MATLAB/Octave ortamında Sayısal integrasyon uygulamaları

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Eylül 2020

MATLAB/Octave ortamında Sayısal İntegrasyon uygulamaları

- Bu çalışma "MATLAB/Octave Uygulamalarıyla Sayısal Analize Giriş" isimli çalışmamızın sekizinci bölümünün MATLAB/Octave ortamında Uygulamalar alt bölümünden oluşturmaktadır.

MATLAB/Octave ortamında Sayısal İntegrasyon uygulamaları

- Bu çalışma "MATLAB/Octave Uygulamalarıyla Sayısal Analize Giriş" isimli çalışmamızın sekizinci bölümünün MATLAB/Octave ortamında Uygulamalar alt bölümünden oluşturmaktadır.
- Konuyla ilgili ileri düzey araştırma için bölüm sonunda sunduğumuz değerli kaynakları öneririz.

MATLAB/Octave ortamında Sol dikdörtgen uygulamaları

- Yukarıdaki örneklerden görüldüğü üzere, sayısal integrasyon yöntemi ile iyi bir yaklaşım elde edebilmek için verilen aralığın çok sayıda alt aralığa bölünmesi suretiyle bileşik yöntemlerin uygulanması gerekmektedir.

MATLAB/Octave ortamında Sol dikdörtgen uygulamaları

- Yukarıdaki örneklerden görüldüğü üzere, sayısal integrasyon yöntemi ile iyi bir yaklaşım elde edebilmek için verilen aralığın çok sayıda alt aralığa bölünmesi suretiyle bileşik yöntemlerin uygulanması gerekmektedir.
- Ancak bu durumda ise oluşan aritmetik işlemler ancak elektronik ortamda gerçekleştirilebilir. Bu kısımda MATLAB/Octave yardımıyla belirtilen integrasyon işlemlerinin nasıl gerçekleştiridiğini örnekler üzerinde inceliyoruz.

MATLAB/Octave ortamında Sol dikdörtgen uygulamaları

- Yukarıdaki örneklerden görüldüğü üzere, sayısal integrasyon yöntemi ile iyi bir yaklaşım elde edebilmek için verilen aralığın çok sayıda alt aralığa bölünmesi suretiyle bileşik yöntemlerin uygulanması gerekmektedir.
- Ancak bu durumda ise oluşan aritmetik işlemler ancak elektronik ortamda gerçekleştirilebilir. Bu kısımda MATLAB/Octave yardımıyla belirtilen integrasyon işlemlerinin nasıl gerçekleştiridiğini örnekler üzerinde inceliyoruz.
- Öncelikle

MATLAB/Octave ortamında Sol dikdörtgen uygulamaları

- Yukarıdaki örneklerden görüldüğü üzere, sayısal integrasyon yöntemi ile iyi bir yaklaşım elde edebilmek için verilen aralığın çok sayıda alt aralığa bölünmesi suretiyle bileşik yöntemlerin uygulanması gerekmektedir.
- Ancak bu durumda ise oluşan aritmetik işlemler ancak elektronik ortamda gerçekleştirilebilir. Bu kısımda MATLAB/Octave yardımıyla belirtilen integrasyon işlemlerinin nasıl gerçekleştiridiğini örnekler üzerinde inceliyoruz.
- Öncelikle
- $$I_{sol}(f,n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

  ile tanımlanan sol dikdörtgen kuralını göz önüne alalım:

Bileşik Sol dikdörtgen Algoritması

1. İnput: f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı ve n değeri

Bileşik Sol dikdörtgen Algoritması

1. İnput: f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı ve n değeri
2. $h = (b - a)/n$ alt aralıklar uzunluğu

Bileşik Sol dikdörtgen Algoritması

1. İnput: f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı ve n değeri
2. $h = (b - a)/n$ alt aralıklar uzunluğu
3. x: alt aralıklara ait uç noktalar vektörü

Bileşik Sol dikdörtgen Algoritması

1. İnput: f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı ve n değeri
2. $h = (b - a)/n$ alt aralıklar uzunluğu
3. x: alt aralıklara ait uç noktalar vektörü
4. $y = f(x)$; uç noktalardaki fonksiyon değerleri

