Sayısal integrasyon için yüksek basamaktan iteratif yaklaşımlar

Prof. Dr. Erhan Coşkun

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Eylül 2020

Yüksek basamaktan iteratif yaklaşımlar

Bu bölümde

- bilinen düşük mertebeli yöntemlerden iterasyon yöntemi ile yüksek mertebeli yöntemlerin nasıl elde edildiğini inceliyor ve

Yüksek basamaktan iteratif yaklaşımlar

Bu bölümde

- bilinen düşük mertebeli yöntemlerden iterasyon yöntemi ile yüksek mertebeli yöntemlerin nasıl elde edildiğini inceliyor ve
- eşit aralıklı olmayan ağ üretimi ve bu tür ağlar üzerinde sayısal integrasyonu inceliyoruz.
  Bu çalışma "MATLAB/Octave Uygulamalarıyla Sayısal Analize Giriş" isimli çalışmamızın sekizinci bölümüne ait "yüksek mertebeden iteratif yöntemler" isimli başlığından oluşturmaktadır. Konuyla ilgili ileri düzey araştırma için bölüm sonunda sunduğumuz değerli kaynakları öneririz.

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Sol Dikdörtgen veya Yamuk gibi düşük basamaklı yöntemlerden farklı adım uzunlukları ile oluşturulan uygun lineer kombinasyonlar yardımıyla daha yüksek basamaktan yöntemler elde edebiliriz: Örneğin Sol Dikdörtgen yönteminin farklı adım uzunlukları ile oluşturulan aşağıdaki lineer kombinasyon Orta Nokta yöntemine eşittir:

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Sol Dikdörtgen veya Yamuk gibi düşük basamaklı yöntemlerden farklı adım uzunlukları ile oluşturulan uygun lineer kombinasyonlar yardımıyla daha yüksek basamaktan yöntemler elde edebiliriz: Örneğin Sol Dikdörtgen yönteminin farklı adım uzunlukları ile oluşturulan aşağıdaki lineer kombinasyon Orta Nokta yöntemine eşittir:
- $$I_{ort}(f, 2h) = 2I_{sol}(f, h) - I_{sol}(f, 2h)$$

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Sol Dikdörtgen veya Yamuk gibi düşük basamaklı yöntemlerden farklı adım uzunlukları ile oluşturulan uygun lineer kombinasyonlar yardımıyla daha yüksek basamaktan yöntemler elde edebiliriz: Örneğin Sol Dikdörtgen yönteminin farklı adım uzunlukları ile oluşturulan aşağıdaki lineer kombinasyon Orta Nokta yöntemine eşittir:
-
$$I_{ort}(f, 2h) = 2I_{sol}(f, h) - I_{sol}(f, 2h)$$
- Gerçekten de

$$I_{sol}(f, h) = h(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_N))$$

ve

$$I_{sol}(f, 2h) = 2h(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{N-1}))$$

yaklaşımlarından

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Bu sonucu daha somut bir örnek üzerinde gözlemlemeye çalışalım:

$$[a, b] = [0, 1], h = 1/10$$

olsun. Bu durumda alt aralıkların uç noktaları

$$x = [0, 1/10, 2/10, ..., 9/10, 1]$$

olup

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Bu sonucu daha somut bir örnek üzerinde gözlemlemeye çalışalım:

$$[a, b] = [0, 1], h = 1/10$$

olsun. Bu durumda alt aralıkların uç noktaları

$$x = [0, 1/10, 2/10, ..., 9/10, 1]$$

olup

- $$I_{sol}(f, 2h) = I_{sol}(f, 1/5) = 1/5(f(0) + f(1/5) + ... + f(4/5)) \quad (1)$$

dir.

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Öte yandan

$$\begin{aligned} I_{sol}(f,h) &= I_{sol}(f,1/10) \\ &= 1/10(f(0)+f(1/10)+...+f(9/10)) \end{aligned} \tag{2}$$

dir. O halde (2) i iki ile çarpıp, (1) ile toplamak suretiyle

$$2I_{sol}(f,h) - I_{sol}(f,2h) = 1/5(f(1/10)+f(3/10)+...+f(9/10))$$

elde ederiz ki bu yöntem $2h = 1/5$ adım uzunluğu ile Orta Nokta yöntemi, yani $I_{ort}(f,2h)$ dir.

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Orta Nokta yönteminin yerel hatası

$$E_{ort}(f,h) = \frac{h^3}{24} f''(c), c\epsilon(a,b) \tag{3}$$

ve kümülatif hatası ise

$$\begin{aligned} E_{ort}(f,h) &= \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c), c\epsilon(a,b) \\ &= \frac{(b-a)}{24} h^2 f''(c), c\epsilon(a,b) \\ &= O(h^2) \end{aligned} \tag{4}$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

Teorem 1.

$\int_a^b f(x)dx$ *integralini gözönüne alalım.*

$$S(i,1), i = 1, 2, ...$$

ile $[a,b]$ *aralığının* 2^{i-1} $,i = 1, 2, ...$ *alt aralığa bölünmesi suretiyle uygulanan sol dikdörtgen kuralı yaklaşımlarını gösterelim:*

$$S(i,1) := I_{sol}(f, \frac{b-a}{2^{i-1}}), i = 1, 2, ...$$

Bu taktirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $$S(i,2) := I_{ort}(f, \frac{b-a}{2^{i-2}}) = 2S(i,1) - S(i-1,1), i = 2, 3, ...$$

  yaklaşımları kümülatif hatası $O(h^2)$ olan yaklaşımlardır.

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $$S(i,2) := I_{ort}(f, \frac{b-a}{2^{i-2}}) = 2S(i,1) - S(i-1,1), i = 2,3,...$$

  yaklaşımları kümülatif hatası $O(h^2)$ olan yaklaşımlardır.

- $$S(i,j) := \frac{4^{j-2}S(i,j-1) - S(i-1,j-1)}{4^{j-2}-1}, i = 3,4,...; j = i, i+1,...$$

  yaklaşımları ise, kümülatif hataları $O(h^{2(j-1)})$ olan yaklaşımlardır.Yukarıda tanımlanan dizinin başlangıç elemanları aşağıdaki tabloda sunulmaktadır.

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Sol dikdörtgen yöntemi esaslı yüksek basamaktan iteratif yaklaşımlar tablosu

Sol D.	Orta Nokta	$O(h^4)$	$O(h^6)$
$S(1,1)$			
$S(2,1)$	$S(2,2) = 2S(2,1) - S(1,1)$		
$S(3,1)$	$S(3,2) = 2S(3,1) - S(2,1)$	A	
$S(4,1)$	$S(4,2) = 2S(4,1) - S(3,1)$	B	C

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

-

Sol dikdörtgen yöntemi esaslı yüksek basamaktan iteratif yaklaşımlar tablosu			
Sol D.	Orta Nokta	$O(h^4)$	$O(h^6)$
$S(1,1)$			
$S(2,1)$	$S(2,2) = 2S(2,1) - S(1,1)$		
$S(3,1)$	$S(3,2) = 2S(3,1) - S(2,1)$	A	
$S(4,1)$	$S(4,2) = 2S(4,1) - S(3,1)$	B	C

