Bölüm 10

Trafik Modeli

Bu bölümde tek şerit bir yolun herhangi iki noktası arasındaki trafik yoğunluğunun zamanla nasıl değiştiğini incelemek suretiyle trafik yoğunluk modelini oluşturarak, farklı başlangıç şartları ile modelin klasik ve genelleştirilmiş çözümlerini inceliyoruz. Konuya ilişkin olarak detaylı bilgi için bölüm sonunda sunduğumuz ve bu bölümü hazırlarken faydalandığımız kaynağı öneriz.

10.1 Modelin türetilişi

A ——> B

([1]) yi takip ederek şekilde görülen yol üzerinde alınan herhangi bir $[AB]$ kesitindeki trafik yoğunluğunun, keyfi $T > 0$ için $[0, T]$ zaman diliminde nasıl değiştiğini inceleyelim:

[0, T] zaman diliminde sözkonusu kesitin trafik yoğunluğundaki değişim, bu zaman diliminde A noktasından giren ve B noktasından çıkan araç sayısı arasındaki farka eşittir:

Şimdi yukarıdaki ifadenin sol ve sağ yanının matematiksel karşılıklarını bulmaya çalışalım:

Öncelikle sol taraftaki ifadeyi gözönüne alalım: $[0, T]$ zaman diliminde, araç sayısındaki değişim, $t = T$ ve $t = 0$ anlarında kesitte bulunan araç sayıları arasındaki farka eşittir.

Peki $t = 0$ anındaki araç sayısı ne kadardır?

$u(x, 0)$ ile $t = 0$ anında x noktasında birim uzunluklu bir kesitteki(örneğin bir kilometre uzunluğunda) araç sayısını gösterelim. $u(x, 0)$'a x noktasında ve $t = 0$ noktasındaki trafik yoğunluğu adını vereceğiz. O halde, $t = 0$ anında $[AB]$ kesitinde bulanan araç sayısını

$$\int_a^b u(x, 0)dx$$

olarak elde ederiz.

Benzer biçimde $t = T$ anında kesitte bulunan araç sayısını ise

$$\int_a^b u(x, T)dx$$

olarak elde ederiz. O halde $[0, T]$ zaman diliminde, araç sayısındaki değişimi

$$\int_a^b u(x, T)dx - \int_a^b u(x, 0)dx = \int_a^b (u(x, T) - u(x, 0))dx$$

olarak elde ederiz. Eğer bu sayı pozitif ise $[0, T]$ zaman diliminde A noktasından giriş yapan araç sayısı, B noktasından çıkış yapan araç sayısından daha fazladır.

Şimdi öncelikle $[0, T]$ zaman diliminde A noktasından giriş yapan araç sayısını hesaplayalım:

Birim zamanda, örneği bir saatte, *A noktasından giriş yapan araç sayısı= A noktasındaki trafik yoğunluğu ile aynı noktadaki trafik hızının çarpımına eşittir*, bu sayıyı

$$F(u(A, t))$$

ile gösterelim.

O halde $[0, T]$ zaman diliminde A noktasından giriş yapan araç sayısı

$$\int_0^T F(u(A, t))dt$$

dir.

Benzer biçimde birim zamanda B noktasından çıkan araç sayısı da

$$F(u(B,t))$$

olup, $[0,T]$ zaman diliminde B noktasından çıkış yapan araç sayısı

$$\int_0^T F(u(B,t))dt$$

O halde yoğunluk değişimine ait yukarıdaki ifade gereğince,

$$\int_A^B (u(x,T)-u(x,0))dx = \int_0^T (F(u(A,t))-F(u(B,t)))dt \tag{10.1}$$

elde ederiz. Öteyandan analizin temel teoreminden

$$u(x,T)-u(x,0) = \int_0^T \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dt \tag{10.2}$$

ve

$$F(u(B,t))-F(u(A,t)) = \int_A^B \frac{\partial F(u(x,t))}{\partial x}dx \tag{10.3}$$

olarak ifade edilebilir. (10.2) ve (10.3) ü (10.1) de yazarak,

$$\int_A^B \int_0^T \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dtdx = -\int_0^T \int_A^B \frac{\partial F(u(x,t))}{\partial x}dxdt \tag{10.4}$$

