Bölüm 3

İkinci basamaktan sabit katsayılı ve homojen denklemler için karakteristikler yöntemi

Bu bölümde ikinci basamaktan sabit katsayılı homojen denklemlerin

- karakteristikler üzerinde daha basit diferensiyel denkleme nasıl dönüştüğünü,
- sözkonusu diferensiyel denklemin çözümü yardımıyla genel çözümün nasıl elde edildiğini ve
- özel bazı yan şartları sağlayan çözümlerinin nasıl elde edildiğini uygulamalı örneklerle inceliyoruz. Ayrıca
- özel olarak dalga denkleminin D'Alembert çözümünü **Maxima sembolik cebir yazılımı** yardımıyla kapsamlı olarak irdeliyoruz.

3.1 Karakterisitikler yöntemi ile basit forma indirgeme ve çözüm

Önceki bölümde

$$au_x + bu_y = cu + d$$

denkleminin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

denklemini sağlayan karakteristik doğrular üzerinde

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{a}u + \frac{d}{a}$$

denklemine indirgendiğini gözlemlemiştik. Bu bölümde ise dalga, ısı ve Laplace denklemlerini de içeren sabit katsayılı lineer ve homojen

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy}=0 \tag{3.1}$$

biçiminde ifade edilebilen denklemlerin kanonik form adı verilen daha basit forma karakteristikler üzerinde nasıl dönüştürüldüğünü ve genel çözümlerinin nasıl elde edildiğini inceliyeceğiz.

1. Eğer $a = 0$ ise

   $$(bu_x + cu_y)_y = 0$$

   elde ederiz. Buradan y ye göre integral almak suretiyle, keyfi f fonksiyonu için

   $$bu_x + cu_y = f(x)$$

   elde ederiz. Eğer $b = 0$ ise ($c \neq 0$) olmak üzere $u_y = f(x)/c$ den y değişkenine göre integral alarak

   $$u = F(x)y + G(x)$$

   elde ederiz, burada $F(x) := f(x)/c$. $b \neq 0$ olması durumunda ise her iki tarafı b ye bölerek,

   $$u_x + \frac{c}{b}u_y = f(x)/b$$

   elde ederiz. Önceki bölümdeki yöntemimizi takip ederek,

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{b}$$

   denklemini sağlayan

   $$y - \frac{c}{b}x = sabit$$

karakteristik doğruları üzerinde

$$\frac{du}{dx} = f(x)/b$$

veya karakteristik üzerinde integral almak suretiyle,

$$\begin{aligned} u &= 1/b \int f(x)dx + G(sabit) \\ &= F(x) + G(y - \frac{c}{b}x) \end{aligned}$$

genel çözümünü elde ederiz, burada $F(x) := 1/b \int f(x)dx$ dir.

2. $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\Delta = b^2 - 4ac$ diskriminantını hesaplayalım.

   (a) Öncelikle $\Delta \neq 0$,yani (3.1) denkleminin hiperbolik veya eliptik olduğunu kabul edelim. (3.1) denklemini yeniden düzenleyerek

   $$u_{xx} + \frac{b}{a}u_{xy} + \frac{c}{a}u_{yy} = 0 \tag{3.2}$$

   olarak yazalım.∂_x, ∂_y sırasıyla x ve y ye göre kısmi türev operatörleri olmak üzere operatör notasyonu ile (3.2) denklemini, b_1, b_2 skalerleri ile

   $$(\partial_x - b_1\partial_y)(\partial_x - b_2\partial_y)u = 0 \tag{3.3}$$

   olarak yazalım. (3.3) ifadesi, uygun hipotezler altında $u_{xy} = u_{yx}$ bağıntısı ile açıkça

   $$u_{xx} - (b_1 + b_2)u_{xy} + b_1b_2u_{yy} = 0 \tag{3.4}$$

   olarak ifade edilebilir. O halde (3.2) ve (3.4) i karşılaştırarak

   $$\begin{aligned} b_1 + b_2 &= -\frac{b}{a}, \\ b_1b_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

   elde ederiz. O halde b_1, b_2 skalerleri

   $$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.5}$$

denkleminin kökleridirler. Ayrıca $\Delta \neq 0$ kabulümüzden dolayı $b_1 \neq b_2$ dir. Öncelikle (3.3) bağıntısındaki ikinci çarpanı, yani

$$(\partial_x - b_2\partial_y)u = u_x - b_2u_y$$

ifadesini göz önüne alalım.