- burada

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

-

Sol dikdörtgen yöntemi esaslı yüksek basamaktan iteratif yaklaşımlar tablosu			
Sol D.	Orta Nokta	$O(h^4)$	$O(h^6)$
$S(1,1)$			
$S(2,1)$	$S(2,2) = 2S(2,1) - S(1,1)$		
$S(3,1)$	$S(3,2) = 2S(3,1) - S(2,1)$	A	
$S(4,1)$	$S(4,2) = 2S(4,1) - S(3,1)$	B	C

- burada
- $A = S(3,3) = (4S(3,2) - S(2,2)/3$

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Sol dikdörtgen yöntemi esaslı yüksek basamaktan iteratif yaklaşımlar tablosu

Sol D.	Orta Nokta	$O(h^4)$	$O(h^6)$
$S(1,1)$			
$S(2,1)$	$S(2,2) = 2S(2,1) - S(1,1)$		
$S(3,1)$	$S(3,2) = 2S(3,1) - S(2,1)$	A	
$S(4,1)$	$S(4,2) = 2S(4,1) - S(3,1)$	B	C

- burada
- $A = S(3,3) = (4S(3,2) - S(2,2)/3$
- $B = S(4,3) = (4S(4,2) - S(3,2)/3$

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

-

Sol dikdörtgen yöntemi esaslı yüksek basamaktan iteratif yaklaşımlar tablosu			
Sol D.	Orta Nokta	$O(h^4)$	$O(h^6)$
$S(1,1)$			
$S(2,1)$	$S(2,2) = 2S(2,1) - S(1,1)$		
$S(3,1)$	$S(3,2) = 2S(3,1) - S(2,1)$	A	
$S(4,1)$	$S(4,2) = 2S(4,1) - S(3,1)$	B	C

- burada
- $A = S(3,3) = (4S(3,2) - S(2,2)/3$
- $B = S(4,3) = (4S(4,2) - S(3,2)/3$
- $C = S(4,4) =(16S(4,3) - S(3,3))/15$

İspat:

- $S(i,2), i = 2, 3, ...$ yaklaşımlarının kümülatif hataları $O(h^2)$ olan orta nokta yaklaşımları olduklarını yukarıda gözlemlemiştik. İlk olarak $S(i,3)$ yaklaşımlarının kümülatif hatalarının $O(h^4)$ olduğunu göstereceğiz.

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

İspat:

- $S(i,2), i = 2,3,\ldots$ yaklaşımlarının kümülatif hataları $O(h^2)$ olan orta nokta yaklaşımları olduklarını yukarıda gözlemlemiştik. İlk olarak $S(i,3)$ yaklaşımlarının kümülatif hatalarının $O(h^4)$ olduğunu göstereceğiz.
- Öncelikle $S(3,3)$ yaklaşımını dikkate alarak, yöntemin yerel hatasını elde etmeye çalışalım. Açık olarak ifade edecek olursak, $h = (b-a)/2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S(3,3) &= \frac{4S(3,2) - S(2,2)}{3} \\ &= \frac{4h\left(f(a+h/2) + f(a+3h/2)\right) - 2hf(a+h)}{3} \\ &= \frac{2(b-a)}{3}\left(f(a+h/2) - 1/2f(a+h) + f(a+3h/2)\right) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Yeteri düzeyde türevlenebilir olduğunu kabul ederek, f fonksiyonunun önce $x = a$ noktası komşuluğunda Taylor açılımını gerçekleştirip, ardından da integral almak suretiyle

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Yeteri düzeyde türevlenebilir olduğunu kabul ederek, f fonksiyonunun önce $x = a$ noktası komşuluğunda Taylor açılımını gerçekleştirip, ardından da integral almak suretiyle
-

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)dx \\ = \; & 2hf(a) + 2h^2 f'(a) + 4/3h^3 f''(a) \\ & +2/3h^4 f'''(a) + 4/15h^5 f^{(iv)}(a) + \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

elde ederiz.

- Yeteri düzeyde türevlenebilir olduğunu kabul ederek, f fonksiyonunun önce $x = a$ noktası komşuluğunda Taylor açılımını gerçekleştirip, ardından da integral almak suretiyle
- $$\begin{aligned} &\int_a^b f(x)dx \qquad (5) \\ = \; & 2hf(a) + 2h^2 f'(a) + 4/3h^3 f''(a) \\ & + 2/3h^4 f'''(a) + 4/15h^5 f^{(iv)}(a) + \ldots \end{aligned}$$

  elde ederiz.
- Benzer biçimde yine $x = a$ noktası komşuluğundaki Taylor açılımı yardımıyla

  $$\begin{aligned} & (f(a+h/2) - 1/2f(a+h) + f(a+3h/2)) \\ = \; & 3/2f(a) + (3/2h)f'(a) + h^2 f''(a) \\ & + h^3/2f'''(a) + 74/384h^4 f^{(iv)}(a) + \ldots \end{aligned}$$

  elde ederiz.

- O halde

$$
\begin{aligned}
& S(3,3) \\
= \; & \frac{2(b-a)}{3}\left(f(a+h/2) - 1/2f(a+h) + f(a+3h/2)\right) \\
= \; & 2hf(a) + 2h^2 f'(a) + 4/3h^3 f''(a) \\
& +2/3h^4 f'''(a) + 37/144h^5 f^{(iv)}(a) + \ldots
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- O halde

$$\begin{aligned}
& S(3,3) \\
= \quad & \frac{2(b-a)}{3}\left(f(a+h/2) - 1/2 f(a+h) + f(a+3h/2)\right) \\
= \quad & 2hf(a) + 2h^2 f'(a) + 4/3h^3 f''(a) \\
& +2/3h^4 f'''(a) + 37/144 h^5 f^{(iv)}(a) + \ldots
\end{aligned}$$

  elde ederiz.
- Buradan

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx - S(3,3) &= (4/15 - 37/144)h^5 f^{(iv)}(a) + \ldots \\
&= ch^5 f^{(iv)}(\xi), \xi \in (a,b) \qquad (6)
\end{aligned}$$

  elde ederiz.

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- O halde

$$
\begin{aligned}
& S(3,3) \\
= \; & \frac{2(b-a)}{3}\left(f(a+h/2) - 1/2f(a+h) + f(a+3h/2)\right) \\
= \; & 2hf(a) + 2h^2 f'(a) + 4/3h^3 f''(a) \\
& +2/3h^4 f'''(a) + 37/144h^5 f^{(iv)}(a) + \ldots
\end{aligned}
$$

  elde ederiz.
- Buradan

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx - S(3,3) &= (4/15 - 37/144)h^5 f^{(iv)}(a) + \ldots \\
&= ch^5 f^{(iv)}(\xi), \xi \in (a,b) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

  elde ederiz.
- (6) Dördüncü türevi sabit olan, örneğin $f(x) = x^4$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı üzerindeki integrali yardımıyla (6) deki hata sabitini

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $$\begin{aligned} E_Y(f) &= I(f) - S(3,3) \\ &= \int_0^1 x^4 dx - 2/3(f(1/4) - 1/2f(1/2) + f(0+3/4)) \\ &= 1/5 - 2/3 \times (1/256 - 1/2 \times 1/16 + 81/256) \\ &= 7/960 = c \times \frac{1}{32} \times 24 \end{aligned}$$

  bağıntısından, $c = \frac{32\times7}{24\times960} = 7/720$ olup, yöntemin yerel hatasını

  $$E_{S(3,3)}(f, h = (b-a)/2) = 7/720h^5 f^{(iv)}(\xi), \xi \in (a, b)$$

  olarak elde ederiz.

