} \neq 0$ için, A nın sütunları lineer bağımsız olduğundan $A\mathbf{z} \neq 0$ dır ve

$$\mathbf{z}^T A^T A\mathbf{z} = (A\mathbf{z})^T A\mathbf{z} = ||A\mathbf{z}||_2^2 > 0$$

elde ederiz.

Teorem 2.

$A_{m\times n}$, sütunları lineer bağımsız olan bir matris ve $\mathbf{b}_{m\times 1}$ vektör olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin en küçük kareler anlamındaki çözümü ile QR ayrışımı yardımıyla elde edilen çözümler aynıdır.

İspat $\mathbf{x}$, verilen sistemin en küçük kareler çözümü ve $A = QR$ ayrışımına sahip olsun. Bu taktirde

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

eşitliğinden

$$(QR)^T QR\mathbf{x} = (QR)^T\mathbf{b}$$

veya

$$R^T R\mathbf{x} = R^T Q^T b$$

veya R tersinir olduğundan $R\mathbf{x} = Q^T b$ elde ederiz ki bu çözüm yukarıda incelendiği üzere QR ayrışımı yardımıyla elde edilen çözümdür.

QR ayrışımı ve $Ax = b$

Uyarı 1.

QR ayrışımı, LU ayrışımına kıyasla daha fazla aritmetik işlem gerektirir(Alıştırma 19).

Gözlem 1.

$A_{m\times n}(m \geq n)$ matrisinin sütunları belirgin olarak lineer bağımsız ise bu taktirde $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin çözümü için en küçük kareler yöntemi yardımıyla çözüm tercih edilirken, sütunların lineer bağımlı olmaya yakın olması durumda QR ayrışımı yardımıyla çözüm tercih edilir.

Hatırlatma 1.

$A_{m\times n}$ matrisiyle aynı boyutta olan $Q_{m\times n}$ matrisi ve $R_{n\times n}$ üst üçgensel matrisi için QR ayrışımı MATLAB/Octave ortamında aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$>> A = [1\ 2; -1\ 1; 1\ 3]$
için
$>> [q, r] = qr(A, 0)$
komutuyla
q =

-0.5774	-0.2265
0.5774	-0.7926
-0.5774	-0.5661

r =

-1.7321	-2.3094
0	-2.9439

Alternatif QR ayrışımı

Bir diğer alternatif ise

$$A_{m\times n} = Q_{m\times m} R_{m\times n}$$

olarak tanımlanan ve Q nun kare matris olduğu tam(full) ayrışımdır:

$>> [q, r] = qr(A)$

q =

-0.57735 -0.22646 -0.78446

0.57735 -0.79259 -0.19612

-0.57735 -0.56614 0.58835

r =

-1.73205 -2.30940

0.00000 -2.94392

0.00000 0.00000

Alternatif QR ayrışımı

- Tam ayrışım için Householder dönüşümleri[8] gibi ileri düzey dönüşümler kullanılır.

Alternatif QR ayrışımı

- Tam ayrışım için Householder dönüşümleri[8] gibi ileri düzey dönüşümler kullanılır.
- QR ayrışım yardımıyla çözüm için gerekli işlem sayısını proje olarak okuyucuya bırakıyoruz.

Alternatif QR ayrışımı

- Tam ayrışım için Householder dönüşümleri[8] gibi ileri düzey dönüşümler kullanılır.
- QR ayrışım yardımıyla çözüm için gerekli işlem sayısını proje olarak okuyucuya bırakıyoruz.
- QR ayrışımı $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin çözümünden ziyade verilen bir A matrisinin özdeğerlerinin belirlenmesinde kullanılır.

Alıştırmalar

Aşağıdaki sorular için

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7.00000000001 & 8.999999999999 \end{bmatrix}$$

matrisini kullanınız.

Alıştırmalar

1 **gs** fonksiyon programı yardımıyla A nın ortogonalleştirilmesiyle oluşturulan Q matrisini ve $Q^T Q$ yu hesaplayınız.

Alıştırmalar

1 **gs** fonksiyon programı yardımıyla A nın ortogonalleştirilmesiyle oluşturulan Q matrisini ve $Q^T Q$ yu hesaplayınız.

2 **gsmod** fonksiyon programı yardımıyla A nın ortogonalleştirilmesiyle oluşturulan Qm matrisini ve $Qm^T Qm$ i hesaplayınız.

Alıştırmalar

1. **gs** fonksiyon programı yardımıyla A nın ortogonalleştirilmesiyle oluşturulan Q matrisini ve $Q^T Q$ yu hesaplayınız.
2. **gsmod** fonksiyon programı yardımıyla A nın ortogonalleştirilmesiyle oluşturulan Qm matrisini ve $Qm^T Qm$ i hesaplayınız.
3. MATLAB/Octave **qr** fonksiyonu yardımıyla $[\mathbf{q}, \mathbf{r}] = \mathbf{qr}(\mathbf{A})$ komutu ile q matrisini ve $q^T q$ yu hesaplayınız. Hangi yöntemle elde ettiğini matris ortogonal, yani tranposu ile kendisinin çarpımı birim matrise eşittir?

