Bölüm 8

Basit bir Ulusal Ekonomi Modeli

Bu bölümde basit bir ulusal ekonomi modeli olarak bilinen ve iki bilinmeyenli lineer ve nonlineer modellleri gözönüne alarak, denge noktası veya noktalarının karakterini inceliyor ve stabil ekonomik denge için model parametrelerini tahmin ediyoruz.

$I(t)$: t anında kişi başına milli gelir, $C(t)$: t anında kişisel harcama ve $G(t)$ de kamu harcama oranı olmak üzere, basit bir ulusal ekonomi modeli[1]

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= I - \alpha C \\ \frac{dC}{dt} &= \beta(I - C - G) \end{aligned} \tag{8.1}$$

olarak verilmektedir(Gordan ve Smith). Burada α ve β sabitlerdir.

Modelde G için üç farklı yaklaşım söz konusudur:

1. $G = G_0 (G_0$ sabit$)$
2. $G = G_0 + kI (k > 0$ sabit$)$
3. $G = G_0 + kI^2$

Birinci yaklaşım kamu harcama oranının sabit olduğunu, ikincisi kamu harcama oranının kişi başına milli gelir ile orantılı olarak arttığını ve üçüncüsü ise sözkonusu harcama oranının kişi başına milli gelirin karesiyle orantılı olarak arttığı kabulünü esas almaktadır. Her bir yaklaşım için

- denge çözümü,
- denge çözümün kararlılığını,
- mümkünse gerçek, değilse sayısal çözüm ve
- $t \to \infty$ için gerçek çözümün davranışı ile denge çözümün karakteri arasındaki ilişkiyi incelemek istiyoruz.

Ancak öncelikle diferensiyel denklem sistemleri için denge çözümleri ve çözümlerin kararlılık kavramlarını hatırlayalım.

8.0.1 Diferensiyel denklem sistemleri için denge çözüm ve kararlılık kriterleri

Aşağıdaki biçimde tanımlanan

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y) \end{aligned} \tag{8.2}$$

denklem sistemini gözönüne alalım. Bu sistemde

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

cebirsel sistemini sağlayan (x^*, y^*) noktasına (8.2) sisteminin denge noktası ve $x(t) = x^*, y(t) = y^*$ sabit çözümüne de (8.2) sisteminin denge çözümü adı verilir.

Denge çözüm komşuluğundaki başlangıç değerleri ile başlayan $(x(t), y(t))$ yörüngesinin artan t değerleri için davranışı, denge noktasının karakteri ile belirlenir. Tersine, denge noktasının karakteri bu nokta komşuluğunda başlayan başlangıç değerleri ile elde edilen çözüm eğrilerinin davranışını belirler.

TANIM 8.1. *Denge noktasının yakın komşuluğundaki herhangi bir başlangıç değerleri ile elde edilen $(x(t), y(t))$ yörüngesi, artan t değerleri için denge noktasının komşuluğunda kalıyorsa denge noktasına kararlı, değilse denge noktasına kararsızdır denir.*

Denge noktasının kararlılığını belirlemek için sıkça kullanılan yöntem, bu nokta komşuluğunda (8.2) nonlineer sistemine karşılık gelen lineer sistemi incelemektir: (x^*, y^*) noktasında (8.2) sisteminin sağyan fonksiyonlarının-Taylor açılımı ile

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x^*,y^*) + (x-x^*)\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x^*,y^*)} + (y-y^*)\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x^*,y^*)} + \cdots \\ g(x,y) &= g(x^*,y^*) + (x-x^*)\frac{\partial g}{\partial x}|_{(x^*,y^*)} + (y-y^*)\frac{\partial g}{\partial y}|_{(x^*,y^*)} + \cdots \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$f(x^*,y^*) = 0, g(x^*,y^*) = 0$$

olduğunu kullanarak, Taylor açılımının lineer kısımları ile (8.2) e karşılık gelen lineer sistemi

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x^*,y^*)} & \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x^*,y^*)} \\ \frac{\partial g}{\partial x}|_{(x^*,y^*)} & \frac{\partial g}{\partial y}|_{(x^*,y^*)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-x^* \\ y-y^* \end{bmatrix}$$

olarak ifade edebiliriz. Alternatif olarak,

$$u = x-x^*, v = y-y^*, U = [u,v]^T, U(0) = [u(0), v(0)]^T$$

ve

$$J = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}_{(x^*,y^*)} \tag{8.3}$$

Jacobien matrisi ile

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= JU \\ U(0) &= U_0 \end{aligned} \tag{8.4}$$

lineer yaklaşımını elde ederiz.