$$\frac{dy}{dx} = -b_2 \tag{3.6}$$

denklemini sağlayan

$$y + b_2x = c_1 \tag{3.7}$$

doğruları üzerinde

$$\frac{du}{dx} = u_x - b_2u_y$$

olup,

$$v := \frac{du}{dx}$$

olarak tanımlanmak üzere (3.3) denklemini

$$(\partial_x - b_1\partial_y)v = v_x - b_1v_y = 0 \tag{3.8}$$

olarak ifade edebiliriz. Ancak

$$\frac{dy}{dx} = -b_1$$

denklemini sağlayan

$$y + b_1x = c_2 \tag{3.9}$$

karakteristik doğrular üzerinde ise (3.8) denklemi

$$\frac{dv}{dx} = 0$$

denklemine dönüşür ki buradan

$$v = f(c_2) = f(y + b_1x)$$

elde ederiz. Öte yandan (3.7) üzerinde

$$\frac{du}{dx} = v = f(y + b_1x)$$

olup, integral almak suretiyle

$$\begin{aligned} u &= F(y+b_1x)+G(c_1) \\ &= F(y+b_1x)+G(y+b_2x) \end{aligned}$$

genel çözümünü elde ederiz.

Sonuç olarak özetlemek gerekirse, $a \neq 0$ olmak üzere,

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}=0$$

denklemine ait

$$ax^2+bx+c=0$$

denkleminin $\Delta = b^2-4ac \neq 0$ ve bu denklemin kökleri b_1, b_2 ise, genel çözümü denklemin gerektirdiği basamaktan türevleri mevcut ve sürekli olan keyfi F ve G fonksiyonları için

$$u = F(b_1x+y)+G(b_2x+y) \tag{3.10}$$

olarak verilir. $y+b_2x=c_1$ ve $y+b_1x=c_2$ doğruları ise denklemin karakteristik doğrularıdırlar. $\Delta > 0$ olması durumunda, yani hiperbolik denklemler için karakteristikler reel, $\Delta < 0$ olması durumunda, yani eliptik denklemler için ise sanaldır.

(b) Şimdi de $\Delta = 0$ olması durumunu inceleyelim. $y = y(x)$ denklemini sağlayan karakteristik doğruları üzerinde, $u_{xy} = u_{yx}$ kabulü ile birlikte

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= u_x + \frac{dy}{dx}u_y, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= (u_x+\frac{dy}{dx}u_y)_x + (u_x+\frac{dy}{dx}u_y)_y\frac{dy}{dx} \\ &= u_{xx}+2\frac{dy}{dx}u_{xy}+u_{yy}(\frac{dy}{dx})^2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

elde ederiz, burada karakteristiklerin doğrular olduğunu ve dolayısıyla $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ özelliğini kullandık. (3.2) ve (3.11) yi karşılaştırarak

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}$$

seçeneği ile

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 = 4ac \Rightarrow (\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} = (\frac{dy}{dx})^2$$

elde ederiz. O halde (3.2) ve (3.11) yi karşılaştırırsak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}$$

denklemini sağlayan karakteristik doğrular üzerinde

$$\frac{d^2u}{dx^2} = u_{xx} + \frac{b}{a}u_{xy} + \frac{c}{a}u_{yy} = 0$$

elde ederiz. Buradan

$$y - \frac{b}{2a}x = c_1$$

karakteristikleri üzerinde

$$\frac{du}{dx} = F(c_1)$$

ve tekrar integral almak suretiyle

$$u = F(c_1)x + G(c_1)$$

veya denklemin gerektirdiği basamaktan türevleri mevcut ve sürekli olan keyfi F ve G fonksiyonları için

$$u = F(y - \frac{b}{2a}x)x + G(y - \frac{b}{2a}x) \tag{3.12}$$

genel çözümünü elde ederiz.

Uyarı. *Yukarıda takip ettiğimiz genel çözüm elde etme yöntemi klasik kitaplarda incelenen koordinat dönüşüm yönteminden farklı olmakla birlikte, koordinat dönüşümlerine gerek kalmadan aynı sonucu elde etmemizi sağlamaktadır.*

ÖRNEK 3.1.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Laplace denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

$$a = 1, b = 0, c = 1$$

olup,

$$\Delta = -4 \neq 0$$

ve karakteristik denklem

$$ax^2 + bx + c = x^2 + 1 = 0$$

olup, denklemin kökleri

$$b_1 = i, b_2 = -i$$

dir ve genel çözümü (3.10) den, denklemin gerektirdiği basamaktan türevleri mevcut ve sürekli olan keyfi F ve G fonksiyonları için

$$u = F(y + ix) + G(y - ix)$$

olarak elde ederiz.Eliptik türden olan denklemin karakteristiklerinin karakteristiklerinin

$$y + ix = sabit, y - ix = sabit$$

sanal doğruları olduğuna dikkat edelim.

