Sayısal integrasyon:Hata analizi

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Eylül 2020

Bu çalışma "MATLAB/Octave Uygulamalarıyla Sayısal Analize Giriş" isimli çalışmamızın sekizinci bölümünün Sayısal integrasyonda Hata analizi alt bölümünden oluşturmaktadır. Konuyla ilgili ileri düzey araştırma için bölüm sonunda sunduğumuz değerli kaynakları öneririz.

Bu bölümde

- sayısal yöntemlerde oluşan yerel hataları inceliyoruz

Sayısal integrasyon:Hata analizi

- Sayısal integrasyon yöntemleri, gerçek integral değeri için yaklaşım oluşturmak amacıyla geliştirilmişlerdir ve genelde hata içerirler.

Sayısal integrasyon:Hata analizi

- Sayısal integrasyon yöntemleri, gerçek integral değeri için yaklaşım oluşturmak amacıyla geliştirilmişlerdir ve genelde hata içerirler.
- Bu hatanın neye bağlı olduğu ve minimizasyonu için neler yapılması gerektiği konusunun anlaşılması oldukça önemlidir.

Sayısal integrasyon:Hata analizi

- Sayısal integrasyon yöntemleri, gerçek integral değeri için yaklaşım oluşturmak amacıyla geliştirilmişlerdir ve genelde hata içerirler.
- Bu hatanın neye bağlı olduğu ve minimizasyonu için neler yapılması gerektiği konusunun anlaşılması oldukça önemlidir.
- $$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

  integrali için h adım uzunluğu ile sayısal yaklaşım $I_{sayisal}(f, h)$ olmak üzere

  $$Hata = E(f, h) = I(f) - I_{sayisal}(f, h)$$

  ile tanımlanan integrasyon hatasını, adım uzunluğu ve f fonksiyonunun türevi cinsinden tahmin etmek mümkündür.

- Sayısal integrasyon yöntemleri, gerçek integral değeri için yaklaşım oluşturmak amacıyla geliştirilmişlerdir ve genelde hata içerirler.
- Bu hatanın neye bağlı olduğu ve minimizasyonu için neler yapılması gerektiği konusunun anlaşılması oldukça önemlidir.
- $$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

  integrali için h adım uzunluğu ile sayısal yaklaşım $I_{sayisal}(f,h)$ olmak üzere

  $$Hata = E(f,h) = I(f) - I_{sayisal}(f,h)$$

  ile tanımlanan integrasyon hatasını, adım uzunluğu ve f fonksiyonunun türevi cinsinden tahmin etmek mümkündür.
- Böylece sayısal yöntemin hangi durumlarda gerçek sonuç üretebileceğini tahmin edebiliriz. Ayrıca integralde kullanılan alt aralık sayısına bağlı olarak hatanın nasıl değişeceği konusunda fikir sahibi oluruz.

Sayısal integrasyon:Hata analizi

- Sayısal yöntemlerde oluşan hatayı incelemeden önce, hata ifadesinde kullanacağımız *O(Büyük O) notasyonu* tanıyalım.

Sayısal integrasyon:Hata analizi

- Sayısal yöntemlerde oluşan hatayı incelemeden önce, hata ifadesinde kullanacağımız *O(Büyük O) notasyonu* tanıyalım.
- *O* notasyonu, belirli bir noktanın komşuluğunda verilen bir fonksiyonun artış veya azalma hızını elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade etmek için kullanılır.

- Sayısal yöntemlerde oluşan hatayı incelemeden önce, hata ifadesinde kullanacağımız *O(Büyük O) notasyonu* tanıyalım.
- O notasyonu, belirli bir noktanın komşuluğunda verilen bir fonksiyonun artış veya azalma hızını elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade etmek için kullanılır.

Tanım 1.

$x = a$ noktası komşuluğunda tanımlı f ve g fonksiyonları için eğer $\lim_{x \to a} (f(x))/(g(x) = sabit \neq 0$ ise bu taktirde $f(x)$ fonksiyonuna, $x = a$ noktası komşuluğunda $g-inci$ basamaktandır denir ve durum $f(x) \cong O(g(x)), x \to a$ gösterimi ile ifade edilir.