Bileşik Sol dikdörtgen Algoritması

1. İnput: f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı ve n değeri
2. $h = (b - a)/n$ alt aralıklar uzunluğu
3. x: alt aralıklara ait uç noktalar vektörü
4. $y = f(x)$; uç noktalardaki fonksiyon değerleri
5. y değerlerinin toplamını h ile çarp ve geri gönder

MATLAB/Octave ortamında Bileşik Sol dikdörtgen kodu

1. $$function\ sonuc = soldik(f, a, b, n)$$

1. $function\ sonuc = soldik(f, a, b, n)$
2. $h = (b - a)/n;$

MATLAB/Octave ortamında Bileşik Sol dikdörtgen kodu

1. $function\ sonuc = soldik(f, a, b, n)$
2. $h = (b - a)/n;$
3. $x = a : h : b;$

MATLAB/Octave ortamında Bileşik Sol dikdörtgen kodu

1. $function\ sonuc = soldik(f, a, b, n)$
2. $h = (b - a)/n;$
3. $x = a : h : b;$
4. $y = f(x);$

MATLAB/Octave ortamında Bileşik Sol dikdörtgen kodu

1. $function\ sonuc = soldik(f, a, b, n)$
2. $h = (b - a)/n;$
3. $x = a : h : b;$
4. $y = f(x);$
5. $toplam = sum(y(1 : n));$

MATLAB/Octave ortamında Bileşik Sol dikdörtgen kodu

1. $function\ sonuc = soldik(f, a, b, n)$
2. $h = (b - a)/n;$
3. $x = a : h : b;$
4. $y = f(x);$
5. $toplam = sum(y(1 : n));$
6. $sonuc = toplam * h;$

MATLAB/Octave ortamında Bileşik Sol dikdörtgen uygulaması

Örnek 1.

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.746\,82$$

integrali için

- $n = 2, 10, 100, 1000, 5000$ değerlerine karşılık gelen sol dikdörtgen yaklaşımlarını hesaplayınız.
- Sonucun en fazla en fazla $\varepsilon = 10^{-4}$ hatası ile belirlenebilmesi için minimum n ne olmalıdır?

MATLAB/Octave ortamında Bileşik Sol dikdörtgen uygulaması

- $>> f = inline('exp(-x.\hat{}2)')$

ile tanımlanan f fonksiyonunu yukarıda verilen soldik programıyla çalıştırarak aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

n	2	10	100	1000	5000
$soldik(f, 0, 1, n) \doteq$	0.8894	0.7778	0.7500	0.7471	0.7469

- $$\begin{aligned} |E_{sol}(f,n)| &= \left|\frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)\right| \\ &= \left|\frac{(1-0)^2}{2n} f'(c)\right| \\ &= \frac{1}{2n} 2ce^{-c^2} \\ &\leq \frac{ce^{-c^2}}{n} \\ &\leq \frac{0.42888}{n} \leq 10^{-4} \end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlanması için $n \geq 4289$ olmalıdır. Yukarıda $f(x) = xe^{-x^2}$ fonksiyonunun $x = 1/\sqrt{2}$ noktasında maksimumuna ulaştığını ve maksimum değerinin ise $f(1/\sqrt{2}) = 0.42888$ olduğunu kullandık.

Örnek 2.

Yukarıdaki örneği Simpson kuralı için tekrarlayınız.

Öncelikle Simpson kuralına ait programı geliştirmeliyiz.
$k = n/2, h = (b - a)/n$ olmak üzere Simpson kuralının

$$I_S(f, n) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{k} f(x_{2i}) + 2\sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i+1}) + f(b)\right)$$

olarak ifade edildiğini biliyoruz. Buna göre iki toplamın ayrı ayrı hesaplanması gerekmektedir.