Genel çözümü

$$u = F(x + iy) + G(x - iy) \tag{3.13}$$

biçiminde de ifade edebiliriz.■

Eliptik denklemler içerisinde fiziksel uygulamalarıyla akla ilk gelen denklem *Laplace denklemidir.*

Δ Laplace operatörü olmak üzere x ve y değişkenli ikinci basamaktan türevleri mevcut olan u fonksiyonu için Laplace denklemi

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

biçiminde ifade edilebilir.

Laplace denklemi fizikte elektrik ve manyetizma, mühendislikte akışkanlar mekaniği gibi alanlarda bir çok problemin modeli olarak ortaya çıkar:

- Fizikte Laplace denklemi elektrik yük yoğunluğunun olmadığı bir ortamda Maxwell denklemlerinden birisini oluşturur ve çözümü, yani u, potansiyel fonksiyonu olarak adlandırılır ve $E = -(u_x, u_y)$ ise söz konusu ortamdaki elektrik alanını temsil eder.

- Akışkanlar mekaniğinde, düşük hızda ve uygun bazı şartlarda u hız potansiyeli olarak adlandırılır ve örneğin iki boyutlu akışkan hareketinde (u_x, u_y) sırasıyla akışkanın x ve y yönündeki hızını temsil eder.

- u yer değişmeyi temsil etmek üzere Laplace denkleminin çözümü ile statikte yer değiştirme ve gerilme gibi ilgili fiziksel özellikler belirlenebilir.

Laplace denklemi kompleks fonksiyonlar terisinde de önemli rol oynar:

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

olarak tanımlanan komplek değerli fonksiyonun bir nokta komşuluğunda analitik olması(türevlenebilir ve tek değerli) olması için Cauchy-Rieman denklemleri olarak bilinen

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

denklemlerinin sağlanması gerektiğini hatırlayalım. Bu durumda hem u ve hem de v Laplace denklemini sağlar. Analitik fonksiyon denilince aklımıza gelen örneklerden bazıları

$$z^n, n \geq 0, \sin(z), \cos(z), e^z,$$

olarak ifade edebiliriz. O halde bu fonksiyonların reel ve sanal kısımları Laplace denkleminin çözümleridir:

Örneğin

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

olup

$$\begin{aligned} u &= reel(f) = x^2 - y^2, \\ v &= sanal(f) = 2xy \end{aligned}$$

fonksiyonları Laplace denkleminin çözümleridir. Bu çözümler 3.13 ile verilen genel çözümde uygun F ve G ile elde edilebilir: Örneğin $F(z) = G(z) = z^2/2$ için

$$\begin{aligned} & F(x + iy) + G(x - iy) \\ = & \frac{(x + iy)^2}{2} + \frac{(x - iy)^2}{2} \\ = & x^2 - y^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer biçimde

$$F(z) = z^2/2i, G(z) = -z^2/2i$$

için

$$\begin{aligned} & F(x+iy) + G(x-iy) \\ = & \frac{(x+iy)^2}{2i} - \frac{(x-iy)^2}{2i} \\ = & 2xy \end{aligned}$$

çözümünü elde ederiz.

Benzer biçimde

$$\cos(iy) = \cosh(y), \sin(iy) = i\sinh(y)$$

bağıntıları ile birlikte

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sin(x+iy) \\ &= \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) \\ &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) \end{aligned}$$

bağıntısından

$$\begin{aligned} u &= reel(\sin(z)) = \sin(x)\cosh(y) \\ v &= sanal(\sin(z)) = \cos(x)\sinh(y) \end{aligned}$$

fonksiyonları Laplace denkleminin çözümleridir. Bu çözümleri hangi F ve G için (3.13) ile verilen genel çözümden elde edebiliriz?

ÖRNEK 3.2.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

$$a = 1, b = 2, c = 1$$

ve

$$\Delta = 0$$

olup,

$$\frac{b}{2a} = 1$$

dir ve genel çözümü (3.12) den, denklemin gerektirdiği basamaktan türevleri mevcut ve sürekli olan keyfi F ve G fonksiyonları için

$$u = F(y-x)x + G(y-x)$$

olarak elde ederiz. Parabolik türden olan bu denklemin karakteristiği $y-x = \mathit{sabit}$ gerçel doğrusudur.■

Parabolik denklemler içerisinde fiziksel uygulamalarıyla ön plana çıkan denklem ısı veya diğer ismiyle difüzyon denklemi olarak bilinen

$$u_t = ku_{xx}$$

denklemidir. Ancak düşük basamaktan türev terimi de içeren bu denklemin genel çözümünü karakteristikler yöntemi ile elde edemeyiz. Bu denklemin çözümünü 4. Bölümde inceleyeceğiz.

