Sayısal integrasyon(Basit ve bileşik yöntemler)

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Eylül 2020

Sayısal integrasyon

Bu çalışma "MATLAB/Octave Uygulamalarıyla Sayısal Analize Giriş" isimli çalışmamızın sekizinci bölümünü oluşturmaktadır. Konuyla ilgili ileri düzey araştırma için bölüm sonunda sunduğumuz değerli kaynakları öneririz.

Bu bölümde

- temel sayısal integrasyon yöntemlerini özetleyerek,

Sayısal integrasyon:Basit yöntemler

Bu bölümde

- temel sayısal integrasyon yöntemlerini özetleyerek,
- hata analizlerini gerçekleştiriyor ve

Bu bölümde

- temel sayısal integrasyon yöntemlerini özetleyerek,
- hata analizlerini gerçekleştiriyor ve
- MATLAB/Octave ortamında uygulama sonuçlarını tartışıyoruz.

Sayısal integrasyon:Basit yöntemler

- $$\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$$

  integralini kısmi integrasyon yardımıyla kolayca hesaplayabiliriz, ancak kısmi integrasyon veya başka bir yöntem yardımıyla

  $$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

  integralini hesaplayamayız.

- $$\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$$

  integralini kısmi integrasyon yardımıyla kolayca hesaplayabiliriz, ancak kısmi integrasyon veya başka bir yöntem yardımıyla

  $$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

  integralini hesaplayamayız.
- Bu örneği çoğaltmak mümkündür: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ve belirsiz integrali F olan bir fonksiyon ve g de türevlenebilir bir fonksiyon ise,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

- $$\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$$
  integralini kısmi integrasyon yardımıyla kolayca hesaplayabiliriz, ancak kısmi integrasyon veya başka bir yöntem yardımıyla
  $$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$
  integralini hesaplayamayız.
- Bu örneği çoğaltmak mümkündür: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ve belirsiz integrali F olan bir fonksiyon ve g de türevlenebilir bir fonksiyon ise,
  $$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

Sayısal integrasyon:Basit yöntemler

- Örneğin f nin trigonometrik, logaritmik veya üstel bir fonksiyon ve g nin ise derecesi birden büyük bir polinom olması, yani $g(x) = p_n(x)$, $n = 2, 3, ...$, durumlarını gözönüne alalım:

$$\int_a^b \sin(p_n(x))dx, \int_a^b \log(p_n(x))dx, \int_a^b e^{p_n(x)}dx, ...$$

Sayısal integrasyon:Basit yöntemler

- Örneğin f nin trigonometrik, logaritmik veya üstel bir fonksiyon ve g nin ise derecesi birden büyük bir polinom olması, yani $g(x) = p_n(x)$, $n = 2, 3, \ldots$, durumlarını gözönüne alalım:

$$\int_a^b \sin(p_n(x))dx, \int_a^b \log(p_n(x))dx, \int_a^b e^{p_n(x)}dx, \ldots$$

- Yukarıda belirtilen türdeki integrallere sayısal yöntemler yardımıyla uygun yaklaşımlar bulunması gerekir. Bu amaçla öncelikle $[a, b]$ aralığına doğrudan uygulanan ve **basit yöntemler** adı verilen yöntemleri inceleyelim.

- Öncelikle *integraller için Ortalama Değer Teoremini(ODT)* hatırlayalım:

- Öncelikle *integraller için Ortalama Değer Teoremini(ODT)* hatırlayalım:

Teorem 1.

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise

$$\int_a^b f(x)dx = f(\chi)(b-a)$$

sağlanacak biçimde $\chi \in (a, b)$ noktası mevcuttur.

- Öncelikle *integraller için Ortalama Değer Teoremini(ODT)* hatırlayalım:

Teorem 1.

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise

$$\int_a^b f(x)dx = f(\chi)(b-a)$$

sağlanacak biçimde $\chi \in (a, b)$ noktası mevcuttur.

- Burada $f(\chi)$, f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değeri olarak tanımlanır ve bu nedenle Teorem *İntegraller için Ortalama Değer Teoremi* olarak adlandırılır.

- Ancak Teorem 1 de belirtilen χ değerinin ne olduğu genel olarak bilinmemektedir.