Bileşik Simpson Algoritması

1. Girdiler: f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı ve n değeri

Bileşik Simpson Algoritması

1. Girdiler: f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı ve n değeri
2. $h = (b - a)/n$ alt aralıklar uzunluğu

Bileşik Simpson Algoritması

1. Girdiler: f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı ve n değeri
2. $h = (b - a)/n$ alt aralıklar uzunluğu
3. x: alt aralıklara ait uç noktalar vektörü

Bileşik Simpson Algoritması

1. Girdiler: f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı ve n değeri
2. $h = (b - a)/n$ alt aralıklar uzunluğu
3. x: alt aralıklara ait uç noktalar vektörü
4. $y = f(x)$; uç noktalardaki fonksiyon değerleri

Bileşik Simpson Algoritması

1. Girdiler: f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı ve n değeri
2. $h = (b - a)/n$ alt aralıklar uzunluğu
3. x: alt aralıklara ait uç noktalar vektörü
4. $y = f(x)$; uç noktalardaki fonksiyon değerleri
5. $\sum_{i=1}^{k} f(x_{2i})$ toplamını hesapla ve ciftop değişkenine ata

Bileşik Simpson Algoritması

1. Girdiler: f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı ve n değeri
2. $h = (b - a) / n$ alt aralıklar uzunluğu
3. x: alt aralıklara ait uç noktalar vektörü
4. $y = f(x)$; uç noktalardaki fonksiyon değerleri
5. $\sum_{i=1}^{k} f(x_{2i})$ toplamını hesapla ve ciftop değişkenine ata
6. $\sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i+1})$ toplamını hesapla ve tektop değişkenine ata

Bileşik Simpson Algoritması

1. Girdiler: f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı ve n değeri
2. $h = (b - a)/n$ alt aralıklar uzunluğu
3. x: alt aralıklara ait uç noktalar vektörü
4. $y = f(x)$; uç noktalardaki fonksiyon değerleri
5. $\sum_{i=1}^{k} f(x_{2i})$ toplamını hesapla ve ciftop değişkenine ata
6. $\sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i+1})$ toplamını hesapla ve tektop değişkenine ata
7. Çıktı: $h/3 \times (f(a) + 4 \times ciftop + 2 \times tektop + f(b))$

Bileşik Simpson yöntemi kodu

1. $function\ sonuc = simpson(f, a, b, n)$

Bileşik Simpson yöntemi kodu

1. $function\ sonuc = simpson(f, a, b, n)$
2. $h = (b - a)/n;$

Bileşik Simpson yöntemi kodu

1. $function\ sonuc = simpson(f, a, b, n)$
2. $h = (b - a)/n;$
3. $x = linspace(a, b, n + 1);$

Bileşik Simpson yöntemi kodu

1. $function\ sonuc = simpson(f, a, b, n)$
2. $h = (b - a)/n;$
3. $x = linspace(a, b, n + 1);$
4. $fd = f(x);$

Bileşik Simpson yöntemi kodu

1. $function\ sonuc = simpson(f, a, b, n)$
2. $h = (b - a) / n;$
3. $x = linspace(a, b, n + 1);$
4. $fd = f(x);$
5. $tektop = sum(fd(3 : 2 : n - 1));$

Bileşik Simpson yöntemi kodu

1. $function\ sonuc = simpson(f, a, b, n)$
2. $h = (b - a)/n;$
3. $x = linspace(a, b, n + 1);$
4. $fd = f(x);$
5. $tektop = sum(fd(3:2:n-1));$
6. $cifttop = sum(fd(2:2:n));$

Bileşik Simpson yöntemi kodu

```
function sonuc = simpson(f, a, b, n)
h = (b - a)/n;
x = linspace(a, b, n + 1);
fd = f(x);
tektop = sum(fd(3 : 2 : n - 1));
cifttop = sum(fd(2 : 2 : n));
toplam = 4 * cifttop + 2 * tektop + (fd(1) + fd(n + 1));
```

Bileşik Simpson yöntemi kodu

```
function sonuc = simpson(f, a, b, n)
h = (b - a)/n;
x = linspace(a, b, n + 1);
fd = f(x);
tektop = sum(fd(3 : 2 : n - 1));
cifttop = sum(fd(2 : 2 : n));
toplam = 4 * cifttop + 2 * tektop + (fd(1) + fd(n + 1));
sonuc = toplam * h/3;
```

Bileşik Simpson yöntemi uygulaması

1. $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu ile $[0, 1]$ aralığı üzerinde farklı n değerleri ile elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmektedir:

Bileşik Simpson yöntemi uygulaması

1. $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu ile $[0, 1]$ aralığı üzerinde farklı n değerleri ile elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmektedir:
2.

n	2	10	100
$simpson(f, 0, 1, n) \doteq$	0.7472	0.7468	0.7468

Bileşik Simpson yöntemi uygulaması

f fonksiyonunun dördüncü türevi

$$f^{(iv)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$$

dir ve grafiği Şekil 1 de sunulmaktadır. $f^{(iv)}(x)$ maksimum değerine $x = 0$ noktasında ulaşır ve bu noktadaki değeri 12 dir(Alıştırma 10).