ÖRNEK 3.3.

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

Bu örnekte

$$a = 1, b = 0, c = -1$$

olup,

$$\Delta = 4 \neq 0$$

ve karakteristik denklem

$$ax^2 + bx + c = x^2 - 1 = 0$$

olup, denklemin kökleri

$$b_1 = 1, b_2 = -1$$

dir ve genel çözümü (3.10) den, denklemin gerektirdiği basamaktan türevleri mevcut ve sürekli olan keyfi F ve G fonksiyonları için

$$u = F(y+x) + G(y-x)$$

olarak elde ederiz. Hiperbolik türden olan bu denklemin karakteristiklerinin $y + x = \mathit{sabit}$, $y - x = \mathit{sabit}$ gerçel doğruları olduğuna dikkat edelim.

ÖRNEK 3.4.

$$u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = 0$$

denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

$\Delta = 3^2 - 4 > 0$ olup, denklem hiperbolik türdendir. Karakteristik denklem

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

olup, kökleri

$$b_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, b_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

dir. O halde genel çözümü denklemin gerektirdiği basamaktan türevleri mevcut ve sürekli olan keyfi F ve G fonksiyonları için

$$u = F(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}x + y) + G(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}x + y)$$

olarak elde ederiz.

Hiperbolik denklemler içerisinde fiziksel uygulamalarıyla akla gelen ilk denklem aşağıda verilen dalga denklemidir.

ÖRNEK 3.5.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

dalga denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

$$\Delta = 4c^2 > 0$$

ve karakteristik denklem

$$x^2 - c^2 = 0$$

olup, denklemin kökleri

$$b_1 = c, b_2 = -c$$

dir ve genel çözümü (3.10) den, denklemin gerektirdiği basamaktan türevleri mevcut ve sürekli olan keyfi F ve G fonksiyonları için

$$u = F(x + ct) + G(x - ct) \tag{3.14}$$

olarak elde ederiz. Hiperbolik türden olan denklemin karakteristiklerinin karakteristiklerinin $x + ct = sabit$, $x - ct = sabit$ gerçel doğruları olduğuna dikkat edelim.

3.1.1 Dalga Denkleminin D'Alembert[1] Çözümü

Bir önceki örnekte göz önüne aldığımız dalga denklemini $x-t$ düzleminin $t>0$ bölgesine kısıtlamak suretiyle yeniden gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx} &= 0, -\infty < x < \infty, t>0 \\ u(x,0) &= f(x), \\ u_t(x,0) &= g(x). \end{aligned}$$

Dar bir kanaldaki suyun, referans alınan bir seviyeye göre x noktası ve t anındaki konumunu $u(x,t)$ ile gösterelim. Bu durumda $f(x)$ ve $g(x)$ ise sırasıyla dalga hareketinin başlangıç konumu ve düşey yöndeki hızını temsil etmektedir ve bilinen fonksiyonlardır. (3.14) da verilen genel çözümdeki F ve G fonksiyonlarını, verilen f ve g fonksiyonları yardımıyla hesaplayalım. Başlangıç konum ve hız yardımıyla

$$F(x)+G(x) = f(x) \tag{3.15}$$

$$cF'(x)-cG'(x) = g(x) \tag{3.16}$$

elde ederiz. Ayrıca f ve g fonksiyonlarının R üzerinde integrallenebilir olduğunu kabul edelim. (3.16) bağıntısını $(-\infty, x)$ aralığı üzerinde integre ederek,

$$F(x)-G(x)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{x} g(s)ds + c_1 \tag{3.17}$$

bağıntısını elde ederiz. (3.15) ve (3.17) denklemlerini tarafa tarafa toplayarak

$$F(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} g(s)ds + c_1/2 \tag{3.18}$$

ve (3.17) denklemini (3.15) den çıkararak

$$G(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} g(s)ds \tag{3.19}$$

[1] Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), Fransız bilim adamı.

elde ederiz. (3.15) sağlanması gerektiğinden $c_1 = 0$ olur. O halde F ve G fonksiyonlarına karşılık gelen ifadeleri (3.14) genel çözümünde yerine yazarak,

$$\begin{aligned} u &= F(x+ct) + G(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x-ct} g(s)ds \\ &= \frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds \end{aligned} \tag{3.20}$$

D'Alembert çözümünü elde ederiz.