Sayısal integrasyon:Basit yöntemler

- Ancak Teorem 1 de belirtilen χ değerinin ne olduğu genel olarak bilinmemektedir.
- Farklı sayısal yaklaşım yöntemleri $f(\chi)$ için farklı yaklaşımlar yapmak suretiyle verilen integral değerini yaklaşık olarak elde etmektedirler.

- Ancak Teorem 1 de belirtilen χ değerinin ne olduğu genel olarak bilinmemektedir.
- Farklı sayısal yaklaşım yöntemleri $f(\chi)$ için farklı yaklaşımlar yapmak suretiyle verilen integral değerini yaklaşık olarak elde etmektedirler.
- Tablo 1 de sol ve sağ dikdörtgen kuralı ile orta nokta ve yamuk yaklaşım kurallarının verilmektedir.

Sayısal integrasyon:Basit yöntemler

- Ancak Teorem 1 de belirtilen χ değerinin ne olduğu genel olarak bilinmemektedir.
- Farklı sayısal yaklaşım yöntemleri $f(\chi)$ için farklı yaklaşımlar yapmak suretiyle verilen integral değerini yaklaşık olarak elde etmektedirler.
- Tablo 1 de sol ve sağ dikdörtgen kuralı ile orta nokta ve yamuk yaklaşım kurallarının verilmektedir.
- Sol sütunda $f(\chi)$ için uygun yaklaşım değeri yer almakta, orta sütunda ise ilgili seçime karşılık gelen sayısal yöntem ifade edilmektedir.

Sayısal integrasyon:Basit yöntemler

$f(\chi)$	Kural	isim
$\cong f(a)$	$I_{sol}(f) = f(a)(b-a)$	Sol dikdörtgen
$\cong f(b)$	$I_{sağ}(f) = f(b)(b-a)$	Sağ dikdörtgen
$\cong f(\frac{a+b}{2})$	$I_{ort}(f) = f(\frac{a+b}{2})(b-a)$	Orta nokta
$\cong \frac{f(a)+f(b)}{2}$	$I_Y(f) = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$	Yamuk

Table: Bazı basit yöntemler

Örnek 1.

$$\int_0^1 e^x dx = 1.7183$$

integrali için sol ve sağ dikdörtgen kuralı ile orta nokta ve yamuk kuralı yaklaşımlarını hesaplayınız.

- Sırasıyla her bir yaklaşımı elde edelim:

- Sırasıyla her bir yaklaşımı elde edelim:
- $$\begin{aligned} I_{sol}(f) &= f(a)(b-a) \\ &= f(0) \times 1 = 1 \end{aligned}$$

- Sırasıyla her bir yaklaşımı elde edelim:
- $$\begin{aligned} I_{sol}(f) &= f(a)(b-a) \\ &= f(0) \times 1 = 1 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} I_{sag}(f) &= f(b)(b-a) \\ &= f(1) \times 1 \\ &= e \doteq 2.7183 \end{aligned}$$

Sayısal integrasyon:Basit yöntemler

$$
\begin{aligned}
I_{ort}(f) &= f((a+b)/2)(b-a) \\
&= f(1/2) \times 1 \\
&= e^{1/2} \doteq 1.6487
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_Y(f) &= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \\
&= \frac{f(0)+f(1)}{2}(1-0) \\
&= (1+e)/2 \doteq 1.8591
\end{aligned}
$$

- Gerçek sonucun $e - 1 \doteq 1.7183$ olduğu dikkate alındığında her bir yaklaşımın hatalı sonuçlar içerdiği görülmektedir.
  Teorem 1 yardımıyla yukarıda gözönüne aldığımız sayısal integral yaklaşımlarını farklı bir açıdan daha değerlendirmek mümkündür:

- Gerçek sonucun $e - 1 \doteq 1.7183$ olduğu dikkate alındığında her bir yaklaşımın hatalı sonuçlar içerdiği görülmektedir.
  Teorem 1 yardımıyla yukarıda gözönüne aldığımız sayısal integral yaklaşımlarını farklı bir açıdan daha değerlendirmek mümkündür:
- $[a, b]$ aralığında f fonksiyonuna sırasıyla aşağıda belirtilen sıfırıncı dereceden polinomlarla yaklaşıldığını kabul edelim:

Sayısal integrasyon:Basit yöntemler

- $P_0(x) \equiv f(a)$,

- $P_0(x) \equiv f(a)$,
- $P_0(x) \equiv f(b)$ ve

Sayısal integrasyon:Basit yöntemler

- $P_0(x) \equiv f(a)$,
- $P_0(x) \equiv f(b)$ ve
- $P_0(x) \equiv f((a+b)/2)$

Sayısal integrasyon:Basit yöntemler

- $P_0(x) \equiv f(a)$,
- $P_0(x) \equiv f(b)$ ve
- $P_0(x) \equiv f((a+b)/2)$

- Birinci yaklaşım sonucunda

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_0(x)dx = f(a)(b-a),$$

Sayısal integrasyon:Basit yöntemler

- $P_0(x) \equiv f(a)$,
- $P_0(x) \equiv f(b)$ ve
- $P_0(x) \equiv f((a+b)/2)$

- Birinci yaklaşım sonucunda

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_0(x)dx = f(a)(b-a),$$

- ikinci yaklaşım sonucunda

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_0(x)dx = f(b)(b-a)$$

ve

- $P_0(x) \equiv f(a)$,
- $P_0(x) \equiv f(b)$ ve
- $P_0(x) \equiv f((a+b)/2)$

- Birinci yaklaşım sonucunda

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_0(x)dx = f(a)(b-a),$$

- ikinci yaklaşım sonucunda

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_0(x)dx = f(b)(b-a)$$

ve

- üçüncü yaklaşım sonucunda ise

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_0(x)dx = f((a+b)/2)(b-a)$$

kuralını elde ederiz.

- Yamuk kuralında ise $[a, b]$ aralığında f fonksiyonuna $(a, f(a)), (b, f(b))$ noktalarından geçen birinci dereceden

$$P_1(x) = f(a) + f[a, b](x - a)$$

polinomu ile yaklaşarak

$$\begin{aligned} I_Y(f) &= \int_a^b P_1(x)dx = \int_a^b (f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a))dx \\ &= f(a)(b - a) + (f(b) - f(a))(b - a)/2 \\ &= \frac{b - a}{2}(f(a) + f(b)) \end{aligned}$$

yöntemini elde ederiz.

- *Simpson Kuralı*
  Bu kural f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değerini, a, $(a + b)/2$ ve b noktalarındaki değerlerin ağırlıklı bir ortalaması olarak kabul eder:

- *Simpson Kuralı*
  Bu kural f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değerini, a, $(a+b)/2$ ve b noktalarındaki değerlerin ağırlıklı bir ortalaması olarak kabul eder:

- $$f(\chi) = \frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{6}f(b)$$

  Buna göre basit Simpson kuralı

$$\begin{aligned} I_s(f) &= (b-a)f(\chi) \\ &= (b-a)\frac{1}{6}\left(f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b)\right) \end{aligned} \tag{1}$$

olarak ifade edilir.

- Alternatif bir bakış açısıyla Simpson kuralı, $h = (b - a)/2$ olmak üzere

$$(a, f(a)), (a + h, f(a + h)), (b, f(b))$$

noktalarından geçen

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(a) + f[a, a + h](x - a) \\ &\quad + f[a, a + h, a + 2h](x - a)(x - (a + h)) \end{aligned} \tag{2}$$

polinomunun integralini, f fonksiyonun verilen aralık üzerindeki integrali için yaklaşım kabul eder(Alıştırma 11). Simpson kuralı şematik olarak Şekil 1 de sunulmaktadır.

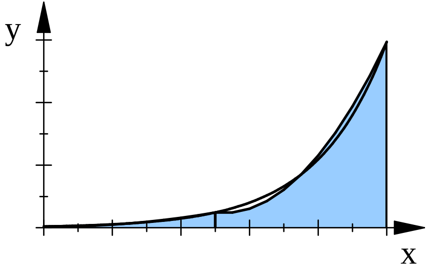


Figure: Simpson kuralı şematik gösterimi

Örnek 2.