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $$\begin{aligned} E_Y(f) &= I(f) - S(3,3) \\ &= \int_0^1 x^4 dx - 2/3(f(1/4) - 1/2f(1/2) + f(0+3/4)) \\ &= 1/5 - 2/3 \times (1/256 - 1/2 \times 1/16 + 81/256) \\ &= 7/960 = c \times \frac{1}{32} \times 24 \end{aligned}$$

  bağıntısından, $c = \frac{32\times7}{24\times960} = 7/720$ olup, yöntemin yerel hatasını

  $$E_{S(3,3)}(f, h = (b-a)/2) = 7/720 h^5 f^{(iv)}(\xi), \xi \in (a,b)$$

  olarak elde ederiz.
- Buradan $S(i,3), i = 4, 5, \ldots$ yöntemlerinin kümülatif hatasını ise, $n/2$ adet yerel hatanın toplamı olarak

  $$\begin{aligned} E_{S(i,3)}(f, (b-a)/n) &= 7/1440(b-a)^5/n^4 f^{(iv)}(\xi), \xi \in (a,b) \\ &= O(h^4) \end{aligned}$$

- Benzer biçimde $E_{S(4,4)}(f,h) = O(h^7)$ olduğu ve bileşik yöntemler için ise $E_{S(i,4)}(f,h) = O(h^6), i = 5, 6, ...; n = 4, 6, ...$ gösterilebilir.(Alıştırma 11)

- Benzer biçimde $E_{S(4,4)}(f,h) = O(h^7)$ olduğu ve bileşik yöntemler için ise $E_{S(i,4)}(f,h) = O(h^6)$, $i = 5, 6, ...; n = 4, 6, ...$ gösterilebilir.(Alıştırma 11)
- O halde $E_{S(i,2)} = O(h^2), E_{S(i,3)} = O(h^4), E_{S(i,4)} = O(h^6)$ gözlemlerinde hareketle, tümevarım gereği kümülatif hatanın h nın *çift* kuvvetleri cinsinden

$$\begin{aligned} I(f) - S(i,j) &= E_{S(i,j)} \\ &= c_1 h^{2(j-1)} f^{(2(j-1))}(a) + c_2 h^{2j} f^{(2j)}(a) + ..., j = 2, 3, ... \end{aligned} \tag{7}$$

olarak ifade edildiğini kabul edelim. Bu taktirde $i- > i+1$(veya $h- > h/2$) için

- $$\begin{aligned} & I(f) - S(i+1, j) \\ = \quad & E_{S(i+1,j)} = c_1 \frac{h^{2(j-1)}}{2^{2(j-1)}} f^{(2(j-1))}(a) + c_2 h^{2j} f^{(2j)}(a) + \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

  elde ederiz.

-
$$\begin{aligned} & I(f) - S(i+1,j) \\ = \quad & E_{S(i+1,j)} = c_1 \frac{h^{2(j-1)}}{2^{2(j-1)}} f^{(2(j-1))}(a) + c_2 h^{2j} f^{(2j)}(a) + \dots \end{aligned} \tag{8}$$

  elde ederiz.

- 8 ifadesini $2^{2(j-1)} = 4^{j-1}$ ile çarpıp, 7 den farkını almak suretiyle

$$\begin{aligned} 4^{j-1} E_{S(i+1,j)} - E_{S(i,j)} &= (4^{j-1}(c_2 h^{2j} f^{(2j)}(a) + \dots) - (c_2 h^{2j} f^{(2j)}(a) + \\ &= O(h^{2j}) \end{aligned}$$

  veya

$$E_{S(i+1,j+1)} = \frac{4^{j-1} E_{S(i+1,j)} - E_{S(i,j)}}{4^{j-1}} = O(h^{2j})$$

  elde ederiz.

Örnek 1.

$g(x) = \sin(x)$ *fonksiyonun* $[0, 1]$ *aralığındaki yay uzunluğu*

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \cos(x)^2} dx$$

dir. Buna göre söz konusu integral için yukarıda tanımlanan $S(i, j), i, j = 1, 2, 3$ *yaklaşımlarını hesaplayınız.*

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $[0,1]$ aralığında uygulanan basit sol dikdörtgen kuralı olarak, $f(x) = \sqrt{1+\cos(x)^2}$ ile

  $$S(1,1) = hf(0) = f(0) = \sqrt{2} = 1.414213562373095$$

  dir.

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $[0, 1]$ aralığında uygulanan basit sol dikdörtgen kuralı olarak, $f(x) = \sqrt{1 + \cos(x)^2}$ ile

$$S(1,1) = hf(0) = f(0) = \sqrt{2} = 1.414213562373095$$

  dir.

- $[0, 1]$ aralığının iki alt aralığa bölünmesiyle uygulanan sol dikdörtgen kuralı olarak, $h = 1/2$,$x_1 = 0, x_2 = 1/2$ değerleri ile

$$\begin{aligned} S(2,1) &= h(f(x_1) + f(x_2)) \\ &= 1/2 \times (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos(1/2)^2}) = 1.372341918738314 \end{aligned}$$

  dir.

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $[0, 1]$ aralığının dört alt aralığa bölünmesiyle uygulanan sol dikdörtgen kuralı olarak,

$$h = 1/4, x_1 = 0, x_2 = 1/4, x_3 = 1/2, x_4 = 3/4$$

değerleri ile

$$\begin{aligned} S(3,1) &= h(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)) \\ &= 1/4 \times (f(0) + f(1/4) + f(1/2) + f(3/4)) \\ &= 1.344047152082966 \end{aligned}$$

dir.

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $[0, 1]$ aralığının dört alt aralığa bölünmesiyle uygulanan sol dikdörtgen kuralı olarak,

$$h = 1/4, x_1 = 0, x_2 = 1/4, x_3 = 1/2, x_4 = 3/4$$

değerleri ile

$$\begin{aligned} S(3,1) &= h(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)) \\ &= 1/4 \times (f(0) + f(1/4) + f(1/2) + f(3/4)) \\ &= 1.344047152082966 \end{aligned}$$

dir.

- $[0, 1]$ aralığının sekiz alt aralığa bölünmesiyle uygulanan sol dikdörtgen kuralı olarak,

$$h = 1/8, x_1 = 0, x_2 = 1/8, ..., x_8 = 7/8$$

değerleri ile $S(4, 1) = 1.328270049119772$ elde ederiz. O halde elde edilen bu yaklaşım değerlerinden aşağıdaki ortanokta yaklaşımlarını elde edebiliriz

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $S(2,2) = 2 \times S(2,1) - S(1,1) = 1.330470275103533$

- $S(2,2) = 2 \times S(2,1) - S(1,1) = 1.330470275103533$
- $S(3,2) = 2 \times S(3,1) - S(2,1) = 1.315752385427619$

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $S(2,2) = 2 \times S(2,1) - S(1,1) = 1.330470275103533$
- $S(3,2) = 2 \times S(3,1) - S(2,1) = 1.315752385427619$
- $S(4,2) = 2 \times S(4,1) - S(3,1) = 1.312492946156577$

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $S(2,2) = 2 \times S(2,1) - S(1,1) = 1.330470275103533$
- $S(3,2) = 2 \times S(3,1) - S(2,1) = 1.315752385427619$
- $S(4,2) = 2 \times S(4,1) - S(3,1) = 1.312492946156577$
- Ayrıca elde edilen orta nokta yaklaşımları yardımıyla