ÖRNEK 3.6.

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= \frac{1}{1+x^2}, \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

ile tanımlanan Cauchy probleminin çözümünü belirleyiniz.

Çözüm formülünde $c = 1, f(x) = 1/(1+x^2), g(x) = 0$ alarak

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+t)^2+1} + \frac{1}{(x-t)^2+1}\right)$$

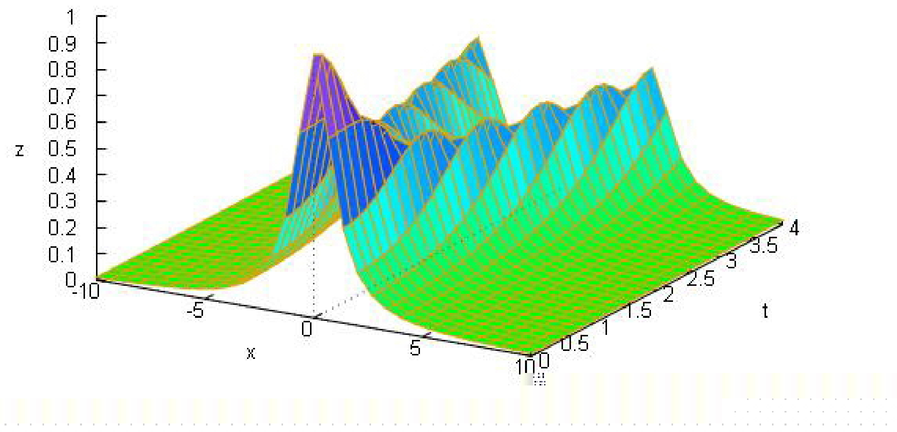
elde ederiz. Çözümümüzün Maxima ortamında ve $[-10,10]\times[0,4]$ bölgesi üzerindeki grafiği Şekil 3.1 ile sunulmaktadır.

Şakil 3.1 de $z = u(x,t)$ yer değiştirmesi grafiksel olarak sunulmaktadır. Şekilden görüleceği üzere, f fonksiyonuyla tanımlanan başlangıç dalga, ilerleyen zamanlarda *genliğinin yarısına eşit* olan iki ayrı dalga hareketine dönüşmekte ve birisi $x - t = x_0$ karakteristiği boyunca sağa, diğeri de $x + t = x_0$, karakteristiği sol yöne doğru ilerlemektedirler.

ÖRNEK 3.7.

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= 0, \\ u_t(x,0) &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

ile tanımlanan Cauchy probleminin çözümünü belirleyiniz.



Şekil 3.1: Örnek 3.6 e ait çözüm grafiği.

Çözüm formülünde $c = 1, f(x) = 0, g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ alarak

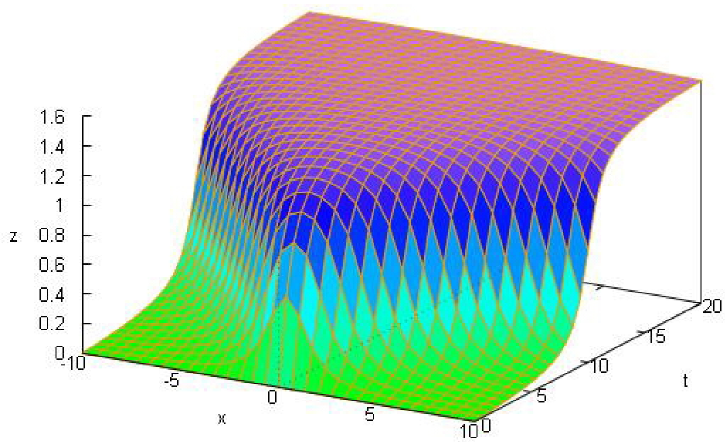
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$

integrali yardımıyla

$$u(x,t) = \frac{1}{2} (\arctan(x+t) - \arctan(x-c))$$

elde ederiz. Çözümümüzün Maxima ortamında ve $[-10, 10] \times [0, 20]$ bölgesi üzerindeki grafiği Şekil 3.2 ile sunulmaktadır.