$f(x) = e^x$ *fonksiyonunun* $[0, 1]$ *aralığı üzerindeki integralini basit Simpson kuralı yardımıyla hesaplayınız.*

- $$a = x_1 = 0, x_2 = (a+b)/2 = 1/2, x_3 = b = 1$$

  olup, noktalar arasındaki uzaklık

  $$h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = 1/2$$

  olmak üzere (1) kuralına göre

- $$a = x_1 = 0, x_2 = (a+b)/2 = 1/2, x_3 = b = 1$$

  olup, noktalar arasındaki uzaklık

  $$h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = 1/2$$

  olmak üzere (1) kuralına göre

- $$\begin{aligned} I_s(f) &= \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b))) \\ &= \frac{1}{6}(f(0) + 4f(1/2) + f(1)) \\ &= \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{1/2} + e^1) \\ &\doteq 1.7189 \end{aligned}$$

  (1) ve (2) değerleri gerçek integral değeri ile karşılaştırıldığında, en iyi yaklaşımın Simpson kuralı ile elde edildiği görülür.

- Bir aralık üzerindeki integrasyon işleminde elde edilen yaklaşımlarda oluşan hatayı minimize etmek için söz konusu aralık n adet eşit uzunluklu alt aralığa bölünerek, herbir alt aralık üzerinde ilgili yöntem uygulanır.

- Bir aralık üzerindeki integrasyon işleminde elde edilen yaklaşımlarda oluşan hatayı minimize etmek için söz konusu aralık n adet eşit uzunluklu alt aralığa bölünerek, herbir alt aralık üzerinde ilgili yöntem uygulanır.
- Daha somut olarak, $[a, b]$ aralığının n adet ve $h = (b - a)/n$ uzunluklu alt aralığa bölünmesiyle oluşan alt aralıkların uç noktalarını

$$x_1 = a,\ x_2 = a + h,\ x_3 = a + 2h, \ldots, x_{n+1} = a + nh$$

ile gösterim.

- Bu durumda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + ... + \int_{x_n}^{x_{n+1}=b} f(x)dx$$

olarak ifade edilir ve herbir alt aralık üzerinde ilgili yöntemin uygulanması suretiyle elde edilen yaklaşımların toplamı, yöntemin *bileşik versiyonunu* verir.

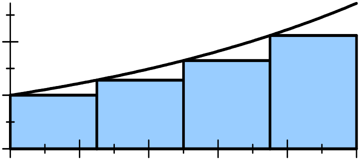
Sayısal integrasyon:Bileşik yöntemler

- Bu durumda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + ... + \int_{x_n}^{x_{n+1}=b} f(x)dx$$

  olarak ifade edilir ve herbir alt aralık üzerinde ilgili yöntemin uygulanması suretiyle elde edilen yaklaşımların toplamı, yöntemin *bileşik versiyonunu* verir.
- Yukarıda incelenen yöntemlerin bileşik versiyonları Tablo **??** de verilmektedir.

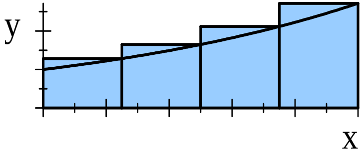
$$I_{sol}(f,n) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$



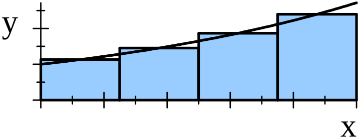
Bileþik sol dikdörtgen

Sayısal integrasyon: Bileşik Sağ dikdörtgen

$$I_{sağ}(f,n) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1})$$

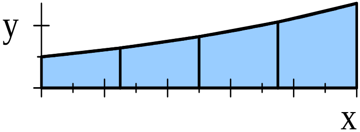


$$I_{ort}(f,n) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i + h/2)$$



Sayısal integrasyon:Bileşik yamuk

- $I_Y(f,n) = h\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$



- Yukarıda verilen yöntemlere ilaveten, Simpson kuralının bileşik versiyonu ise $[a, b]$ aralığını $n = 2k$ ile belirtilen çift sayıda alt aralığa bölerek, $h = (b - a)/n$ olmak üzere, herbir $[x_i, x_{i+2}]$ alt aralığına basit Simpson kuralını uygulamak suretiyle elde edilir:

- Yukarıda verilen yöntemlere ilaveten, Simpson kuralının bileşik versiyonu ise $[a, b]$ aralığını $n = 2k$ ile belirtilen çift sayıda alt aralığa bölerek, $h = (b-a)/n$ olmak üzere, herbir $[x_i, x_{i+2}]$ alt aralığına basit Simpson kuralını uygulamak suretiyle elde edilir:
- $$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_{a=x_1}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_5} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}=b} f(x)dx \;, \\ I_S(f,n) &= \frac{h}{3}\left(f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)\right) \\ &\quad + \frac{h}{3}\left(f(x_3) + 4f(x_4) + f(x_5)\right) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \frac{h}{3}\left(f(x_{2k-1}) + 4f(x_{2k}) + f(x_{2k+1})\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{k} f(x_{2i}) + 2\sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i+1}) + f(b)\right) \end{aligned}$$

Örnek 3.