(10.4) ün sağ yanındaki integrasyon sırasını değişerek,

$$\int_A^B \int_0^T \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial F(u(x,t))}{\partial x}\right] dtdx = 0 \tag{10.5}$$

elde ederiz. Alt indis gösterimiyle, $u_t = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ ve $F(u)_x = \frac{\partial F(u(x,t))}{\partial x}$ fonksiyonlarının tanım bölgeleri üzerinde sürekli olduklarını kabul edelim. Keyfi

$[A,B]\times[0,T]$ bölgesi üzerinde sürekli bir fonksiyonun integralinin sıfıra eşit olması, kendisinin özdeş olarak sıfıra eşit olmasını gerektirir(Alıştırma 1). O halde

$$u_t + F(u)_x = u_t + F'(u)u_x = 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \tag{10.6}$$

denklemini elde ederiz. Burada $(-\infty,\infty)$ bölgesi yeterince uzun bir trafik yolunu temsil etmektedir.

10.2 Sabit hızla seyreden trafikte yoğunluk problemleri

Trafik hızının yoğunluktan bağımsız olarak sabit olduğunu kabul edelim: yani $v(u) = c$ olsun. Bu durumda $F(u) = cu$ elde ederiz. $t = 0$ anındaki trafik yoğunluğunun ise $u(x,0) = f(x)$ ile verildiğini kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} u_t + F(\mathrm{u})_x &= u_t + F'(u)u_x \\ &= u_t + cu_x = 0, -\infty < x < \infty, t > 0 && (10.7) \\ u(x,0) &= f(x) && (10.8) \end{aligned}$$

başlangıç değer problemini elde ederiz.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c \\ x(0) &= x_0 && (10.9) \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin çözümü olan ve karakteristik adı verilen

$$x(t) = ct + x_0 \tag{10.10}$$

doğrusu üzerinde $u(x,t)$ nin türevini

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 0 \tag{10.11}$$

olarak elde ederiz. O halde $u(x,t)$ fonksiyonu $x = x(t)$ karakteristiği üzerinde değişmemektedir. Dolayısıyla, karakterisitik üzerindeki herhangi (x,t) için

$$u(x,t) = u(x_0,0) = f(x_0) = f(x-ct) \tag{10.12}$$

dir. Gerçekten de (10.12) ile tanımlanan $u(x,t)$ fonksiyonu (10.8) yi sağlar. Bunu görmek için

$$u_t = f'(x-ct)(-c), u_x = f'(x-ct)$$

ifadelerini (10.8) de yerine yazmak yeterlidir.

ÖRNEK 10.1. *$v(u) = 2$ birim hızı ile hareket edet trafikte, başlangıç araç yoğunluğunun(araç/km)*

$$f(x) = [10/(1+x^2)]$$

ile verildiğini kabul edelim. Burada $[.]$

$$[x] = n, n \leq x < n+1$$

ile tanımlanan tamdeğer fonksiyonudur. Bu durumda $x = 2$ noktasında $t = 0, t = 1$ ve $t = 2$ anındaki trafik yoğunluğunu hesaplayınız.

Çözüm.