Şekil 3.2 den görüleceği üzere başlangıç konumu $f(x) = 0$ ve başlangıç hızı $g(x) = 1/(1+x^2)$ ile tanımlanan dalga, ilerleyen zaman diliminde $x - t = x_0$ karakteristiği boyunca sağa, diğeri de $x + t = x_0$, karakteristiği sol yöne doğru, Örnek 3.6 in aksine *bölünerek ilerlemek* yerine, *yayılarak ilerlemektedirler. Söz konus dalga hareketinin ideal ortamda gerçekleştiği ve dolayısıyla dış etkenlerin olası etkileri ihmal edildiği için bu durum beklentimiz yönündedir.*



Şekil 3.2: Örnek 3.7 ye ait çözüm grafiği

Problemimizi sınır etkilerinin ihmal edildiği yeterince uzun ve başlangıçta yatay ve düz konumda bulunan bir elastik sicime merkezi konumdaki küçük bir dokunuşun yayılan etkisinin matematiksel modeli olarak düşünebiliriz.

Parçalı sürekli başlangıç değerlerine izin vererek, her noktada sürekli olması gerekemeyen **zayıf çözüm** adı verilen çözümler elde edilebilir. Bu bağlamda aşağıdaki örneği inceleyelim

ÖRNEK 3.8.

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \textit{diğer } x \textit{ değerleri} \end{cases}, \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

probleminin çözümünü belirleyiniz.

Yukarıda verilen D'Alembert çözüm formülünden

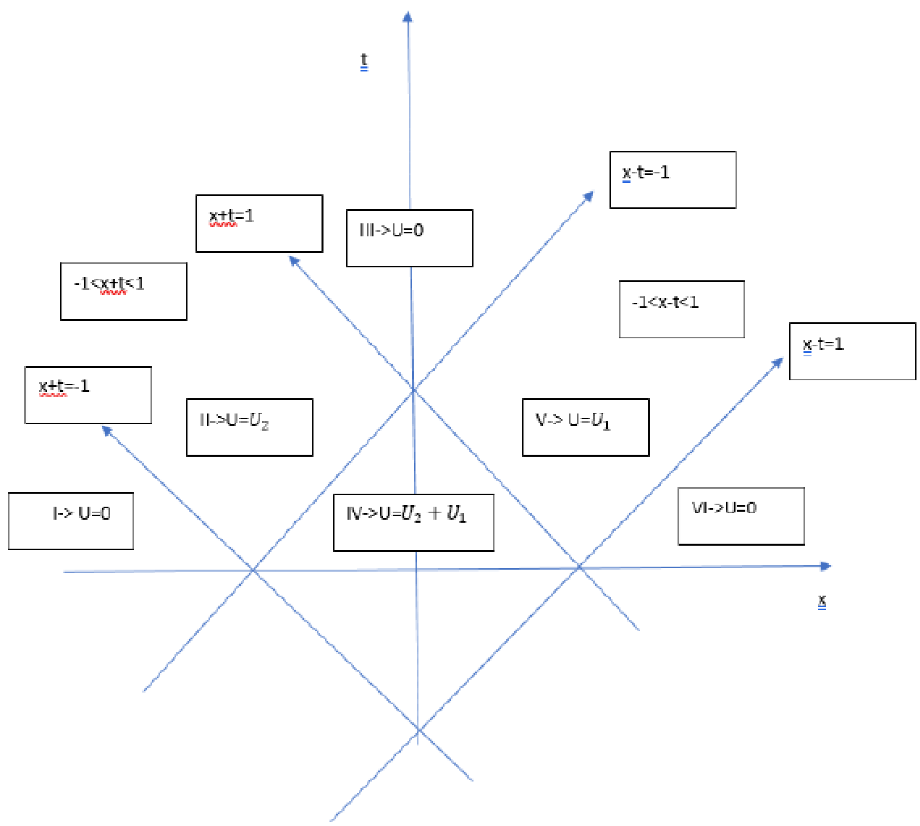
$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(f(x-t)+f(x+t)) \qquad (3.21) \\ &= U_1+U_2 \\ &= \frac{1}{2}\begin{cases} 1-(x-t)^2 & -1 \le x-t \le 1 \\ 0 & \text{diğer } x \text{ değerleri} \end{cases} \\ &\quad +\frac{1}{2}\begin{cases} 1-(x+t)^2 & -1 \le x+t \le 1 \\ 0 & \text{diğer } x \text{ değerleri} \end{cases} \end{aligned}$$

elde ederiz. Daha spesifik olarak çözümü bir kaç farklı durum için analiz edebiliriz.