- Sayısal yöntemlerde oluşan hatayı incelemeden önce, hata ifadesinde kullanacağımız *O(Büyük O) notasyonu* tanıyalım.
- O notasyonu, belirli bir noktanın komşuluğunda verilen bir fonksiyonun artış veya azalma hızını elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade etmek için kullanılır.

Tanım 1.

$x = a$ noktası komşuluğunda tanımlı f ve g fonksiyonları için eğer $\lim_{x\to a} (f(x))/(g(x) = sabit \neq 0$ ise bu taktirde $f(x)$ fonksiyonuna, $x = a$ noktası komşuluğunda $g-inci$ basamaktandır denir ve durum $f(x) \cong O(g(x)), x \to a$ gösterimi ile ifade edilir.

- Yukarıdaki tanımda $a = \infty$ olması durumunda, bu noktanın komşuluğu olarak yeterince büyük $c > 0$ için (c, ∞) aralığı alınır.

Örnek 1.

O(büyük o) notasyonunun kullanımına ilişkin olarak aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

- $sin(x) \cong O(x), x \to 0$ dır, çünkü

$$lim_{x\to 0}(sin(x))/x = 1 \neq 0$$

dır. Bu durumda $x = 0$ noktası komşuluğunda $sin(x)$ fonksiyonu x fonksiyonu ile benzer davranış gösterir, o halde bu nokta komşuluğunda $sin(x) \approx x$ alınabilir.

Örnek 1.

O(büyük o) notasyonunun kullanımına ilişkin olarak aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

- $sin(x) \cong O(x), x \to 0$ dır, çünkü

$$lim_{x\to 0}(sin(x))/x = 1 \neq 0$$

dır. Bu durumda $x = 0$ noktası komşuluğunda $sin(x)$ fonksiyonu x fonksiyonu ile benzer davranış gösterir, o halde bu nokta komşuluğunda $sin(x) \approx x$ alınabilir.

- $$x^2 + x + 1 \cong O(x^2), x \to \infty \text{ çünkü } lim_{t\to\infty}((x^2 + x + 1))/x^2 = 1 \neq 0$$

dir. O halde yeterince büyük x ler için $x^2 + x + 1 \approx x^2$ alınabilir.

Sayısal integrasyon:Hata analizi

- $$\begin{aligned} sinh(x) &= 1/2(e^x - e^{-x}) = 1/2(e^x) - 1/2(e^{-x}) \\ &= 1/2(1 + x + x^2/2! + x^3/3! \dots) \\ &\quad -1/2(1 - x + x^2/2! - x^3/3! \dots) \\ &= x + x^3/3! - \dots \\ &\cong O(x), x \to 0 \end{aligned}$$

  O halde $x = 0$ noktasının küçük komşuluğunda $sinh(x) \approx x$ alınabilir. Benzer biçimde

Sayısal integrasyon:Hata analizi

- $$\begin{aligned} sinh(x) &= 1/2(e^x - e^{-x}) = 1/2(e^x) - 1/2(e^{-x}) \\ &= 1/2(1 + x + x^2/2! + x^3/3! \dots) \\ &\quad -1/2(1 - x + x^2/2! - x^3/3! \dots) \\ &= x + x^3/3! - \dots \\ &\cong O(x), x \to 0 \end{aligned}$$

  O halde $x = 0$ noktasının küçük komşuluğunda $sinh(x) \approx x$ alınabilir. Benzer biçimde

- $$cos(x) \cong O(1), x \to 0$$

- Özetle büyük O notasyonu yardımıyla bir fonksiyonun bir nokta komşuluğundaki davranışı daha basit fonksiyonlarla(örneğin $x^n, n \in Z$) ifade edilmektedir. Örneğin

$$lim_{x \to 0}(e^x - 1)/x = 1$$

olup, büyük O notasyonu ile

$$e^x - 1 \cong O(x), x \to 0$$

ile sıfır noktasının küçük komşuluğunda $e^x - 1 \approx x$ alınabileceğini anlıyoruz.