(8.4) lineer sistemine (x^*, y^*) noktası komşuluğunda (8.2) nonlineer sistemine karşılık gelen lineer yaklaşım adı verilir. J Jacobien matrisinin singüler olmadığını kabul ediyoruz. Öteyandan (x^*, y^*) noktası (8.2) sisteminin denge noktası ise $(0,0)$ noktası da (8.4) lineer sisteminin bir denge noktasıdır.

- (8.3) Jacobien matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ ve özvektörleri de V_1, V_2 olmak üzere, eğer $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ise (8.4) lineer sistemin genel çözümünü

$$U = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

olarak elde ederiz.

- Eğer $\lambda = a + ib$ bir özdeğer ve V de bu özdeğere karşılık gelen özvektör ise, bu defa da sistemin reel bileşenlere sahip genel çözümünü

$$\begin{aligned} U &= c_1 \text{Reel}(e^{\lambda t} V) + c_2 \text{Sanal}(e^{\lambda t} V) \\ &= e^{at}\left(c_1 \text{Reel}(e^{ibt} V) + c_2 \text{Sanal}(e^{ibt} V)\right) \end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

- Lineer sistemlerin çözümü için daha detaylı bilgi Edvards &Penny[cite] de yer almaktadır.

Bu çözümlere göre (8.4) lineer sistemin $(0,0)$ denge noktasının kararlılığı aşağıdaki gibi belirlenir[Gilbert-Strang, GorSim]:

- $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ise denge noktası kararlı(kararlı düğüm),
- $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ise denge noktası kararsız(kararsız düğüm),
- $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ise denge noktası kararsız(eyer noktası),
- $\lambda = a + ib, a < 0$ ise denge noktası kararlı(kararlı spiral),
- $\lambda = a + ib, a > 0$ ise denge noktası kararsız(kararsız spiral) noktadır.
- $\lambda = ib$, ise denge noktası merkez noktadır.

  Öte yandan $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ olması durumunda denge çözümü dejenere kararlı, $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ olması durumunda ise dejenere kararsızdır.

Not: $(0,0)$ denge noktasının 8.4 lineer sistemi için karakteri ile (x^*, y^*) ın 8.2 nonlineer sistemi için karakteri hemen hemen aynıdır, yani

- $(0,0)$ noktası (8.4) lineer sisteminin kararlı(kararsız) denge noktası ise (x^*, y^*) da (8.2) nonlineer sisteminin kararlı(kararsız) denge noktasıdır. Ancak $(0,0)$ noktasının (8.4) için merkez noktası veya dejenere kararlı veya kararsız olması durumunda (x^*, y^*) ın (8.2) nonlineer sistemi için kararlılığı konusunda herhangi bir sonuca varılamaz[Gorsim].

Kararlılık analizi için özdeğerlerin kendileri yerine, reel veya sanal oldukları ve reel iseler işaretleri, sanal isler de reel kısımlarının işaretlerinin belirleyici faktör olduğunu görüyoruz. J matrisinin özdeğerlerini açıkça bulmaksızın da özdeğerler hakkındaki bu bilgi elde edilebilir: Nonlineer sistemin denge noktasındaki Jacobien matrisi