Alıştırmalar

4 Yukarıda tanımlanan A matrisinin determinantını hesaplayınız. Determinantın mutlak değerce çok küçük olması ne ifade etmektedir?

Alıştırmalar

4 Yukarıda tanımlanan A matrisinin determinantını hesaplayınız. Determinantın mutlak değerce çok küçük olması ne ifade etmektedir?

5 A matrisinin 1 ve 2. satırlarının toplamının, üçüncü satıra çok yakın olduğunu gözlemleyiniz. Bu durumda matrisin satırlarının lineer bağımlılığı veya bağımsızlığı hakkında ne düşünürsünüz?

Alıştırmalar

4 Yukarıda tanımlanan A matrisinin determinantını hesaplayınız. Determinantın mutlak değerce çok küçük olması ne ifade etmektedir?

5 A matrisinin 1 ve 2. satırlarının toplamının, üçüncü satıra çok yakın olduğunu gözlemleyiniz. Bu durumda matrisin satırlarının lineer bağımlılığı veya bağımsızlığı hakkında ne düşünürsünüz?

6 Bir A matrisinin *kondisyon sayısı(condition number)* $K(A) = ||A||.||A^{-1}||$ olarak tanımlanır. Sonsuz normu ile yukarıda verilen A matrisinin kondisyon sayısı hesaplayınız. Kondisyon sayısının ne ifade ettiğini araştırınız ?

7 Yukarıda verilen A matrisinin özdeğerlerini MATLAB/Octave eig komutu yardımıyla hesaplayınız. Mutlak değerce en büyük özdeğerin en küçük özdeğere oranı nedir?

Alıştırmalar

7 Yukarıda verilen A matrisinin özdeğerlerini MATLAB/Octave eig komutu yardımıyla hesaplayınız. Mutlak değerce en büyük özdeğerin en küçük özdeğere oranı nedir?

8 $\mathbf{x} = [1\ 1\ 1]^T$ için

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6.000000000000000 \\ 15.000000000000000 \\ 21.000000000009003 \end{bmatrix}$$

olduğunu gözlemleyerek, $\mathbf{x}$ in bilinmediği varsayımıyla $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini

- pivotsuz Gauss yok etme programı,
- kısmi pivotlu Gauss yok etme programı,
- LU ayrışım yöntemi,
- QR ayrışım yöntemi ve
- En Küçük Kareler Yöntemi yardımıyla çözünüz. Hangi yöntemle elde ettiğiniz sonuç problemin gerçek çözümüne daha yakındır.

9 (Proje) $A_{m\times n}$ matrisinin Gram-Schmidt yöntemiyle QR ayrışımı için gerekli çarpma işlem sayısını belirleyiniz ve elde ettiğiniz sonucu LU ayrışımı için gerekli çarpma işlem sayısıyla karşılaştırınız. Hangi ayrışım yöntemi daha fazla işlem gerektirmektedir?

- pivotsuz Gauss yok etme programı,
- kısmi pivotlu Gauss yok etme programı,
- LU ayrışım yöntemi,
- QR ayrışım yöntemi ve
- En Küçük Kareler Yöntemi yardımıyla çözünüz. Hangi yöntemle elde ettiğiniz sonuç problemin gerçek çözümüne daha yakındır.

9 (Proje) $A_{m\times n}$ matrisinin Gram-Schmidt yöntemiyle QR ayrışımı için gerekli çarpma işlem sayısını belirleyiniz ve elde ettiğiniz sonucu LU ayrışımı için gerekli çarpma işlem sayısıyla karşılaştırınız. Hangi ayrışım yöntemi daha fazla işlem gerektirmektedir?

10 (Proje) Householder dönüşümlerini araştırarak, bu dönüşümler yardımıyla A matrisinin tam QR ayrışımının nasıl elde edildiğini inceleyiniz.

Kaynaklar

- Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1988.
- Coşkun, E. MATLAB/Octave ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:erhancoskun.com.tr).
- Hildebrand, F. B., Introduction to Numerical Analysis, Dover Publications, Inc., 1987.
- Kincaid, D., Cheney, W., Numerical Analysis, Brooks/Cole, 1991.
- LAPACK, Linear Algebra Package,(URL:netlib.org)
- OCTAVE, GNU özgür yazılım(*URL:OCTAVE.sourceforge.net*).
- Press, H. W. ve ark., Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, 1988.
- Stoer, J., Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1976.