$F(u) = uv(u) = 2u$, $F\prime(u) = 2$, o halde problemimizi

$$\begin{aligned} u_t + F'(u)u_x &= u_t + 2u_x = 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= [10/(1+x^2)] \end{aligned}$$

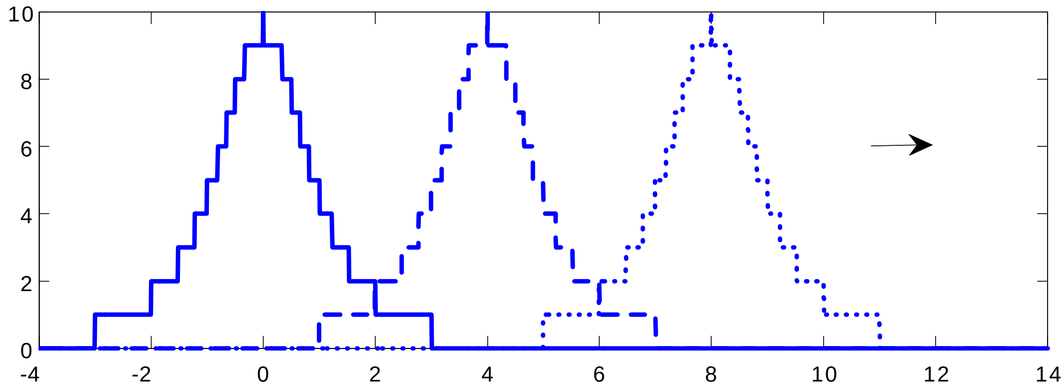
başlangıç değer problemi olarak formüle edebiliriz. (10.12) den verilen problemin çözümü

$$u(x,t) = [10/(1+(x-2t)^2)]$$

olarak elde edilir. $t = 0, 1$ ve $t = 2$ için $u(x,t)$ nin grafiği Şekil de sunulmaktadır.

$x = 2, t = 0$ için $u(2,0) = 2$; $x = 2, t = 1$ için $u(2,1) = 10$; $x = 2, t = 2$ için $u(2,2) = 2$ elde ederiz.

Uyarı. *Başlangıç fonksiyonu süreksizlik içeren problemin, süreksizlik noktalarının trafik hızı ile birlikte ilerlediğini gözlemliyoruz. Bu durumda elde edilen çözümü klasik çözümden ziyade, türevlenebilirlik veya süreklilik kriterini sağlaması gerekmeyen, ancak ilgili trafik yoğunluğunu ilerleyen zaman değerleri için doğru yansıtan genelleştirilmiş bir çözüm olarak yorumlamalıyız.*



Örnek 10.1 için ilerleyen zaman değerleri ile trafik yoğunluğu

- Başlangıç değerin parçalı olarak tanımlanması durumunda, her bir parça için çözümün ayrı ayrı belirlenmesi gerekir:

ÖRNEK 10.2. *$v = 10km/saat$ hızla seyreden bir trafikte, $x = 0$ olarak tanımlanan bir noktanın solunda kilometre başına 10 araç, sağında ise 20 araç bulunduğunu kabul edelim. $x = 10$ uncu kilometrede $t = 0, 1, 2$ inci saatlerdeki araç sayısı nedir?*

Çözüm.

Modelimizi

$$\begin{aligned} u_t + 10u_x &= 0 \\ u(x,0) &= \begin{cases} 10 & x \leq 0 \\ 20 & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

olarak ifade edebiliriz.

- Öncelikle $x_0 \leq 0$ ile negatif eksenden hareket eden karakteristiklerin denklemini ve bu karakteristikler üzerindeki çözümü belirleyelim:

$$\frac{dx}{dt} = 10 \Rightarrow x = 10t + x_0$$

elde ederiz. O halde $x_0 \leq 0$ olduğu için $x \leq 10t$ bölgesinde

$$u(x,t) = u(x_0, 0) = 10$$

elde ederiz.

- İkinci olarak $x_0 > 0$ ile pozitif eksenden hareket eden karakteristiklerin denklemini ve bu karakteristikler üzerindeki çözümü belirleyelim: Bu bölgede de $x = 10t + x_0$ olup, $x_0 > 0$ için $x > 10t$ bölgesinde

$$u(x,t) = u(x_0, 0) = 20$$

elde ederiz. O halde

$$u(x,t) = \begin{cases} 10 & x \le 10t \\ 20 & x > 10t \end{cases}$$

genel çözümünü elde ederiz. Buradan

$$u(10,0) = 20, u(10,1) = 10, u(10,2) = 10$$

trafik yoğunluk(araç sayısı/km) değerlerini buluruz.