$$J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

olmak üzere, J nin özdeğerleri

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

veya $T = iz(J) = a + d$ ve $D = det(J) = ad - bc$ olmak üzere

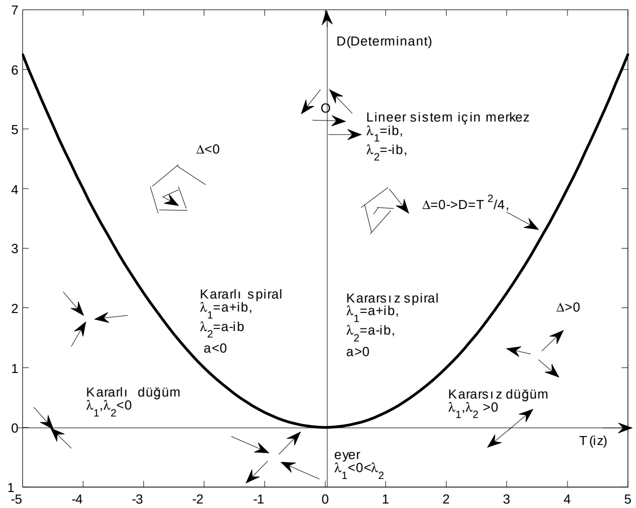
$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0$$

denkleminin kökleridir. Buradan $\Delta = T^2 - 4D$ diskriminantı ile

$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

elde ederiz. O halde

- $\Delta < 0$ için özdeğerler karmaşıktır.
  - $T > 0$ ise özdeğerlerin reel kısmı pozitiftir. Bu durumda denge noktası kararsız spiral,
  - $T < 0$ ise özdeğerlerin reel kısmı negatiftir, dolayısıyla denge noktası kararlı spiraldir.
  - $T = 0$ durumu ise denge noktası *lineer sistem* için kararlı merkezdir. Ancak bu durumda aynı sonuç nonlineer sistemin denge noktası için geçerli değildir.



Şekil 8.1: Difrerensiyel denklem sisteminin denge çözümü için kararlılık diyagramı

- $\Delta = 0$ için özdeğerler reel ve birbirine eşittir. *Bu durumda sadece lineer sistemin denge noktası hakkında bilgi edinebiliriz:*
  - $T > 0$ için(özdeğerler pozitif) denge noktası *lineer sistem* için kararsız
  - $T < 0$ için(özdeğerler negatif) denge noktası *lineer sistem* için kararlıdır.
- $\Delta > 0$ için özdeğerler reeldir.
  - $D \geq 0$ için
    - $T > 0$ ise denge noktası karasız düğüm,
    - $T < 0$ ise kararlı düğüm noktasıdır.
  - $D < 0$ ise denge noktası eyer noktasıdır.

Şekil 8.1 de Jacobien matrisinin özdeğerlerini bulmaksızın, denge noktasının karakterini belirleyebileceğimiz bir diyagram verilmektedir.

8.0.2 Ekonomi Modelinin kararlılık Analizi

Yukarıda verilen 1. ekonomi probleminin denge noktasını

$$\begin{aligned} I - \alpha C &= 0 \\ I - C - G_0 &= 0 \end{aligned}$$

sistemini çözerek

$$I = \frac{\alpha G_0}{\alpha - 1}, C = \frac{G_0}{\alpha - 1}$$

olarak elde ederiz. Jacobiyen matrisi ise

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}$$

olarak elde ederiz. Buradan Jacobien matrisin izi ve deteminantı ile özdeğerler arasındaki ilişkiden

$$\begin{aligned} T &= iz(J) = 1 - \beta = \lambda_1 + \lambda_2 \\ D &= \det(J) = \beta(\alpha - 1) = \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Öte yandan özdeğerler

$$\lambda^2 - (1 - \beta)\lambda + \beta(\alpha - 1) = \lambda^2 - T\lambda + D = 0$$

denkleminin kökleridir. Denklemin diskriminantı

$$\Delta = T^2 - 4D$$

dir.

Örneğimizde

$$\begin{aligned} \Delta &= T^2 - 4D = (1 - \beta)^2 - 4\beta(\alpha - 1) \\ &= (\beta + 1)^2 - 4\beta\alpha \end{aligned}$$

dır. O halde diyagrama göre

- $\Delta = (\beta + 1)^2 - 4\beta\alpha < 0$ ise özdeğerler karmaşıktır. Bu durumda

- eğer $T = 1 - \beta < 0$ ise, yani

$$\beta > 1 \text{ ve } \alpha > \frac{(\beta+1)^2}{4\beta}$$

  ise denge noktası kararlı spiraldir, çünkü reel kısımları negatif olan iki karmaşık özdeğer sözkonusudur.