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $S(2,2) = 2 \times S(2,1) - S(1,1) = 1.330470275103533$
- $S(3,2) = 2 \times S(3,1) - S(2,1) = 1.315752385427619$
- $S(4,2) = 2 \times S(4,1) - S(3,1) = 1.312492946156577$
- Ayrıca elde edilen orta nokta yaklaşımları yardımıyla
- $S(3,3) = \frac{4 \times S(3,2) - S(2,2)}{3} = 1.310846422202314$

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $S(2,2) = 2 \times S(2,1) - S(1,1) = 1.330470275103533$
- $S(3,2) = 2 \times S(3,1) - S(2,1) = 1.315752385427619$
- $S(4,2) = 2 \times S(4,1) - S(3,1) = 1.312492946156577$
- Ayrıca elde edilen orta nokta yaklaşımları yardımıyla
- $S(3,3) = \frac{4 \times S(3,2) - S(2,2)}{3} = 1.310846422202314$
- $S(4,3) = \frac{4 \times S(4,2) - S(3,2)}{3} = 1.311406466399563$

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Son olarak
  $S(4,4) = \frac{16 \times S(4,3) - S(3,3)}{15} = 1.311443802679379$
  yaklaşımını elde ederiz.
  MATLAB veya Octave quadl fonksiyonu ile elde edilen yaklaşım değeri ise **1.311442**498208092 dir. Bu yaklaşımları tablo halinde sunmak daha uygundur:

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

$\int_0^1 \sqrt{1+\cos(x)^2}dx$ için Sol dikdörtgen esaslı iteratif yaklaşımları			
Sol Diktörtgen	Orta Nokta	$O(h^4)$	$O(h^6)$
1.414213562373095			
1.372341918738314	1.330470275103533		
1.344047152082966	1.315752385427619	A	
1.328270049119772	1.312492946156577	B	C

Sol Dikdörtgen tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

-

$\int_0^1 \sqrt{1+\cos(x)^2}dx$ için Sol dikdörtgen esaslı iteratif yaklaşımları			
Sol Diktörtgen	Orta Nokta	$O(h^4)$	$O(h^6)$
1.414213562373095			
1.372341918738314	1.330470275103533		
1.344047152082966	1.315752385427619	A	
1.328270049119772	1.312492946156577	B	C

- $A = 1.310846422202314$, $B = 1.311406466399563$, $C = 1.311443802$

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Sol dikdörtgen yöntemi esaslı ardışık yöntemlere benzer biçimde Yamuk yöntemini esas alan ardışık ve yüksek basamaktan yöntemler türetilebilir:

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Sol dikdörtgen yöntemi esaslı ardışık yöntemlere benzer biçimde Yamuk yöntemini esas alan ardışık ve yüksek basamaktan yöntemler türetilebilir:
- Yamuk yönteminden h ve $2h$ adım uzunlukları ile oluşturulan aşağıdaki lineer kombinasyon $I_S(f,h)$ ile göstereceğimiz Simpson yöntemine eşittir:

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Sol dikdörtgen yöntemi esaslı ardışık yöntemlere benzer biçimde Yamuk yöntemini esas alan ardışık ve yüksek basamaktan yöntemler türetilebilir:
- Yamuk yönteminden h ve $2h$ adım uzunlukları ile oluşturulan aşağıdaki lineer kombinasyon $I_S(f,h)$ ile göstereceğimiz Simpson yöntemine eşittir:
- $$I_S(f,h) = \frac{4I_Y(f,h) - I_Y(f,2h)}{3}$$

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Gerçekten de $h = 1/10$ için

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Gerçekten de $h = 1/10$ için
- $$I_Y(f,h) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}f(0) + f(1/10) + \ldots + f(9/10) + \frac{1}{2}f(1)\right)$$

  olup,

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Gerçekten de $h = 1/10$ için
- $$I_Y(f,h) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}f(0) + f(1/10) + \ldots + f(9/10) + \frac{1}{2}f(1)\right)$$

  olup,
- $$4I_Y(f,h) = \frac{2}{10}f(0) + \frac{2}{5}f(1/10) + \ldots + \frac{2}{5}f(9/10) + \frac{2}{10}f(1)$$

  dir.

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- Gerçekten de $h = 1/10$ için
- $$I_Y(f,h) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}f(0) + f(1/10) + ... + f(9/10) + \frac{1}{2}f(1)\right)$$
  olup,
- $$4I_Y(f,h) = \frac{2}{10}f(0) + \frac{2}{5}f(1/10) + ... + \frac{2}{5}f(9/10) + \frac{2}{10}f(1)$$
  dir.
- Öteyandan
  $$I_Y(f,2h) = \frac{1}{10}f(0) + \frac{1}{5}f(2/10) + \frac{1}{5}f(4/10) + ... + \frac{1}{10}f(1)$$
  dır ve buradan

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $$\begin{aligned} & 4I_Y(f,h) - I_Y(f,2h) \\ = & \frac{1}{10}f(0) + \frac{2}{5}f(1/10) + \frac{1}{5}f(2/10) + \frac{2}{5}f(3/10) + ... + \frac{1}{10}f(1) \\ = & \frac{1}{10}(f(0) + 4f(1/10) + 2f(2/10) + 4f(3/10) + ... + f(1)) \end{aligned}$$

  veya

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $$\begin{aligned} & 4I_Y(f,h) - I_Y(f,2h) \\ = & \frac{1}{10}f(0) + \frac{2}{5}f(1/10) + \frac{1}{5}f(2/10) + \frac{2}{5}f(3/10) + \ldots + \frac{1}{10}f(1) \\ = & \frac{1}{10}(f(0) + 4f(1/10) + 2f(2/10) + 4f(3/10) + \ldots + f(1)) \end{aligned}$$

  veya

- $$\begin{aligned} & \frac{4I_Y(f,h) - I_Y(f,2h)}{3} \\ = & \frac{h}{3}(f(0) + 4f(h) + 2f(2h) + 4f(3h) + \ldots + f(1)) = I_S(f,h) \end{aligned}$$

  elde ederiz.

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

Teorem 2.

$\int_a^b f(x)dx$ *integralini gözönüne alalım.*

$$R(i,1), i = 1, 2, ...$$

ile $[a,b]$ *aralığının* 2^{i-1} ,$i = 1, 2, ...$ *alt aralığa bölünmesi suretiyle uygulanan Yamuk kuralı yaklaşımlarını gösterelim:*

$$R(i,1) := I_Y(f, \frac{b-a}{2^{i-1}}), i = 1, 2, ...$$

olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- $$R(i,2) := \frac{4R(i,1) - R(i-1,1)}{3}, i = 2, 3, \ldots$$

  yaklaşımları kümülatif hatası $O(h^4)$ olan Simpson yaklaşımlardır.

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $$R(i,2) := \frac{4R(i,1) - R(i-1,1)}{3}, i = 2, 3, \ldots$$

  yaklaşımları kümülatif hatası $O(h^4)$ olan Simpson yaklaşımlardır.

- $$R(i,j) := \frac{4^{j-2}R(i,j-1) - R(i-1,j-1)}{4^{j-2} - 1}, i = 3, 4, \ldots; j = i, i+1, \ldots$$

  yaklaşımları ise, kümülatif hataları $O(h^{2(j-1)})$ olan yaklaşımlardır. $R(i,j)$ yaklaşımlarına Romberg yaklaşımları adı verilir.