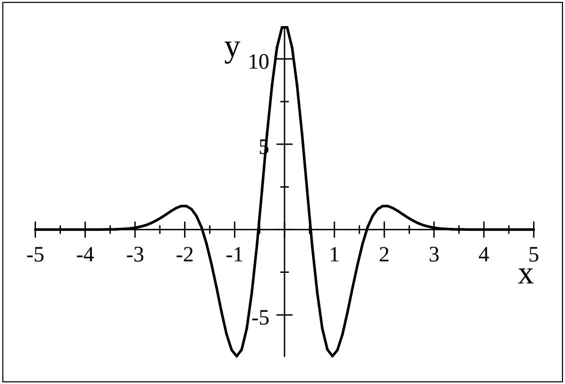

Figure: $f^{iv}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$ fonksiyonunun grafiği

Simpson yöntemi uygulaması

O halde

$$|E_S(f,n)| = |-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(iv)}(c)| = |\frac{(1-0)^2}{180n^4}f^{(iv)}(c)| = \frac{12}{180n^4} \leq 10^{-4}$$

eşitsizliğinden

$$n \geq (\frac{3\times 10^4}{45})^{1/4} \doteq 166.67$$

elde ederiz. O halde hatanın belirtilen değerden küçük olması için *yeter şart* n sayısının $n \geq 168$(alt aralık sayısı çift olmalı!) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Alıştırmalar

1 Yukarıda takip edilen yöntemleri uygulayarak $[a, b]$ aralığının n adet alt aralığa bölünmesiyle uygulanan

- Sağ Dikdörtgen ve
- Orta Nokta yöntemleri için hata ifadelerini elde ediniz
- . Yöntemler hangi hızla gerçek çözüme yakınsamaktadırlar?

2 $f(x) = \cos(4x)$ fonksiyonun $[0, 1]$ aralığındaki integralini en fazla $\varepsilon = 10^{-4}$ hatasıyla belirlemek isteyelim. Buna göre

- Sol Dikdörtgen kuralına göre verilen aralık en az kaç alt aralığa bölünmek suretiyle integrasyon işlemi gerçekleştirilmelidir?
- Yamuk kuralı için minimum alt aralık sayısı ne olmalıdır?
- Simpson kuralı için minimum alt aralık sayısı ne olmalıdır?

Alıştırmalar

3

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

integrali için yukarıda verilen soldikdörtgen yöntemi integral yaklaşım programını düzenleyerek, $n = 2{,}10{,}100{,}1000{,}5000$ değerleri için

- Sağ dikdörtgen yaklaşımlarını hesaplayınız.
- Orta Nokta yaklaşımlarını hesaplayınız.
- Yamuk yaklaşımlarını hesaplayınız.
- Herbir n değeri için hangi yöntemle elde ettiğiniz sonuçlar virgülden sonra beş haneye kadar gerçek olarak kabul edilebilen $0.746\,82$ değerine daha yakındır?
- Herbir yönteme göre hatanın $\varepsilon = 10^{-4}$ den küçük olması için elde edilen en küçük n ne olmalıdır?

Alıştırmalar

4

$$I(f) = \int_0^1 \sin(x^2)dx \simeq 0.310\,27$$

integrali için $n = 2$ alt aralık üzerinde Sol Dikdörtgen, Orta Nokta, Yamuk ve Simpson kuralına göre aşağıdaki yaklaşımlar elde edilmiştir. Hangi yaklaşımın hangi kural ile elde edildiğini belirleyiniz.

- $I(f) = 0.3341$
- $I(f) = 0.1237$
- $I(f) = 0.3052$
- $I(f) = 0.2979$

5 Soru 4 te verilen integrali, belirtilen yöntemlere göre ve $n = 10$ değeri için hesaplatınız. Yöntemleri yaklaşım sonuçlarına göre, en iyi yaklaşımı veren yöntem ilk sırada olmak üzere sıralayınız.