- eğer $T = 1 - \beta = 0$ ise, yani

$$\beta = 1 \text{ ve } \alpha > \frac{(\beta+1)^2}{4\beta} = 1$$

  ise denge noktası kararlı merkezdir.

- eğer $T = 1 - \beta > 0$ ise, yani

$$\beta < 1 \text{ ve } \alpha > \frac{(\beta+1)^2}{4\beta}$$

  ise denge noktası kararsız spiraldir, çünkü reel kısımları pozitif olan iki karmaşık özdeğer sözkonusudur. Ancak bu durum modelimiz kapsamında değerlendirilmemektedir, çünkü kabülümüze göre $\beta \geq 1$ dir.

• $\Delta = (\beta+1)^2 - 4\beta\alpha \geq 0$ ise

  - eğer $T = 1 - \beta < 0$ ve $D = \beta(\alpha - 1) \geq 0$ ise, yani

$$\beta > 1 \text{ ve } 1 < \alpha \leq \frac{(\beta+1)^2}{4\beta}$$

    ise denge noktası kararlı düğümdür.

  - eğer $D = \beta(\alpha - 1) < 0$ ise, denge noktası eyer noktasıdır, ancak bu durum da model kapsamında incelenmemektedir, çünkü kabulümüz gereği $\beta \geq 1$ ve $\alpha > 1$ dir.

ÖRNEK 8.1. *$\beta = 4, \alpha = 1.1, G_0 = 1$ için $G = G_0$ ile ekonomi modelinin*

• denge noktasını belirleyiniz.

• denge noktasının kararlılığını irdeleyiniz.

- modelin genel çözümünü özdeğer ve özvektörler cinsinden belirleyiniz.

- $t \to \infty$ için $(I(t), C(t))$ nin davranışını inceleyiniz. Elde ettiğiniz sonuç denge noktasının karakteri ile uyumlu mudur?

- $I(0) = 1$,$C(0) = 4$ başlangıç değerlerini sağlayan çözümü belirleyerek, grafiğini Maxima ortamında çizdiriniz.

- Denge noktası

$$I^* = \frac{\alpha G_0}{\alpha - 1} = \frac{1.1}{1.1 - 1} = 11, C^* = \frac{G_0}{\alpha - 1} = \frac{1}{0.1} = 10$$

yani $(I^*, C^*) = (11, 10)$ noktasıdır.

- Jacobien matrisi

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -1.1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

için

$$\Delta = T^2 - 4D = 9 - 1.6 > 0, D = 0.4 > 0, T = -3 < 0$$

olup her ikisi de negatif olan iki özdeğer mevcuttur. O halde denge noktası kararlı düğümdür.

- Genel çözüm

$$\begin{pmatrix} I(t) \\ C(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(t) \\ C(t) \end{pmatrix}_H + \begin{pmatrix} I(t) \\ C(t) \end{pmatrix}_ö$$

olarak ifade edilir. Burada

$$\begin{pmatrix} I(t) \\ C(t) \end{pmatrix}_H = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

ve homojenliği bozan terim sabit bir vektör, yani

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\beta G_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

olduğu için, sabir bir özel çözüm, yani

$$\begin{pmatrix} I(t) \\ C(t) \end{pmatrix}_ö = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

```
(%i1) denk1:'diff(I(t),t)=I(t)-1.1*C(t);
(%o1) d/dt I(t)=I(t)-1.1 C(t)
(%i2) denk2:'diff(C(t),t)=4*(I(t)-C(t)-1);
(%o2) d/dt C(t)=4 (I(t)-C(t)-1)
(%i3) atvalue(I(t),t=0,1);
(%o3) 1
(%i4) atvalue(C(t),t=0,4);
(%o4) 4
(%i5) desolve([denk1,denk2],[I(t),C(t)]);
```

biçiminde özel çözüm arayarak

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

elde ederiz. O halde genel çözümü, bilinmeyen özdeğer ve özvektörler cinsinden

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I(t) \\ C(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I(t) \\ C(t) \end{pmatrix}_H + \begin{pmatrix} I(t) \\ C(t) \end{pmatrix}_ö \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