Şekil 3.3 de $t>0$ düzlemi $I, II, ..., IV$ bölgeye ayrılmıştır. Her bir bölge için (3.21) ile verilen çözümün katkı yapan bileşeni incelenerek,

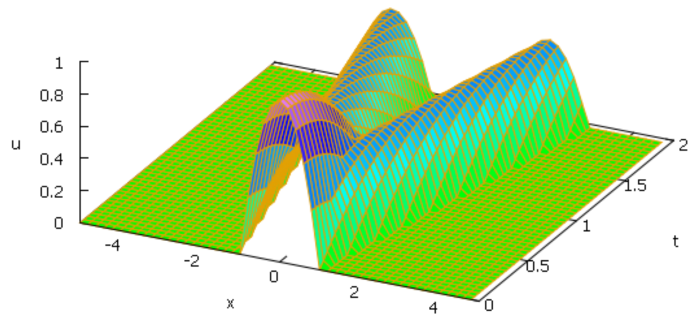
Öncelikle

1. $x-t<-1$ Şekilde I, II ve III ile gösterilen bölgelerden
   (a) $x+t<-1$ eşitsizliğini sağlayan I. bölgede $u=0$ dır.
   (b) $-1 \le x+t \le 1$ eşitsizliğini sağlayan II. bölgede
   $$u = u_2 = 1/2(1-(x+t)^2)$$
   (c) $x+t>1$ eşitsizliğini sağlayan III. bölgede $u=0$ dır.
2. $-1 \le x-t \le 1$ eşitsizliği ile
   (a) $-1 \le x+t \le 1$ eşitsizliğini sağlayan IV. bölgede
   $$\begin{aligned} u &= u_1+u_2 \\ &= 1/2(1-(x-t)^2)+1/2(1-(x+t)^2) \\ &= 1-[(x-t)^2+(x+t)^2] \end{aligned}$$
   dir.
   (b) $x+t>1$ eşitsizliğini sağlayan V. bölgede
   $$u = u_2 = 1/2(1-(x-t)^2)$$
3. $x-t>1$ ve $x+t>1$ eşitsizliğini sağlayan VI. bölgede $u=0$ dır.



Şekil 3.3: Örnek 3.8 e ait çözüm bölgeleri ve değerleri.

Elde edilen analitik çözümün Maxima ortamında çizilen grafiği Şekil 3.4 te sunulmaktadır.



Şekil 3.4: Örnek 3.8 e ait çözüm grafiği

Özetle bu bölümde

- ikinci basamaktan sabit katsayılı ve hiperbolik, parabolik ve eliptik denklem sınıfına ait bazı denklemlerin genel çözümlerinin nasıl elde edildiğini ve ayrıca
- Dalga denkleminin d'Alembert çözümünün nasıl elde edildiğini Maxima ortamında d'Alembert çözümüne ait integraktif uygulama geliştirmek suretiyle incelemiş olduk.

Problem 8 ve 9 ile verilen uygulamaları gerçekleştirerek dalga denklemini daha yakından analiz edebilirsiniz.

Alıştırmalar 3.1.

1. $u = u(x,y)$ olmak üzere

$$u_{xx} + u_{yx} = 0, -\infty < x, y < \infty$$

denklemi verilsin.

(a) Verilen denklemi $(u_x + u_y)_x = 0$ yazarak, integral almak suretiyle birinci basamaktan denkleme indirgeyerek çözünüz.

(b) *Denklemin türünü belirleyerek çözünüz.*

(c) *(a) ve (b) de elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırınız.*

2. $u = u(x, y)$ *olmak üzere*

$$u_{xy} + u_{yy} = 0, -\infty < x, y < \infty$$

denklemi verilsin.

(a) *Verilen denklemi* $(u_x + u_y)_y = 0$ *yazarak, integral almak suretiyle birinci basamaktan denkleme indirgeyerek çözünüz.*

(b) *Denklemin türünü belirleyerek çözünüz.*

(c) *(a) ve (b) de elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırınız.*

3. *Aşağıda verilen denklemlerin genel çözümlerini belirleyiniz.*

(a)
$$u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$$

(b)
$$u_{xx} + 4u_{yy} = 0$$

(c)
$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4U_{yy} = 0$$

4. *Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu kontrol ediniz*

$$\begin{aligned} \cosh(ix) &= \cos(x) \\ \sinh(ix) &= i\sin(x) \\ \cosh(x) &= \cos(ix) \\ \sinh(x) &= -i\sin(ix) \end{aligned}$$

5. $f(z) = \cos(z)$ *fonksiyonunun reel ve sanal kısımlarının Laplace denkleminin çözümleri olduğunu gösteriniz. Elde ettiğiniz çözümler hangi* F *ve* G *için genel çözümden de elde edilebilir.*