6 Octave ortamında sayısal integral gerçekleştiren iki fonksiyon quadl ve quadgk dır. f fonksiyonu inline fonksiyon olmak üzere kullanımı

$$> \quad > f = inline('\sin(x.\hat{}2)')$$
$$> \quad > quadl(f, 0, 1)$$
$$> \quad > ans = 0.31027$$

örneğinde olduğu gibidir. quadl ve quadgk sayısal integral fonksiyonlarını siz de deneyiniz?

Alıştırmalar

7
$$\int_0^1 \sin(x)dx \doteq 0.4597$$

integralini Sol dikdörtgen, Sağ dikdörtgen, Orta Nokta, Yamuk ve Simpson kuralıyla farklı n değerleri için hesaplayınız. Her bir kural ile yukarıdaki sonucu virgülden sonra üç basamağa kadar elde edebileceğiniz en küçük n değerini belirlemeye çalışınız.

8 Soru 7 yi

$$\int_0^1 \sin(10x)dx \doteq 0.1839$$

ve

$$\int_0^1 \sin(100x)dx \doteq 1.3768 \times 10^{-3}$$

integralleri için de tekrar ediniz. Fonksiyonun integrasyon bölgesi üzerindeki salınım sayısı arttığında, virgülden sonra dört basamağa kadar verilen yaklaşımları elde edebilmek için gerekli alt aralık sayısı her bir yönteme göre nasıl değişmektedir?

Alıştırmalar

9 $[a, b]$ aralığında tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun bu aralık üzerindeki yay uzunluğunun

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

belirli integrali ile tanımlandığını hatırlayalım. Buna göre aşağıdaki fonksiyonların karşılarında verilen aralıklar üzerinde ve önceden hesaplanmış yay uzunluklarını bileşik Simpson yöntemi yardımıyla elde edebileceğiniz en küçük çift n değerini hesaplayınız.

- $y = x^2, [0, 1], 1.4789$
- $y = x^3, [0, 1], 1.547\,9$
- $y = \sin(x), [0, \pi], 3.8202$
- $y = \sin(2x), [0, \pi], 5.2704$

10
$$f(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$$
fonksiyonunun maksimumuna $x = 0$ noktasında ulaştığını gösteriniz ve maksimum değerini belirleyiniz.

11 (Grup Projesi) Yukarıdaki alıştırmalardan da gözlemleyeceğiniz gibi, herhangi bir bileşik yöntemin uygulanmasında alt aralık sayısının seçimi sonucu önemli ölçüde etkilemektedir. Öte yandan yöntemler kullanılacak olan alt aralık sayısı seçimini kullanıcıya bırakmaktadırlar. Bu projede en uygun alt aralık sayısının nasıl tahmin edilebileceğini inceliyoruz. Akla gelen ilk yaklaşım şöyle olabilir:

Alıştırmalar

- Yöntemi ilk olarak verilen aralığı $n = 10$ alt aralığa bölerek yöntemi uygulayalım, daha sonra $n = 20$ alt aralığa bölerek uygulayıp her bir durumda elde edilen yaklaşımlar arasındaki mutlak farkı hesaplayınız.
- Eğer söz konusu fark belirleyeceğiniz bir toleranstan(örneğin $\epsilon = 10^{-5}$) küçük ise elde ettiğiniz son yaklaşımı geçerli yaklaşım olarak kabul ediniz.
- Elde edilen yaklaşım belirtilen toleranstan küçük değilse alt aralık sayısını tekrar iki katına çıkararak işlemleri tekrar ediniz.
- (a)-(c) adımlarında özetlenenen yöntemi uyguladıktan sonra avantaj ve dezavantajlarını değerlendirerek, daha iyi bir yöntemin nasıl geliştirilebileceğini tartışınız.

Kaynaklar

- Coşkun, E. MATLAB/Octave ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:erhancoskun.com.tr).
- Davis, P., Rabinowitz, P., Methods of Numerical Integration, Academic Press, 1984.
- OCTAVE, GNU özgür yazılım(*URL:OCTAVE.sourceforge.net*).
- Stoer, J., Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1976.