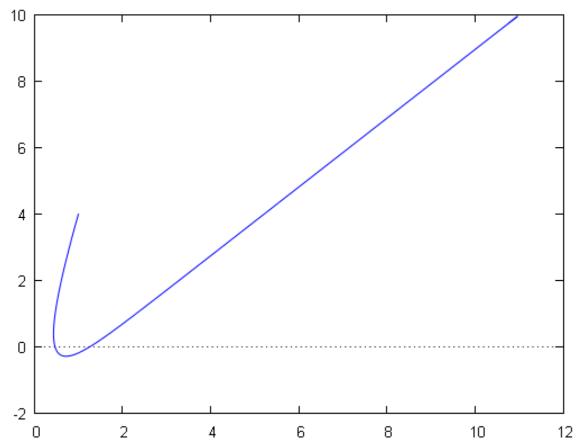
olarak elde ederiz.

- $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ olduğundan, $t \to \infty$ için $e^{\lambda_1 t} \to 0, e^{\lambda_2 t} \to 0$ ve dolayısıyla, $\binom{I(t)}{C(t)} \to \binom{11}{10}$ elde ederiz. O halde denge noktası gerçekten de kararlı bir düğüm noktasıdır.

- $I(0) = 1, C(0) = 4$ başlangıç değerlerini sağlayan çözümü Maxima ortamında aşağıdaki gibi belirleyebiliriz:

(%i7) wxplot2d(['parametric,rhs(%o5[1]),rhs(%o5[2]),[t,0,40],[nticks,300]]);

(%t7)



$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{e^{-3t/2}\left(-50\cosh(\sqrt{185}t/10) - 920\sinh(\sqrt{185}t/10)/\sqrt{185}\right)}{5} + 11 \\ C(t) &= \frac{e^{-3t/2}\left(-30\cosh(\sqrt{185}t/10) - 1250\sinh(\sqrt{185}t/10)/\sqrt{185}\right)}{5} + 10 \end{aligned}$$

elde ederiz.

- $t \to \infty$ için çözüm eğrisi, aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere $(11, 10)$ denge noktasına yakınsar:

ÖRNEK 8.2. *$\beta = 2, \alpha = 3/2, G_0 = 1$ için $G = G_0$ ile ekonomi modelinin*

- denge noktasını belirleyiniz.
- denge noktasının kararlılığını irdeleyiniz.
- modelin genel çözümünü belirleyiniz.
- $t \to \infty$ için $(I(t), C(t))$ nin davranışını inceleyiniz. Elde ettiğiniz sonuç denge noktasının karakteri ile uyumlu mudur?
- $I(0) = 1$,$C(0) = 4$ başlangıç değerlerini sağlayan çözümü belirleyerek grafiğini Maxima ortamında çiziniz.

- Denge noktası

$$I = \frac{\alpha G_0}{\alpha - 1} = \frac{3/2}{3/2 - 1} = 3, C = \frac{G_0}{\alpha - 1} = \frac{1}{1/2} = 2$$

yani $(I^*, C^*) = (3, 2)$ noktasıdır.

- Jacobien matris

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

ve

$$\Delta = T^2 - 4D = -3 < 0,\ T = \lambda_1 + \lambda_2 = -1,\ D = \lambda_1 \lambda_2 = 1$$

elde ederiz. O halde reel kısımları negatif olan iki karmaşık özdeğer

$$(\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2})$$

sözkonusudur. Bu durumda denge noktası kararlı spiraldir.

- Modeli

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

olarak yazalım. Genel çözümü

$$\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}_H + \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}_{Ö}$$

biçiminde homojen ve özel çözümlerin toplamı olarak ifade edebiliriz.