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $$R(i,2) := \frac{4R(i,1) - R(i-1,1)}{3}, i = 2, 3, ...$$

  yaklaşımları kümülatif hatası $O(h^4)$ olan Simpson yaklaşımlardır.

- $$R(i,j) := \frac{4^{j-2}R(i,j-1) - R(i-1,j-1)}{4^{j-2} - 1}, i = 3, 4, ...; j = i, i+1, ...$$

  yaklaşımları ise, kümülatif hataları $O(h^{2(j-1)})$ olan yaklaşımlardır. $R(i,j)$ yaklaşımlarına Romberg yaklaşımları adı verilir.

- İspat için ders notlarına bakınız.

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

Örnek 2.

Örnek 1 deki integral için yukarıda tanımlanan $R(i,j), i,j = 1,2,3$ yaklaşımlarını hesaplayınız.

- $[0,1]$ aralığında uygulanan basit yamuk kuralı olarak, $f(x) = \sqrt{1+\cos(x)^2}$ ile

$$R(1,1) = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) = 1.27542152270889$$

dir.

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $[0,1]$ aralığının iki alt aralığa bölünmesiyle uygulanan Yamuk kuralı olarak,

$$h = 1/2, x_1 = 0, x_2 = 1/2, x_3 = 1$$

değerleri ile

$$\begin{aligned} R(2,1) &= h(\frac{1}{2}f(x_1) + f(x_2) + \frac{1}{2}f(x_3)) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}f(0) + f(1/2) + \frac{1}{2}f(1)) \\ &= 1.302945898906212 \end{aligned}$$

dir.

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $[0,1]$ aralığının dört alt aralığa bölünmesiyle uygulanan sol dikdörtgen kuralı olarak,

$$h = 1/4, x_1 = 0, x_2 = 1/4, x_3 = 1/2, x_4 = 3/4, x_5 = 1$$

değerleri ile

$$\begin{aligned} R(3,1) &= h(\frac{1}{2}f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \frac{1}{2}f(x_5)) \\ &= \frac{1}{4}(\frac{1}{2}f(0) + f(1/4) + f(1/2) + f(3/4) + \frac{1}{2}f(1)) \\ &= 1.309349142166915 \end{aligned}$$

dir.

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $R(2,2) = \frac{4 \times R(2,1) - R(1,1)}{3} = 1.312120690971986$

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $R(2,2) = \frac{4 \times R(2,1) - R(1,1)}{3} = 1.312120690971986$
- $R(3,2) = \frac{4 \times R(3,1) - R(2,1)}{3} = 1.311483556587149$

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $R(2,2) = \frac{4 \times R(2,1) - R(1,1)}{3} = 1.312120690971986$
- $R(3,2) = \frac{4 \times R(3,1) - R(2,1)}{3} = 1.311483556587149$
- $R(3,3) = \frac{16 \times R(3,2) - R(2,2)}{15} = 1.311441080961493$

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

- $R(2,2) = \frac{4 \times R(2,1) - R(1,1)}{3} = 1.312120690971986$
- $R(3,2) = \frac{4 \times R(3,1) - R(2,1)}{3} = 1.311483556587149$
- $R(3,3) = \frac{16 \times R(3,2) - R(2,2)}{15} = 1.311441080961493$
- Bu yaklaşımları tablo halinde sunmak daha uygundur. $j = 3$ için elde edilen yaklaşımlar Boole yaklaşımları olarak adlandırılırlar:

Yamuk yöntemi tabanlı yüksek basamaktan yaklaşımlar

$\int_0^1 \sqrt{1+\cos(x)^2}dx$ için Yamuk yöntemi esaslı Romberg yaklaşımları			
	Yamuk	Simpson	Boole
i	$R(i,1)$	$R(i,2)$	$R(i,3)$
1	1.275421522708890		
2	1.302945898906212	1.312120690971986	
3	1.311441080961493	1.311483556587149	1.311441080961493

1 Verilen f fonksiyonu ve $[a, b]$ aralığı için yukarıda tanımlanan Sol Dikdörtgen tabanlı $\mathrm{S(i, j)}$ yaklaşımlarını hesaplayan bir MATLAB/Octave programı hazırlayınız.

2 Soru 1 de hazırladığınız program yardımıyla

$$\int_0^1 \sqrt{1+\sin(x)^2}\,dx$$

integraline ait aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri Sol Dikdörtgen tabanlı uygun iteratif yaklaşımlar yardımıyla doldurunuz.

Sol Dikdörtgen yöntemi esaslı iteratif yaklaşımlar tablosu			
	Sol Dikdörtgen	Orta Nokta	
i	$S(i,1)$	$S(i,2)$	$S(i,3)$
1	1.000000000000000		
2	—	1.108985503541832	
3	—	—	1.123917778305376

Alıştırmalar

3 Verilen f fonksiyonu ve $[a, b]$ aralığı için yukarıda tanımlanan Yamuk yöntemi tabanlı $R(i, j)$ yaklaşımlarını hesaplayan bir MATLAB/Octave programı hazırlayınız.

4 Soru 3 de hazırladığınız program yardımıyla soru 2 de verilen integral için aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri Yamuk yöntemi tabanlı uygun iteratif yaklaşımlar yardımıyla doldurunuz.

Yamuk yöntemi tabanlı Romberg yaklaşımlar tablosu			
	Yamuk	Simpson	Boole
i	$R(i, 1)$	$R(i, 2)$	$R(i, 3)$
1	1.153466414261967		
2	1.131225958901899		
3	—	1.123865126043627	1.123868636194410

5 $\int_0^1 \sin(x^3)dx$ integraline ait aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri Sol Dikdörtgen tabanlı uygun iteratif yaklaşımlar yardımıyla doldurunuz.

Sol Dikdörtgen tabanlı iteratif yaklaşımlar				
	Sol Dikdörtgen	Orta Nokta		
i	S(i, 1)	S(i, 2)	S(i, 3)	S(i, 4)
1	0			
2	0.0623	—		
3	0.1374	—	—	
4	0.1834	—	—	—

Alıştırmalar

6

$$\int_0^1 \sin(x^3)\,dx$$

integraline ait aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri Yamuk yöntemi esaslı uygun Romberg iteratif yaklaşımları yardımıyla doldurunuz.

Yamuk tabanlı iteratif Romberg yaklaşımları				
	Yamuk	Simpson	Boole	
i	R(i, 1)	R(i, 2)	R(i, 3)	R(i, 4)
1	0.4207			
2	0.2727	—		
3	0.2426	—	—	
4	0.2360	—	—	0.2338

Alıştırmalar

7 Yukarıdaki örneklerden hareketle $S(i,j)$ ve $R(i,j)$ yaklaşımlarını *quadl* fonksiyonu yardımıyla elde edeceğiniz sayısal yaklaşımlarla karşılaştırınız. Ne gözlemliyorsunuz?

8

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx = 3/4$$

integrali için

$$E_{S(i,j)} = |3/4 - S(i,j)|$$

hata tablosu aşağıda verilmektedir. Hata tablosunun sütunlarını inceleyerek, h adım uzunluğu ile elde edilen bir yaklaşımın bir üst satırdaki $h/2$ adım uzunluğu ile elde edilen yaklaşımla karşılaştırınız. Elde ettiğiniz sonucu ilgili yaklaşımlar dizisinin kümülatif hatası ile karşılaştırınız.