$[0,1]$ *aralığını dört alt aralığı bölmek suretiyle*

$$\int_0^1 e^x \, dx$$

integrali için Sol ve Sağ Dikdörtgen Kuralı ile Orta Nokta, Yamuk ve Simpson kuralı yaklaşımlarını hesaplayınız.

- $[0, 1]$ aralığını dört alt aralığa böldüğümüzde elde edilen alt aralıkların uç noktaları arasındaki uzaklık

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 1/4$$

tür ve karşılık gelen alt aralıkların uç noktaları ise

$$x_1 = 0, x_2 = 1/4, x_3 = 2/4, x_4 = 3/4, x_5 = 1$$

olarak elde edilir.

- Sol Dikdörtgen yaklaşımı:

$$
\begin{aligned}
I_{sol}(f,n &= 4) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} f(x_i) \\
&= \frac{1}{4}(f(0)+f(1/4)+f(2/4)+f(3/4)) \\
&= \frac{1}{4}(e^0+e^{1/4}+e^{2/4}+e^{3/4}) \\
&\doteq 1.5124
\end{aligned}
$$

- Sağ dikdörtgen yaklaşımı:

$$
\begin{aligned}
i_{sag}(f, n &= 4) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} f(x_{i+1}) \\
&= \frac{1}{4}(f(1/4) + f(2/4) + f(3/4) + f(4/4)) \\
&= \frac{1}{4}(e^{1/4} + e^{2/4} + e^{3/4} + e^{4/4}) \\
&\doteq 1.942
\end{aligned}
$$

- Orta nokta yaklaşımı:

$$
\begin{aligned}
i_{ort}(f, n &= 4) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i + h/2) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} f(x_i + 1/8)) \\
&= \frac{1}{4}(f(0+1/8) + f(1/4+1/8) + f(2/4+1/8) + f(3/4 - \\
&= \frac{1}{4}(e^{1/8} + e^{3/8} + e^{5/8} + e^{7/8}) \\
&\doteq 1.7138
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Sayısal integrasyon:Bileşik yöntemler

- Yamuk Kuralı yaklaşımı: Yöntemi uygulamadan önce yeniden düzenleyelim:

$$
\begin{aligned}
I_Y(f,n) &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \\
&= h(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}+\ldots+\frac{f(x_n)+f(x_{n+1})}{2} \\
&= h(\frac{1}{2}f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_n)+\frac{1}{2}f(x_{n+1}))
\end{aligned}
$$

- Yamuk Kuralı yaklaşımı: Yöntemi uygulamadan önce yeniden düzenleyelim:

$$
\begin{aligned}
I_Y(f,n) &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \\
&= h(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}+...+\frac{f(x_n)+f(x_{n+1})}{2} \\
&= h(\frac{1}{2}f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+...+f(x_n)+\frac{1}{2}f(x_{n+1}))
\end{aligned}
$$

- Buna göre verilen problem için

$$
\begin{aligned}
I_Y(f,n &= 4) = h(\frac{1}{2}f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+\frac{1}{2}f(x_5)) \\
&= \frac{1}{4}(\frac{1}{2}e^0+e^{1/4}+e^{2/4}+e^{3/4}+\frac{1}{2}e^1) \\
&\doteq 1.7272
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

- Elde edilen yamuk yaklaşımının sol ve sağ dikdörtgen kuralı ile elde edilen yaklaşımların ortalaması olduğuna dikkat edelim:

$$\begin{aligned}\frac{I_{sol}(f,4)+I_{sag}(f,4)}{2} &\doteq \frac{1.5124+1.942}{2}\\ &\doteq 1.7272 = I_Y(f,4)\end{aligned}$$

- Elde edilen yamuk yaklaşımının sol ve sağ dikdörtgen kuralı ile elde edilen yaklaşımların ortalaması olduğuna dikkat edelim:

$$\begin{aligned} \frac{I_{sol}(f,4)+I_{sag}(f,4)}{2} &\doteq \frac{1.5124+1.942}{2} \\ &\doteq 1.7272 = I_Y(f,4) \end{aligned}$$

- Simpson yaklaşımı:

$$\begin{aligned} I_S(f,n &= 4) = h/3(f(x_1)+4f(x_2)+2f(x_3)+4f(x_4)+f(x_5)) \\ &= \frac{1}{12}(e^0+4\times e^{1/4}+2\times e^{2/4}+4\times e^{3/4}+e^1) \\ &\doteq 1.7183 \end{aligned}$$

elde ederiz.