- $\begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin bir özvektör-özdeğer çifti

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}i\sqrt{3} + \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

biçimindedir. O halde $e^{\lambda t}V$ homojen kısmın bir çözümüdür. Homojen kısmın genel çözümü ise

$$\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}_H = c_1 \mathrm{Reel}(e^{\lambda t}V) + c_2 \mathrm{Sanal}(e^{\lambda t}V)$$

olarak ifade edilir. Daha açık olarak, gerekli sadeleştirmeden sonra,

$$\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}_H = e^{-1/2t}\left(c_1\text{Reel}(e^{\frac{1}{2}i\sqrt{3}t}V) + c_2\text{Sanal}(e^{\frac{1}{2}i\sqrt{3}t}V)\right)$$

olarak elde edilir.

- Özel çözüm için $\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}_{Ö} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ biçiminde çözüm arayarak, $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ elde ederiz. Buradan $t \to \infty$ için

  $$\begin{bmatrix} I(t) \\ C(t) \end{bmatrix} = e^{-1/2t}\left(c_1\text{Reel}(e^{\frac{1}{2}i\sqrt{3}t}V) + c_2\text{Sanal}(e^{\frac{1}{2}i\sqrt{3}t}V)\right) + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  elde ederiz,

- $I(0) = 1$,$C(0) = 4$ başlangıç değerlerini sağlayan çözümü maxima ortamında belirleyerek, grafiğini çizebiliriz:

$$\begin{aligned} I(t) &= e^{-t/2}\left(-2\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - 4\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) + 3 \\ C(t) &= e^{-t/2}\left(2\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - 14/\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) + 2 \end{aligned}$$

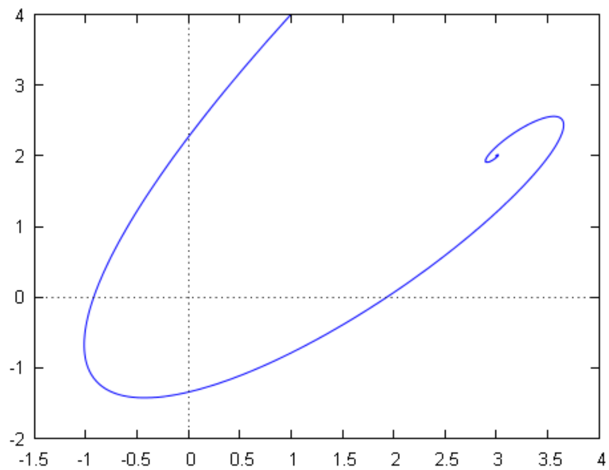
- O halde gerçekten de denge çözüm kararlı bir spiraldir.

$G = G_0 + kI (k > 0$ sabit) olması durumunda elde edilen lineer modelin analizini okuyucuya bırakıyoruz.(Alıştırma 3).

8.0.3 Nonlineer Model

Öteyandan $G = G_0 + kI^2 (k > 0$ sabit) olması durumunda ise nonlineer model elde ederiz. Açıkça model

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= I - \alpha C \\ \frac{dC}{dt} &= \beta(I - C - G_0 - kI^2) \end{aligned} \tag{8.5}$$



olarak ifade edilir. Bu durumda denge noktası, aşağıdaki nonlineer sistemin çözümleridir:

$$\begin{aligned} I - \alpha C &= 0 \\ I - C - G_0 - kI^2 &= 0 \end{aligned}$$

dan

$$(I_1, C_1) = (\frac{-(1-\alpha)+\sqrt{\Delta}}{2k\alpha}, \frac{-(1-\alpha)+\sqrt{\Delta}}{2k\alpha^2})$$

ve

$$(I_2, C_2) = (\frac{-(1-\alpha)-\sqrt{\Delta}}{2k\alpha}, \frac{-(1-\alpha)-\sqrt{\Delta}}{2k\alpha^2})$$

elde ederiz, burada $\Delta = (1-\alpha)^2 - 4k\alpha^2 G_0$ dır.