9

Sol Dikdörtgen tabanlı iteratif yaklaşımlar				
	Sol Dikdörtgen	Orta Nokta		
i	$\|3/4 - S(i,1)\|$	$\|3/4 - S(i,2)\|$	$\|3/4 - S(i,3)\|$	$\|3/4 - S(i,4)\|$
1	0.7500			
2	0.3531	0.0437		
3	0.1669	0.0193	0.0111	
4	0.0794	0.0081	0.0044	0.0040

10 Soru 8 i aşağıda verilen $E_{R(i,j)} = |3/4 - R(i,j)|$ hata tablosu için tekrarlayınız.

Romberg yöntemi esaslı iteratif yaklaşımlar hata tablosu				
	Sol Dikdörtgen	Orta Nokta		
i	$\lvert 3/4 - \mathrm{R}(i,1)\rvert$	$\lvert 3/4 - \mathrm{R}(i,2)\rvert$	$\lvert 3/4 - \mathrm{R}(i,3)\rvert$	$\lvert 3/4 - \mathrm{R}(i,4)\rvert$
1	0.2500			
2	0.1031	0.0542		
3	0.0419	0.0215	0.0194	
4	0.0169	0.0086	0.0077	0.0075

Alıştırmalar

11 Ortanokta yönteminin sırasıyla (3) ve (4) ile verilen yerel ve kümülatif hata ifadelerini elde ediniz.

12

$$E_{S(4,4)}(f,h) = O(h^7)$$

ve bileşik yöntemler için ise

$$E_{S(i,4)}(f,h) = O(h^6), i = 5, 6, ...; n = 4, 6, ...$$

olduğunu gösteriniz.

13 Romberg yaklaşımları için geliştirdiğiniz programı önceden belirlenen sayıdaki satır veya sütun adedi kadar işlem yapmak yerine,

$$\frac{|R(i+1,j+1)-R(i,j)|}{R(i,j)} < \epsilon$$

eşitsizliği sağlanıncaya kadar tekrar edecek biçimde düzenleyiniz.

- Kümülatif hatası $O(h)$ olan Sol Dikdörtgen veya Sağ Dikdörtgen yöntemini gözönüne alalım. Örneğin Sol Dikdörtgen yöntemi için

- Kümülatif hatası $O(h)$ olan Sol Dikdörtgen veya Sağ Dikdörtgen yöntemini gözönüne alalım. Örneğin Sol Dikdörtgen yöntemi için
-
$$E_{sol}(f, h) = \frac{(b-a)^2}{2n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f'(c_i)$$

  ile verilen kümülatif hatasını gözönüne alalım. Bu ifadeden kümülatif hata oluşumunda n ile belirtilen alt aralık sayısının yanısıra herbir alt aralıktaki $f'(c_i)$ değerlerinin de etkisinin olduğunu gözlemliyoruz.

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon

- Kümülatif hatası $O(h)$ olan Sol Dikdörtgen veya Sağ Dikdörtgen yöntemini gözönüne alalım. Örneğin Sol Dikdörtgen yöntemi için
- $$E_{sol}(f,h) = \frac{(b-a)^2}{2n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f'(c_i)$$

  ile verilen kümülatif hatasını gözönüne alalım. Bu ifadeden kümülatif hata oluşumunda n ile belirtilen alt aralık sayısının yanısıra herbir alt aralıktaki $f'(c_i)$ değerlerinin de etkisinin olduğunu gözlemliyoruz.
- Özellikle birinci türevin işaret değiştirmediği ve mutlak değerce büyük olduğu bölgeler üzerinden hesaplanan integral işlemi için birinci türevin kümülatif hata üzerindeki etkisi fazla olur.

- Bu nedenle birinci türevin mutlak değerce büyük değerler aldığı bölgede daha fazla düğüm noktası kabul eden ve **adaptif ağ** olarak adlandıracağımız değişken adım uzunluklu bir ağ üzerinden integrasyon işleminin gerçekleştirilmesi, kümülatif hatayı küçültecektir. Bu amaçla birinci türevin mutlak değerce büyük olduğu noktada $f(x+h) - f(x)$ sonlu farkının da mutlak değerce büyük olacağını ve bu oran yardımıyla ağ genişliğini daraltmayı hedefleyen Algoritma **??** aşağıda önerilmektedir:

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

1. input f, a, b, eps(ağ genişlik parametresi)

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

1. input f, a, b, eps(ağ genişlik parametresi)
2. $X = a; x = X;$ % başlangıç değerleri

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

1. input f, a, b, eps(ağ genişlik parametresi)
2. $X = a; x = X;$ % başlangıç değerleri
3. $eps = 0.001;$ % varsayılan ağ genişlik parametresi

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

1. input f, a, b, eps(ağ genişlik parametresi)
2. $X = a; x = X;$ % başlangıç değerleri
3. $eps = 0.001;$ % varsayılan ağ genişlik parametresi
4. $maxag = 0.2; minag = 0.001;$ %maksimum ve minimum ağ genişlikleri

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

1. input f, a, b, eps(ağ genişlik parametresi)
2. $X = a; x = X;$ % başlangıç değerleri
3. $eps = 0.001;$ % varsayılan ağ genişlik parametresi
4. $maxag = 0.2; minag = 0.001;$ %maksimum ve minimum ağ genişlikleri
5. $h = 0.1; h1 = h;$ % İkinci türev yaklaşım parametresi

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

1. input f, a, b, eps(ağ genişlik parametresi)
2. $X = a; x = X;$ % başlangıç değerleri
3. $eps = 0.001;$ % varsayılan ağ genişlik parametresi
4. $maxag = 0.2; minag = 0.001;$ %maksimum ve minimum ağ genişlikleri
5. $h = 0.1; h1 = h;$ % İkinci türev yaklaşım parametresi
6. $x <= (b - h1)$ olduğu sürece

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

1. input f, a, b, eps(ağ genişlik parametresi)
2. $X = a; x = X;$ % başlangıç değerleri
3. $eps = 0.001;$ % varsayılan ağ genişlik parametresi
4. $maxag = 0.2; minag = 0.001;$ %maksimum ve minimum ağ genişlikleri
5. $h = 0.1; h1 = h;$ % İkinci türev yaklaşım parametresi
6. $x <= (b - h1)$ olduğu sürece
    - $h1 = eps/|f(x+h) - f(x)|;$ %ağ genişliği

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

1. input f, a, b, eps(ağ genişlik parametresi)
2. $X = a; x = X;$ % başlangıç değerleri
3. $eps = 0.001;$ % varsayılan ağ genişlik parametresi
4. $maxag = 0.2; minag = 0.001;$ %maksimum ve minimum ağ genişlikleri
5. $h = 0.1; h1 = h;$ % İkinci türev yaklaşım parametresi
6. $x <= (b - h1)$ olduğu sürece
    - $h1 = eps/|f(x + h) - f(x)|;$ %ağ genişliği
    - $h1 = min(h1, maxag);$ %ağ genişliği en fazla maxağ