Sol dikdörtgen Kuralı için Yerel Hata

- Yeterince küçün $h > 0$ sabiti için f fonksiyonunun $[a, a+h]$ aralığı üzerindeki integrali sonucu oluşan hataya yerel hata adını veriyoruz. f nin yeterli sayıda basamaktan türevlerinin mevcut olduğunu kabul ederek, $x = a$ noktası komşuluğundaki Taylor açılımı yardımıyla,

Sol dikdörtgen Kuralı için Yerel Hata

- Yeterince küçün $h > 0$ sabiti için f fonksiyonunun $[a, a+h]$ aralığı üzerindeki integrali sonucu oluşan hataya yerel hata adını veriyoruz. f nin yeterli sayıda basamaktan türevlerinin mevcut olduğunu kabul ederek, $x = a$ noktası komşuluğundaki Taylor açılımı yardımıyla,
-

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^{a+h} f(x)dx \\ &= \int_a^{a+h} \left[f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots \right] dx, \\ &= hf(a) + \frac{h^2}{2} f'(a) + \cdots \\ &= I_{sol}(f,h) + \frac{h^2}{2} f'(a) + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

elde ederiz.

Sol dikdörtgen Kuralı için Yerel Hata

- O halde $[a, a+h]$ aralığında oluşan ve sol dikdörtgen kuralının **yerel hatası** olarak tanımlayabileceğimiz hata,

- O halde $[a, a+h]$ aralığında oluşan ve sol dikdörtgen kuralının **yerel hatası** olarak tanımlayabileceğimiz hata,
-

$$\begin{aligned} E_{sol}(f,h) &= I(f) - I_{sol}(f,h) && (2) \\ &= \frac{h^2}{2} f'(a) + \cdots \\ &= ch^2 f'(\xi), \xi \in (a, a+h) \\ &= O(h^2) && (3) \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir.

Sol dikdörtgen Kuralı için Yerel Hata

- Alternatif olarak sırasıyla integraller ve türevler için Ortalama Değer Teoremlerinden(ODT),

$$
\begin{aligned}
E_{sol}(f,h) &= I(f) - I_{sol}(f,h) \\
&= \int_a^{a+h} f(x)dx - f(a)h \\
&= f(\chi)h - f(a)h, \chi \in (a, a+h)(\text{integraller için ODT}) \\
&= h(f(\chi) - f(a)) \\
&= hf'(\xi)(\chi - a), \xi \in (a, a+\chi)(\text{türevler için ODT}) \\
&= ch^2 f'(\xi) \\
&= O(h^2)
\end{aligned}
$$

elde ederiz, burada $c := (\chi - a)/h \in (0,1)$ dir.

Sol dikdörtgen Kuralı için Yerel Hata

- Bu sonuca göre türevi özdeş olarak sıfıra eşit olmayan her fonksiyon için Sol Dikdörtgen kuralına göre hatalı sonuçlar beklenmelidir.

Sol dikdörtgen Kuralı için Yerel Hata

- Bu sonuca göre türevi özdeş olarak sıfıra eşit olmayan her fonksiyon için Sol Dikdörtgen kuralına göre hatalı sonuçlar beklenmelidir.
- $f(x) = x$ fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığı üzerindeki integrali yardımıyla (2) ifadesindeki, c sabitini belirleyebiliriz:

$$\begin{aligned} E_{sol}(f, h) &= I(f) - I_{sol}(f, h) \\ &= \int_0^1 x dx - [1 \times f(0)] \\ &= \frac{1}{2} \\ &= cf'(\xi) = c \end{aligned}$$

olup,

$$E_{sol}(f, h) = \frac{1}{2} h^2 f'(\xi), \xi \in (a, a + h) \tag{4}$$

elde ederiz.

Yamuk kuralı için Yerel hata

- Taylor açılımı ile

$$
\begin{aligned}
I(f) &= \int_a^{a+h} f(x)dx \\
&= \int_a^{a+h} \left[f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \cdots \right] dx, \\
&= hf(a) + \frac{h^2}{2} f'(a) + \frac{h^3}{6} f''(a) + \cdots \qquad (5)
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

Yamuk kuralı için Yerel hata

- Öte yandan

$$\begin{aligned} I_Y(f,h) &= \frac{h}{2}(f(a)+f(a+h)) \\ &= \frac{h}{2}(f(a)+f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(\xi),\xi\epsilon(a,a+h)) \\ &= hf(a)+\frac{h^2}{2}f'(a)+\frac{h^3}{4}f''(a)+\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

olarak ifade edilebilir.