$$k < \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha^2 G_0}$$

için $\Delta > 0$ olup, her iki denge noktası da reeldir. Öte yandan $\alpha > 1$ için ise her iki denge noktası da $I - C$ düzleminin birinci bölgesindedir. (I, C) denge noktası için

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ \beta(1-2kI) & -\beta \end{bmatrix}$$

olup, $I = I_1$ için

$$\begin{aligned} T &= 1-\beta \\ D &= -\beta+\alpha\beta(1-2kI) \\ &= \beta(-1+\alpha(1-2kI)) \\ &= \beta(-1+\alpha(1-2kI_1)) \\ &= -\sqrt{\Delta} \end{aligned}$$

olup, (I_1, C_1) denge noktası β dan bağımsız olarak bir eyer noktasıdır.

(I_2, C_2) için ise $T = 1-\beta, D = \sqrt{\Delta} > 0$ dır. Bu durumda $\beta > 1$ için denge noktası kararlı bir düğüm noktasıdır.

ÖRNEK 8.3. *$\alpha = 1.1, \beta = 2, G_0 = 1, k = 0.001$, parametreleri için Nonlineer modelin denge noktalarını belirleyerek, kararlılıklarını araştırınız. Ayrıca her bir denge noktasının komşuluğundaki yörüngeleri çizdirerek, denge noktalarının tahmin ettiğiniz karakterlerinin doğruluğunu inceleyiniz.*

Denge noktalarından biri

$$[I_1, C_1] = [78.1060\ 71.0054]$$

ve bu noktada

$$\lambda_1 = -1.1274, \lambda_2 = 0.1274$$

olup bu denge noktası bir eyerdir. Öte yandan diğer denge noktası

$$[I_2, C_2] = [12.803111.6392]$$

için

$$\lambda_1 = -0.8261, \lambda_2 = -0.1739$$

olup denge noktası kararlı düğümdür, Şekil 8.2.

Şekil 8.2 deki yörüngeler, 8.5 sisteminin Runge-Kutta II yöntemiyle çözen aşağıdaki program yardımıyla elde edilmiştir:

Alıştırmalar 8.1. *1. Lineer modelin, $G = G_0 = 1$ ile aşağıda belirtilen her bir parametre kümesi için denge noktasını belirleyerek, denge noktasının karşılarında belirtilen karaktere sahip olduğunu gösteriniz.*

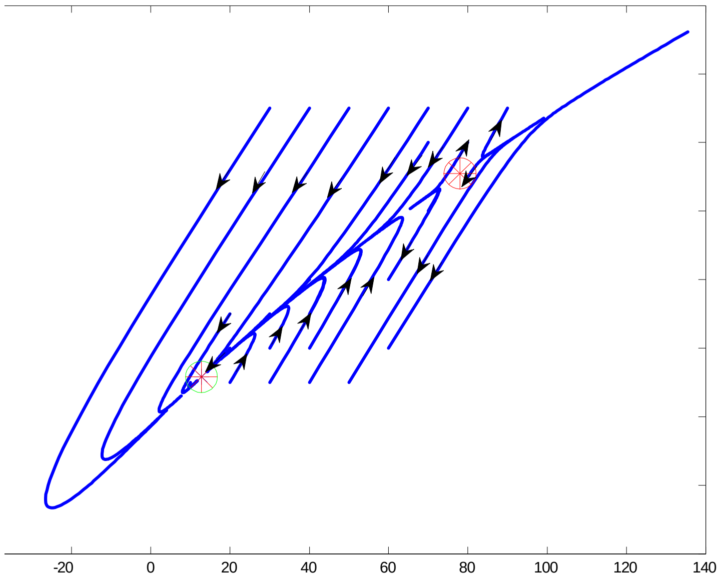
(a) $\alpha = 2, \beta = 1$, merkez

```
% Nonlineer Ekonomi Modeli
%----------------------------------------

function rk2se(h,Tmax)
alf=1.1;G0=1;k=0.001;beta=2;
delta=(1-alf)^2-4*k*alf^2*G0;
I1=((alf-1)+sqrt(delta))/(2*k*alf);C1=I1/alf;
[I1,C1] % birinci denge nokta
a=1;b=beta-1;c=alf*beta*(1-2*k*I1)-beta;
roots([a,b,c]) % birinci denge noktada özdegerler
I2=((alf-1)-sqrt(delta))/(2*k*alf);C2=I2/alf;
[I2,C2] % ikinci denge nokta
a=1;b=beta-1;c=alf*beta*(1-2*k*I2)-beta;
roots([a,b,c]) % ikinci denge noktada özdegerler
I=15:15:90; %I(t),C(t)
C=I; %yörüngeleri için başlangı ç degerler
n=length(I);
for i=1:n
 for j=1:n
   t=0;T=t;X=[I(i),C(j)];U=X';
    while t<=Tmax
       m1=f(t,U);
       m2=f(t+h,U+h*m1);
       U=U+h*(m1+m2)/2;
       t=t+h;
       T=[T;t];
       X=[X;U'];
    end
    plot(X(:,1),X(:,2),'linewidth',2); hold on;
   end
end

 function z=f(t,X)
  Is=X(1);Cs=X(2);
  z=[Is-alf*Cs;beta*(Is-Cs-G0-k*Is^2)]; % Ekonomi modeli
 end
end
%----------------------------------------
```