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

1. input f, a, b, eps(ağ genişlik parametresi)
2. $X = a; x = X;$ % başlangıç değerleri
3. $eps = 0.001;$ % varsayılan ağ genişlik parametresi
4. $maxag = 0.2; minag = 0.001;$ %maksimum ve minimum ağ genişlikleri
5. $h = 0.1; h1 = h;$ % İkinci türev yaklaşım parametresi
6. $x <= (b - h1)$ olduğu sürece
   - $h1 = eps/|f(x + h) - f(x)|;$ %ağ genişliği
   - $h1 = min(h1, maxag);$ %ağ genişliği en fazla maxağ
   - $h1 = max(h1, minag);$ % ağ genişliği en az minağ

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

1. input f, a, b, eps(ağ genişlik parametresi)
2. $X = a; x = X;$ % başlangıç değerleri
3. $eps = 0.001;$ % varsayılan ağ genişlik parametresi
4. $maxag = 0.2; minag = 0.001;$ %maksimum ve minimum ağ genişlikleri
5. $h = 0.1; h1 = h;$ % İkinci türev yaklaşım parametresi
6. $x <= (b - h1)$ olduğu sürece
    - $h1 = eps/|f(x+h) - f(x)|;$ %ağ genişliği
    - $h1 = min(h1, maxag);$ %ağ genişliği en fazla maxağ
    - $h1 = max(h1, minag);$ % ağ genişliği en az minağ
    - $x = x + h1;$ % sonraki düğüm noktası

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

1. input f, a, b, eps(ağ genişlik parametresi)
2. $X = a; x = X;$ % başlangıç değerleri
3. $eps = 0.001;$ % varsayılan ağ genişlik parametresi
4. $maxag = 0.2; minag = 0.001;$ %maksimum ve minimum ağ genişlikleri
5. $h = 0.1; h1 = h;$ % İkinci türev yaklaşım parametresi
6. $x <= (b - h1)$ olduğu sürece
   - $h1 = eps/|f(x + h) - f(x)|;$ %ağ genişliği
   - $h1 = min(h1, maxag);$ %ağ genişliği en fazla maxağ
   - $h1 = max(h1, minag);$ % ağ genişliği en az minağ
   - $x = x + h1;$ % sonraki düğüm noktası
   - $X = [X; x];$ % Düğüm noktasının ağa ilavesi

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

1. input f, a, b, eps(ağ genişlik parametresi)
2. $X = a; x = X;$ % başlangıç değerleri
3. $eps = 0.001;$ % varsayılan ağ genişlik parametresi
4. $maxag = 0.2; minag = 0.001;$ %maksimum ve minimum ağ genişlikleri
5. $h = 0.1; h1 = h;$ % İkinci türev yaklaşım parametresi
6. $x <= (b - h1)$ olduğu sürece
    - $h1 = eps/|f(x + h) - f(x)|;$ %ağ genişliği
    - $h1 = min(h1, maxag);$ %ağ genişliği en fazla maxağ
    - $h1 = max(h1, minag);$ % ağ genişliği en az minağ
    - $x = x + h1;$ % sonraki düğüm noktası
    - $X = [X; x];$ % Düğüm noktasının ağa ilavesi
7. eğer $X(end) < b$ ise $X(end) = b;$ % Ağ son noktası

$f(x) = 10e^{-5x}$ fonksiyonunun yukarıdaki algoritmaya göre oluşturulan adaptif ağ üzerindeki grafiği Şekil 1 de sunulmaktadır.

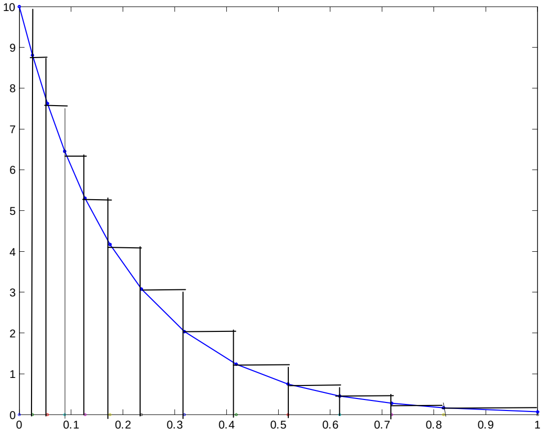


Figure: Adaptif ağ üzerinde f fonksiyonunun grafiği.

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

- Fonksiyonun birinci türevinin mutlak değerce kısmen büyük olduğu $x = 0$ noktasının hemen sağında daha sık serpiştirilmiş düğüm noktalarının yer aldığına dikkat edelim.

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

- Fonksiyonun birinci türevinin mutlak değerce kısmen büyük olduğu $x = 0$ noktasının hemen sağında daha sık serpiştirilmiş düğüm noktalarının yer aldığına dikkat edelim.
- Aşağıdaki tabloda, farklı ağ parametrelerine karşılık gelen ağlara ait ve Nd ile gösterilen sayıda düğüm noktası içeren ağ üzerinde sol dikdörtgen kuralı ile elde edilen ve $Hata(I_{sol}(adaptif\ \text{ağ}))$ ile gösterilen yaklaşım hatası sunulmaktadır. $Hata(I_{sol}(\text{düzgün ağ}))$ ile gösterilen soldikdörtgen yaklaşım hatası farklı ağ parametreleri için sunulmaktadır.

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

-

Ağ Parametresi	Nd	$Hata(I_{sol}(adaptif\ \ ağ))$	$Hata(I_{sol}(düzgün\ ağ)$
0.1	14	0.2972	0.4065
0.05	21	0.1905	0.2587
0.02	43	0.1011	0.1206
0.01	82	0.0553	0.0619

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

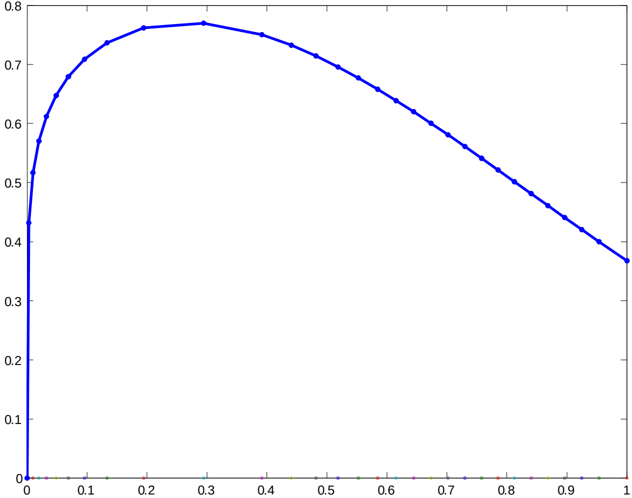
-

Ağ Parametresi	Nd	$Hata(I_{sol}(adaptif\ \ ağ))$	$Hata(I_{sol}(düzgün\ ağ)$
0.1	14	0.2972	0.4065
0.05	21	0.1905	0.2587
0.02	43	0.1011	0.1206
0.01	82	0.0553	0.0619

- Tablodan görüleceği üzere bu örnek için farklı sayıda düğüm noktası içeren ve adaptif ağ olarak adlandırdığımız değişken uzunluluk ağ üzerinde oluşan hata, düzgün ağ üzerinde oluşan hataya kıyasla daha küçüktür.

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

- $f(x) = \sqrt[7]{x}e^{-x^2}$ fonksiyonunun yukarıdaki algoritmaya göre oluşturulan adaptif ağ üzerindeki grafiği Şekil 2 te sunulmaktadır.



Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

- Şekilden $x = 0$ noktası komşuluğunda fonksiyonun hızlı bir değişim gösterdiği görülmekte ve bu nokta nokşuluğundaki düğüm noktaları arasındaki uzaklığın, fonksiyon değişiminin yavaş olduğu bölgelere oranla daha küçük olduğu görülmektedir. Oluşturan ağ üzerinde farklı ağ parametrelerine karşılık gelen ağ üzerinde elde edilen yaklaşımlar aşağıdaki tabloda verilmektedir. Tablonun son sütununda ise aynı sayıda düğüm noktası ile eşit aralıklı düğüm noktaları ile oluşturulan ağ üzerindeki yaklaşımlar verilmektedir.

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

-

Ağ	Nd	$Hata(I_{sol}(adaptif\ \ ağ))$	$Hata(I_{sol}(düzgün\ ağ))$
0.05	11	0.0265	0.0468
0.002	31	0.0017	0.0141
0.001	60	0.0003	0.0068

Adaptif bir ağ üzerinde sayısal integrasyon algoritması

Ağ	Nd	$Hata(I_{sol}(adaptif\ \ ağ))$	$Hata(I_{sol}(düzgün\ ağ))$
0.05	11	0.0265	0.0468
0.002	31	0.0017	0.0141
0.001	60	0.0003	0.0068

- Tablo sonuçlarına göre adaptif ağ üzerindeki yaklaşımlar bu örnek için de her zaman daha iyi sonuçlar vermektedir.

Alıştırmalar

1 f fonksiyonu ile a ve b aralık uçnoktaları ve yukarıdaki algoritmada kullanılan ağ parametresini(eps) kullanıcadan alarak bu defa birinci türev yerine ikinci türevin mutlak değerce büyük olduğu bölgelerde daha sık düğüm noktası yerleştiren bir ağ oluşturunuz. Bunun için yukarıda verilen Algoritmanın sadece 6(a) adımını değiştirmeniz yeterlidir. Oluşturduğunuz ağ üzerinde

Alıştırmalar

1. - adapint isimli alt program yardımıyla yamuk ve orta nokta yaklaşımlarını hesaplayan ve
   - kullanılan alt aralık sayısı yardımıyla duzyam ve duzort alt programları yardımıyla da eşit uzunluklu alt aralıklar üzerinde yamuk ve ortanokta yaklaşımlarını hesapladıktan sonra,
   - MATLAB/Octave sayısal integrasyon fonksiyon programı olan quadl ile elde edilen sonucu gerçek sonuç olarak kabul ederek,
   - herbir yöntem de oluşan hatayı hesaplatarak geri dönderen ve aşağıda verilen ana programın belirtilen biçimde çalışmasını sağlayacak alt programları hazırlayınız.

Alıştırmalar

1. $$function\ hata = gint(f, a, b, eps)$$

1. $$function\ hata = gint(f, a, b, eps)$$
2. $$[n, adapyamuk, adaporta] = adapint(f, a, b, eps);$$

Alıştırmalar

1. $function\ hata = gint(f, a, b, eps)$
2. $[n, adapyamuk, adaporta] = adapint(f, a, b, eps);$
3. $duzyamuk = duzyam(f, a, b, n);$

Alıştırmalar

1. $function\ hata = gint(f, a, b, eps)$
2. $[n, adapyamuk, adaporta] = adapint(f, a, b, eps);$
3. $duzyamuk = duzyam(f, a, b, n);$
4. $duzorta = duzort(f, a, b, n);$

Alıştırmalar

1. $$function\ hata = gint(f, a, b, eps)$$
2. $$[n, adapyamuk, adaporta] = adapint(f, a, b, eps);$$
3. $$duzyamuk = duzyam(f, a, b, n);$$
4. $$duzorta = duzort(f, a, b, n);$$
5. $$sayisal = quadl(f, a, b)$$

Alıştırmalar

1. $function\ hata = gint(f, a, b, eps)$
2. $[n, adapyamuk, adaporta] = adapint(f, a, b, eps);$
3. $duzyamuk = duzyam(f, a, b, n);$
4. $duzorta = duzort(f, a, b, n);$
5. $sayisal = quadl(f, a, b)$
6. $sonuc = [adapyamuk, duzyamuk, adaporta, duzorta];$

Alıştırmalar

1. $function\ hata = gint(f, a, b, eps)$
2. $[n, adapyamuk, adaporta] = adapint(f, a, b, eps);$
3. $duzyamuk = duzyam(f, a, b, n);$
4. $duzorta = duzort(f, a, b, n);$
5. $sayisal = quadl(f, a, b)$
6. $sonuc = [adapyamuk, duzyamuk, adaporta, duzorta];$
7. $hata = abs(sayisal - sonuc);$

Alıştırmalar

2 Soru 1 de geliştirdiğiniz program yardımıyla, yukarıda incelenen örnekleri oluşturduğunuz yeni ağ üzerinde çalıştırınız. Adaptif ağ üzerindeki sonuçlar, düzgün ağ üzerindeki sonuçlara göre herzaman daha iyi midir?

3 Yukarıda verilen anaprogramı, adaptif ağ üzerinde Simpson yöntemini de gerçekleştirecek biçimde geliştiriniz. Bunun için öncelikle herhangi $c \in (a, b)$ için

$$(a, f(a)), (c, f(c)), (b, f(b))$$

noktalarından geçen $P_2(x)$ interpolasyon polinomunun $[a, b]$ aralığı üzerindeki integralini hesaplayarak, eşit aralıklı olması gerekmeyen noktalar için Simpson kuralını elde ediniz.

4 Yukarıda sol dikdörtgen kuralı için elde edilen sonuçları, kullanılan ağ algoritmasına göre sağ dikdörtgen kuralı için de kontrol ediniz. Benzer performansı elde ediyor musunuz?

Alıştırmalar

5 (Proje) Birinci türevin belirlenen bir toleranstan daha fazla olduğu nontada bir sonraki düğüm noktasını yukarıda verilen algoritmaya göre hesapladıktan sonra ilgili alt aralıktaki yaklaşımı sol dikdörtgen kuralına göre hesaplayan, değilse ikinci türevdeki değişimin önceden belirlenen toleranstan büyük olması durumunda bir sonraki düğüm noktasını Soru 1 de belirleyeceğiniz algoritmaya göre hesapladıktan sonra ilgili alt aralıktaki yaklaşımı Yamuk yöntemine göre hesaplayan değişken mertebeli bir sayısal integrasyon yöntemi geliştiriniz. Geliştirdiğiniz yöntemi birinci ve ikinci türevinde hızlı değişimler gösteren örnekler üzerinde test yapınız.

6 (Proje) Sol dikdörtgen tabanlı $S(i,j)$ veya yamuk tabanlı $R(i,j)$ Romberg yaklaşımlarının adaptif ağ üzerine genelleştirilebilme durumlarını tartışınız.

Kaynaklar

- Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, 1988.
- Coşkun, E. MATLAB/Octave ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama(URL:erhancoskun.com.tr).
- Davis, P., Rabinowitz, P., Methods of Numerical Integration, Academic Press, 1984.
- OCTAVE, GNU özgür yazılım(*URL:OCTAVE.sourceforge.net*).
- Press, H. W. ve ark., Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, 1988.
- Stoer, J., Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1976.