Başlangıç fonksiyonu aşağıdaki örnekte olduğu üzere üç parça halinde de tanımlanmış olabilir.

ÖRNEK 10.3. *Yoğun bir trafikte $v = 5$ km/saat hızla ilerleyebilen araçların trafik yoğunluğu(araç sayısı/km) aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.*

$$u(x,0) = \begin{cases} 100 & x < 0 \\ 4(25 - [x]^2) & 0 \le x \le 5 \\ 0 & x > 5 \end{cases}$$

Buna göre (x,t) anındaki trafik yoğunluğunu belirleyiniz. $x = 6$ -ıncı kilometrede ve $t = 0, 1/2$,1 ve 1.5 zamanlarındaki (saatlerindeki) trafik yoğunluğu nedir?

Çözüm.

$$F(u) = v(u)u = 5u, F\prime(u) = 5$$

olup modelimiz verilen başlangıç şartını sağlayan

$$u_t + F'(u)u_x = u_t + 5u_x = 0, -\infty < x < \infty$$

denkleminin çözümünü belirleme problemidir. Bunun için sırasıyla negatif eksenden,$[0, 5]$ aralığından ve $x > 5$ bölgesinden başlayan karakteristikleri, ve bu karakteristikler üzerindeki çözümü belirlemeliyiz.

- $x_0 < 0$ için
$$\frac{dx}{dt} = F'(u) = 5 \Longrightarrow x(t) = 5t + x_0$$
karakteristikleri üzerinde
$$u(x,t) = u(x_0, 0) = 100$$
elde ederiz. Bu çözüm $x_0 < 0$ için $x < 5t$ bölgesi üzerinde geçerlidir.

- $0 \leq x_0 \leq 5$ için $x(t) = 5t + x_0$ karakteristikleri üzerinde
$$u(x,t) = u(x_0, 0) = f(x - 5t) = 4(25 - [x - 5t]^2)$$
elde ederiz. Bu çözüm $5t \leq x \leq 5t + 5$ bölgesinde geçerlidir.

- $x_0 > 5$ için $x(t) = 5t + x_0$ karakteristikleri üzerinde
$$u(x,t) = u(x_0, 0) = 0$$
elde ederiz. Bu çözüm $x > 5t + 5$ bölgesinde geçerlidir. O halde
$$u(x,t) = \begin{cases} 100 & x < 5t \\ 4(25 - [x-5t]^2) & 5t \leq x \leq 5t+5 \\ 0 & x > 5t+5 \end{cases}$$

- $x = 6$ ıncı kilometrede
  - $t = 0$ için $x > 5t + 5$ olduğundan $u = 0$ dır.
  - $t = 1/2$ için $5t \leq x \leq 5t + 5$ olduğundan $u = 4(25 - [6 - 5/2]^2) = 4(25 - 9) = 64$ tür.
  - $t = 1$ için $5t \leq x \leq 5t + 5$ olduğundan $u = 4(25 - 1) = 96$
  - $t = 1.5$ için $x < 5t$ olduğundan $u = 100$ dür.

10.3 Yoğunluğa bağlı hızla seyreden trafikte yoğunluk problemleri

Bu bölümde trafik yoğunluğunu hızın fonksiyonu olarak kabul ediyoruz.
$$v(u) = v_{\max}(1 - (u/u_{\max})^k), k = 1, 2$$

gibi yoğunluk-trafik bağıntısının geçerli olduğunu kabul ediyoruz[1]. Burada $v_{\max}(km/saat)$ izin verilen maximum trafik hızı, $u_{\max}$ ise maximum trafik yoğunluğudur(araç/km). $u = u_{\max}$ olduğunda $v = 0$ elde edilir. Bu sonuç maksimum yoğunlukta trafiğin durduğunu ifade eder. $u = 0$ için ise $v = v_{\max}$ elde edilir. Bu sonuç ise yoğunluğun söz konusu olmadığı yerde trafiğin makimum hızla seyredeceğini ifade eder.