Program 8.1: Runge-Kutta-II yöntemi ile Nonlineer Ekonomi Modelinin yörüngelerii



Şekil 8.2: Nonlineer ekonomi modelinin denge çözümleri komşuluğundaki yörüngeler.

(b) $\alpha = 3/2, \beta = 2,$ *kararlı spiral*

(c) $\alpha = 1.2, \beta = 1/2,$ *kararsız spiral*

(d) $\alpha = 18/17, \beta = 2,$ *kararlı düğüm*

(e) $\alpha = 18/17, \beta = 1/2,$ *kararsız düğüm*

(f) $\alpha = 1/2, \beta = 2,$ *eyer noktası*

2. *Soru 1 in her bir şıkkında belirlediğiniz denge noktasının karakterini grafiksel olarak ta gözlemleyiniz. Bu amaçla denge noktasının uygun komşuluğunda seçeceğiniz bazı başlangıç noktaları ile çözüm eğrilerini Maxima ortamında belirleyeyiniz.*

3. $G = 1 + kI$ *ile lineer model için aşağıdaki ifadeleri doğru yapacak olan uygun* $\{\alpha, \beta, k\}$ *parametre kümesi ve bu küme ile modelin denge noktasını belirleyiniz.*

   (a) $\alpha =$ ___ $, \beta =$ ___ *ve* $k =$ ___ *değerleri için denge noktası* $(I, C) =$ (___ , ___) *dir ve bu nokta merkezdir.*

(b) $\alpha =$, $\beta =$ *ve* $k =$ *değerleri için denge noktası* $(I, C) =$ (,) *dir ve bu nokta kararlı spiraldir.*

(c) $\alpha =$, $\beta =$ *ve* $k =$ *değerleri için denge noktası* $(I, C) =$ (,) *dir ve bu nokta kararsız spiraldir.*

(d) $\alpha =$, $\beta =$ *ve* $k =$ *değerleri için denge noktası* $(I, C) =$ (,) *dir ve bu nokta kararsız düğümdür.*

(e) $\alpha =$, $\beta =$ *ve* $k =$ *değerleri için denge noktası* $(I, C) =$ (,) *dir ve bu nokta kararlı düğümdür.*

(f) $\alpha =$, $\beta =$ *ve* $k =$ *değerleri için denge noktası* $(I, C) =$ (,) *dir ve bu nokta eyer noktasıdır.*

4. *Soru 3 de denge noktası için öngördüğünüz karakteri Soru 2 de olduğu üzere Maxima ortamında test yapınız.*

5. *Soru 2 ve Soru 3 deki çözüm eğrilerini Program yardımıyla da MATLAB/Octave ortamında belirleyiniz.*

Kaynaklar ve ilgili literatür

[1] Jordan, D. W., Smith, P., Nonlinear Ordinary Differential Equations: Problems and Solutions, Oxford University Press, 2007.