Yamuk yöntemi için Yerel hata

- Bu durumda (5) den (6) i çıkarmak suretiyle, Yamuk yöntemi için **yerel hata**

$$
\begin{aligned}
E_Y(f) &= I(f) - I_Y(f) = \frac{h^3}{6} f''(a) - \frac{h^3}{4} f''(a) + \cdots \\
&= c h^3 f''(\alpha), c \in R, \alpha \in (a, a+h) \qquad (7) \\
&= O(h^3) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Bu sonuca göre

Yamuk yöntemi için Yerel hata

- Bu durumda (5) den (6) i çıkarmak suretiyle, Yamuk yöntemi için **yerel hata**

$$
\begin{aligned}
E_Y(f) &= I(f) - I_Y(f) = \frac{h^3}{6} f''(a) - \frac{h^3}{4} f''(a) + \cdots \\
&= ch^3 f''(\alpha), c \in R, \alpha \in (a, a+h) \qquad (7) \\
&= O(h^3) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Bu sonuca göre

- ikinci türevi özdeş olarak sıfıra eşit olmayan her fonksiyon için Yamuk kuralına göre hatalı sonuçlar beklenmelidir ve

Yamuk yöntemi için Yerel hata

- Bu durumda (5) den (6) i çıkarmak suretiyle, Yamuk yöntemi için **yerel hata**

$$
\begin{aligned}
E_Y(f) &= I(f) - I_Y(f) = \frac{h^3}{6} f''(a) - \frac{h^3}{4} f''(a) + \cdots \\
&= c h^3 f''(\alpha), c \in R, \alpha \in (a, a+h) \qquad (7) \\
&= O(h^3) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Bu sonuca göre

- ikinci türevi özdeş olarak sıfıra eşit olmayan her fonksiyon için Yamuk kuralına göre hatalı sonuçlar beklenmelidir ve
- yöntem birinci dereceden polinomların integralini hatasız olarak hesaplayabilmektedir.

Yamuk yöntemi için Yerel hata

- İkinci türevi sabit olan, örneğin $f(x) = x^2$, fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığı üzerindeki integrali yardımıyla (7) deki hata sabitini belirleyebiliriz:

$$
\begin{aligned}
E_Y(f) &= I(f) - I_Y(f) \\
&= \int_0^1 x^2 dx - 1/2(f(0) + f(1)) \\
&= 1/3 - 1/2 = -1/6 \\
&= cf''(\alpha) \\
&= 2c
\end{aligned}
$$

yani, $c = -1/12$ olup,

Yamuk yöntemi için Yerel hata

- İkinci türevi sabit olan, örneğin $f(x) = x^2$, fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı üzerindeki integrali yardımıyla (7) deki hata sabitini belirleyebiliriz:

$$\begin{aligned} E_Y(f) &= I(f) - I_Y(f) \\ &= \int_0^1 x^2 dx - 1/2(f(0) + f(1)) \\ &= 1/3 - 1/2 = -1/6 \\ &= cf''(\alpha) \\ &= 2c \end{aligned}$$

yani, $c = -1/12$ olup,

- $$E_Y(f,h) = -\frac{1}{12} h^3 f''(\alpha), \alpha \in (a, a+h) \tag{9}$$

olarak elde ederiz.

Simpson yöntemi için Yerel hata

- Simpson yöntemi için $h = (b - a)/2$ olmak üzere, Taylor açılımı ile

Simpson yöntemi için Yerel hata

- Simpson yöntemi için $h = (b-a)/2$ olmak üzere, Taylor açılımı ile
-

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{a+2h} f(x)dx \\ &= \int_a^{a+2h} \left[\begin{array}{r} f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{6}f'''(a \\ + \frac{(x-a)^4}{24}f^{(iv)}(a) + \cdots \end{array} \right. \\ &= 2hf(a) + 2h^2f'(a) + \frac{4}{3}h^3f''(a) \\ &\quad + \frac{2}{3}h^4f'''(a) + \frac{4}{15}h^5f^{(iv)}(a) + \cdots \end{aligned}$$

elde ederiz.