$k = 1$ için

$$F(u) = uv(u) = v_{\max}(u - u^2/u_{\max})$$

elde ederiz. Bu durumda

$$c(u) = F'(u) = v_{\max}(1 - 2u/u_{\max}) \tag{10.13}$$

olup, modelimiz

$$\begin{aligned} u_t + c(u)u_x &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned} \tag{10.14}$$

olarak ifade edilir. Keyfi x_0 ile

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c(u) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{10.15}$$

ile tanımlanan karakteristikler üzerinde

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt}(x(t),t) \\ &= u_t + \frac{dx}{dt}u_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde (10.15) ile tanımlanan karakteristikler üzerinde u sabit kalır, yani

$$u(x(t),t) = u(x_0,0)$$

dır. Öte yandan (10.15) ile tanımlanan karakteristikleri ise

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c(u) \\ &= c(u(x(t),t) \\ &= c(u(x_0,0)) \end{aligned}$$

bağıntısından, integral almak suretiyle

$$x(t) = c(u(x_0, 0))t + x_0$$

elde ederiz.

O halde

$$u(x,t) = u(x_0, 0) = f(x - c(u)t) \tag{10.16}$$

özel çözümünü elde ederiz. Gerçekten de (10.16) ile tanımlanan u, (10.14) başlangıç değer problemini sağlar.

$$u_t = -f'(x - c(u)t)(c'(u)u_t t + c(u))$$

den

$$u_t = -\frac{c(u)}{1 + f'(x - c(u)t)c'(u)} \tag{10.17}$$

ve

$$u_x = f'(x - c(u)t)(1 - c'(u)u_x t)$$

bağıntısından

$$u_x = \frac{1}{1 + f'(x - c(u)t)c'(u)} \tag{10.18}$$

elde ederiz. (10.17) ve (10.18) i (10.14) da yazarak denklemin sağlandığını görebiliriz.

Uyarı. *10.16 ile tanımlanan çözümün $f'(.)c'(.) \geq 0$ olması durumumda her $t > 0$ için tanımlı olduğuna, $f'(.)c'(.) < 0$ olması durumunda ise paydayı sıfır yapan ilk $t = t^*$ anına kadar, yani $[0, t^*)$ aralığında geçerli olduğuna dikkat edelim.*

ÖRNEK 10.4. $u_{\max} = 100, v_{\max} = 25$ *ve 10.13 ile tanımlanan*

$$c(u) = 25(1 - u/50)$$

ve

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 60 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

başlangıç değeri ile $u(x,t)$ trafik yoğunluğunu belirleyiniz.

Çözüm.

- $x_0 < 0$ için
$$\frac{dx}{dt} = c(u(x_0, 0)) = 25(1 - 6/5) = -5$$
olup, $x = -5t + x_0$ karakteristikleri boyunca $u = 60$ elde edilir.

- $x_0 \geq 0$ için
$$\frac{dx}{dt} = c(u(x_0, 0)) = 25(1 - 0) = 25$$
olup, $x = 25t + x_0$ karakteristikleri boyunca $u = 0$ elde edilir.

- Yukarıda belirlenen karakteristiklerle taranmayan $-5t \leq x \leq 25t$ ara bölgesinde
$$u = g(x/t), g(.) = c^{-1}(.)$$
şeklinde çözüm arayalım.
$$c^{-1}(u) = 50 - 2u$$
olup,
$$u = g(x/t) = 50 - 2x/t$$
elde ederiz. O halde
$$u(x,t) = \begin{cases} 60 & x < -5t \\ 50 - \frac{2x}{t} & -5t \leq x \leq 25t \\ 0 & x > 25t \end{cases}$$
çözümünü elde ederiz.