1. Sol ve Sağ Dikdörtgen, Orta Nokta, Yamuk ve Simpson kuralları ile $[0,1]$ aralığı üzerinde $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ fonksiyonlarının integrallerini hesaplayarak tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Yöntem	$\int_0^1 1dx$	$\int_0^1 xdx$	$\int_0^1 x^2dx$	$\int_0^1 x^3dx$
Sol D.	....	....	....	....
Sağ D.				
Orta N.				
Yamuk				
Simpson				

2 Soru 1 de incelenen, Sol ve Sağ Dikdörtgen, Orta Nokta, Yamuk ve Simpson kuralları ile $[0,1]$ aralığı üzerinde $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ fonksiyonlarından hangilerinin integralinin sonucu, gerçek integral değerine eşit olur? Gerçek sonucu veren yöntemler için aşağıdaki tabloda belirtildiği üzere $(+)$ ve hatalı sonuç veren yöntem için ise $(-)$ işareti koyunuz.

Yöntem\Fonksiyon	1	x	x^2	x^3	x^4
Sol D.	$+$				$-$
Sağ D.	$+$				$-$
Orta N.	$+$				$-$
Yamuk	$+$				$-$
Simpson	$+$				$-$

3 Soru 2 de $[0, 1]$ aralığı üzerinde elde ettiğiniz sonuçları keyfi bir $[a, b]$ aralığı üzerinde de gerçekleştiriniz. Tablo işaretlerinde herhangi bir değişikliğin olmadığını gözlemleyiniz.

4 Soru 2 ve Soru 3 de elde ettiğiniz sonuçlar ve integral operatörünün lineerlik özelliliği yardımıyla, hangi yöntemin hangi dereceden polinomların $[a, b]$ aralığı üzerindeki integralini hatasız olarak hesapladığını belirleyiniz.

$$I(f) = \int_0^1 x^4 dx$$

integrali için $5-8$ nolu soruları cevaplandırınız.

5
$$I_{sol}(f, n = 2^i), i = 0, 1, 2$$
Sol Dikdörtgen yaklaşımlarını hesaplayınız

6
$$I_Y(f, n = 2^i), i = 0, 1, 2$$
Yamuk yaklaşımlarını hesaplayınız.

7
$$I_{ort}(f, n = 2^i), i = 0, 1, 2$$
Orta Nokta yaklaşımlarını hesaplayınız

8
$$I_S(f, n = 2^i), i = 1, 2$$
Simpson yaklaşımlarını hesaplayınız.

9 Soru 5 ve 7 deki cevaplarınız yardımıyla Sol Dikdörtgen ve Orta Nokta yaklaşımları arasında $i = 1$ ve $i = 2$ için

$$I_{ort}(f, n = 2^{i-1}) = 2I_{Sol}(f, n = 2^{i}) - I_{Sol}(f, n = 2^{i-1})$$

bağıntısının mevcut olduğunu gözlemleyiniz.

10 Soru 6 ve 8 deki cevaplarınız yardımıyla Simpson ve Yamuk yaklaşımları arasında i = 1 ve i = 2 için

$$I_S(f, n = 2^{i}) = \frac{4I_Y(f, n = 2^{i}) - I_Y(f, n = 2^{i-1})}{3}$$

bağıntısının mevcut olduğunu gözlemleyiniz.

11 (2) interpolasyon polinomunun $[a, b]$ aralığı üzerinden integralini hesaplayarak, (1) ile verilen Simpson kuralını elde ediniz.

Kaynaklar

Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1988.

Coşkun, E. MATLAB/Octave ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:erhancoskun.com.tr).

Davis, P., Rabinowitz, P., Methods of Numerical Integration, Academic Press, 1984.

OCTAVE, GNU özgür yazılım(*URL:OCTAVE.sourceforge.net*).

Stoer, J., Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1976.