- Simpson yönteminde yer alan $f(\frac{a+b}{2})$ ve $f(b)$ değerlerinin $x = a$ noktası komşuluğunda Taylor açılımlarını hesaplayarak,

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a) + \frac{h^4}{24}f^{(iv)}(a) + \cdots$$

ve

$$f(b) = f(a) + 2hf'(a) + 2h^2f''(a) + \frac{4}{3}h^3f'''(a) + \frac{2h^4}{3}f^{(iv)}(a) + \cdots$$

elde ederiz. O halde

$$\begin{aligned} & f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \\ = \ & 6f(a) + 6hf'(a) + 4h^2f''(a) \\ & +2h^3f'''(a) + h^4\frac{5}{6}f^{(iv)}(a) + \cdots \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

Simpson yöntemi için Yerel hata

- $$\begin{aligned} I_S(f) &= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \\ &= 2hf(a) + 2h^2 f'(a) + \frac{4}{3}h^3 f''(a) \\ &\quad + \frac{2h^4}{3} f'''(a) + \frac{5h^5}{18} f^{(iv)}(a) + \cdots \end{aligned}$$

  olur.

Simpson yöntemi için Yerel hata

- $$\begin{aligned} I_S(f) &= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \\ &= 2hf(a) + 2h^2 f'(a) + \frac{4}{3}h^3 f''(a) \\ &\quad + \frac{2h^4}{3} f'''(a) + \frac{5h^5}{18} f^{(iv)}(a) + \cdots \end{aligned}$$

  olur.

- Buradan, Simpson kuralı için **yerel hata**

$$\begin{aligned} E_S(f,h) &= \int_a^b f(x)dx - I_S(f) \\ &= \frac{4}{15}h^5 f^{(iv)}(a) - \frac{5h^5}{72} f^{(iv)}(a) + \cdots \\ &= ch^5 f^{(iv)}(\xi), \xi \in (a,b) \qquad (10) \\ &= O(h^5) \qquad (11) \end{aligned}$$

Simpson yöntemi için Yerel hata

- Bu sonuca göre

Simpson yöntemi için Yerel hata

- Bu sonuca göre
- dördüncü türevi özdeş olarak sıfıra eşit olmayan her fonksiyon için Simpson kuralına göre hatalı sonuçlar beklenmelidir ve

Simpson yöntemi için Yerel hata

- Bu sonuca göre
- dördüncü türevi özdeş olarak sıfıra eşit olmayan her fonksiyon için Simpson kuralına göre hatalı sonuçlar beklenmelidir ve
- yöntem üçüncü dereceden polinomların integralini hatasız olarak hesaplayabilmektedir.

Simpson yöntemi için Yerel hata

- Bu sonuca göre
- dördüncü türevi özdeş olarak sıfıra eşit olmayan her fonksiyon için Simpson kuralına göre hatalı sonuçlar beklenmelidir ve
- yöntem üçüncü dereceden polinomların integralini hatasız olarak hesaplayabilmektedir.
- Dördüncü türevi sabit olan, örneğin $f(x) = x^4$ fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığı üzerindeki integrali yardımıyla (10) daki hata sabitini belirleyebiliriz:

- $$\begin{aligned} E_S(f) &= I(f) - I_S(f) \\ &= \int_0^1 x^4 dx - 1/6(f(0) + 4f(1/2) + f(1)) \\ &= 1/5 - 1/6 \times (0 + 4 \times 1/16 + 1) \\ &= -\frac{1}{120} \\ &= c \times \frac{1}{32} \times 24 \end{aligned}$$

bağıntısından, $c = -\frac{32}{24 \times 120} = -\frac{1}{90}$ olup,

$$E_S(f,h) = -\frac{1}{90} h^5 f^{(iv)}(\xi), \xi \in (a,b)$$

olarak elde ederiz.

Kaynaklar

- Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1988.
- Coşkun, E. MATLAB/Octave ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:erhancoskun.com.tr).
- Davis, P., Rabinowitz, P., Methods of Numerical Integration, Academic Press, 1984.
- Kincaid, D., Cheney, W., Numerical Analysis, Brooks/Cole, 1991.
- OCTAVE, GNU özgür yazılım(*URL:OCTAVE.sourceforge.net*).
- Stoer, J., Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1976.