Alıştırmalar 10.1.

1. *$v(u) = 2$ birim hızı ile hareket edet trafikte, başlangıç araç yoğunluğunun*
$$f(x) = 10e^{-|[x]|}$$
ile verildiğini kabul edelim. Burada [.]
$$[x] = n, n \leq x < n+1$$
ile tanımlanan tamdeğer fonksiyonudur.

   (a) $u(x,t)$ trafik yoğunluğunu belirleyiniz.

(b) *f fonksiyonunun $[-10, 10]$ aralığındaki grafiğini çizdiriniz.*

(c) *$t = 1, 5, 10$ anlarındaki trafik yoğunluk değerlerinin $[-10, 10]$ aralığı üzerindeki grafiğini çizdiriniz.*

(d) *$x = 2$ noktasında $t = 0, t = 1$ ve $t = 2$ anındaki trafik yoğunluğunu hesaplayınız.*

2. *$v(u) = 20$ birim hızla seyreden bir trafikte, $x = 0$ olarak tanımlanan bir noktanın solunda, örneğin kilometre başına 5 araç, sağında ise 15 araç bulunduğunu kabul edelim. $x = 10$ uncu kilometrede ve $t = 0, 1, 2$-inci saatlerdeki araç sayısı nedir?*

3. *$v(u) = 10$ birim hızla ilerleyebilen araçların başlangıç trafik yoğunluğu(araç sayısı/birim mesafe) aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.*

$$u(x,0) = \begin{cases} 50 & x < 0 \\ 50 - [x]^2 & 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & x > 5 \end{cases}$$

(a) *Buna göre (x, t) anındaki trafik yoğunluğunu belirleyiniz.*

(b) *f fonksiyonunun $[-10, 10]$ aralığındaki grafiğini çizdiriniz.*

(c) *$t = 1, 5, 10$ anlarındaki trafik yoğunluk değerlerinin $[-10, 10]$ aralığı üzerindeki grafiğini çizdiriniz.*

(d) *$x = 6$ noktasında ve $t = 0, 1/2, 1$ ve 1.5 zamanlarındaki trafik yoğunluğu nedir?*

4. *$u_{\max} = 60, v_{\max} = 50$ ve $v(u) = v_{\max}(1 - u/u_{\max})$ hızı ile hareket eden trafikte*

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 50 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

başlangıç değeri ile

(a) *$u(x,t)$ trafik yoğunluğunu belirleyiniz.*

(b) *$t = 1, 5, 10$-uncu anlardaki trafik yoğunluk değerlerinin $[-10, 10]$ aralığı üzerindeki grafiğini çizdiriniz.*

(c) *$x = 5$ noktasında ve $t = 0, 1/2, 1$ ve 1.5 zamanlarındaki trafik yoğunluğu nedir?*

5. *$u_{\max} = 60, v_{\max} = 50$ ve $v(u) = v_{\max}(1 - (u/u_{\max})^2)$ hızı ile hareket eden trafikte başlangıç trafik yoğunluğu*

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 30 & 0 \leq x < 10 \\ 0 & x \geq 10 \end{cases}$$

ile tanımlanmaktadır. Buna göre

(a) *$u(x,t)$ trafik yoğunluğunu belirleyiniz.*

(b) *$t = 1, 5, 10$ anlarındaki trafik yoğunluk değerlerinin $[0, 100]$ aralığı üzerindeki grafiğini çizdiriniz.*

(c) *$x = 20$ noktasında ve $t = 1$ ve 2 zamanlarındaki trafik yoğunluğu nedir?*

Kaynaklar ve ilgili literatür

[1] Duchateau, P., Zachmann, D., Applied Partial Differential Equations, Dover Pub., New York, 1989.