6. $f(z) = e^z$ *fonksiyonunun reel ve sanal kısımlarının Laplace denkleminin çözümleri olduğunu gösteriniz. Elde ettiğiniz çözümler hangi* F *ve* G *için genel çözümden de elde edilebilir.*

7.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= 0, u_t(x,0) = \cos(x) \end{aligned}$$

dalga denkleminin D'Alembert çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

(a) $\frac{1}{2}(\cos(x+2t) - \cos(x-2t))$

(b) $\frac{1}{2}sin(2x)cos(t)$

(c) $\frac{1}{2}sin(2t)cos(x)(doğru)$

(d) $\frac{1}{4}(\cos(x+2t) - \cos(x-2t))$

8.

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$$

denklemi verilsin. Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

(a) *Keyfi F fonksiyonu için $F(y-2x)$ denklemin çözümüdür.*

(b) *Keyfi F fonksiyonu için $F(y-2x)x$ denklemin çözümüdür.*

(c) *Keyfi F ve G fonksiyonları için $F(y-2x)x + G(y-2x)$ denklemin genel çözümüdür.*

(d) *Keyfi F fonksiyonu için $F(y-2x)y$ denklemin çözümüdür.*

9. Aşağıda verilen Dalga problemlerinin D'Alembert çözümlerini belirleyiniz. Bunun için Şekil 3.3 benzeri birer diyagram hazırlayınız.

(a)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= e^{-2x^2}, u_t(x,0) = 1/(4+x^2) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 2u_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & -2 < x < 2 \\ 0 & diğer\ x\ ler \end{array} \right. , u_t(x,0) = 0 \end{aligned}$$

```
dalembert(f,g):=block([x,t],
        disp("Utt=c^2Uxx,  U(x,0)=f(x),Ut(x,0)=g(x)"),
        c:read("c="),
        a:x-c*t,
        b:x+c*t,
        define(u1(x,t),1/2*(f(a)+f(b))),
        define(u2(x,t),1/(2*c)*integrate(g(z),z,a,b)),
        define(u(x,t),u1(x,t)+u2(x,t)),
        display(u(x,t)),
        Tmax:read(" Tmax="),
        wxplot3d(u(x,t),[x,-10,10],[t,0,Tmax],[legend,false])
        );
```

Şekil 3.5: D'Alembert yönteminin Maxima ile otomasyonu

(c)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= 0, u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & -2 < x < 2 \\ 0 & di\breve{g}er\ x\ ler \end{cases} \end{aligned}$$

10. *(Maxima uygulaması) Maxima ortamında D'Alembert çözümü interaktif olarak incelenebilir. Örneğin*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 16u_{xx} \\ u(x,0) &= x/(1+x^2) \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

başlangıç değer problemi [3](sayfa 134) te hazırlanan ve Şekil 3.5 ile verilen

Maxima blokunu

$$\begin{aligned} f(x) &: = x/(1+x^2) \\ g(x) &: = 0 \end{aligned}$$

tanımlamaları ve aşağıda belirtilen komut ile çalıştırılarak analitik çözüm ve grafiğini elde ediniz.

(%i3) f(x):=x/(1+x^2);g(x):=0;

(%o2) $f(x) := \dfrac{x}{1+x^2}$

(%o3) $g(x) := 0$

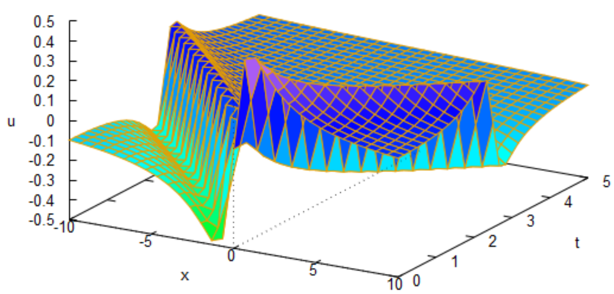
(%i4) dalembert(f,g);

Utt=c^2Uxx, U(x,0)=f(x),Ut(x,0)=g(x)

c= 4;

$$u(x,t) = \frac{\frac{x+4t}{(x+4t)^2+1} + \frac{x-4t}{(x-4t)^2+1}}{2}$$

Tmax= 5;



11. *(Maxima uygulaması) Parçalı sürekli fonksiyonlarla D'Alembert otomasyonu aşağıdaki gibi gerçekleştirilir:*

- *Öncelikle*

$$unit\_step(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

ile birim basamak fonksiyonunu tanımlayalım. Parçalı sürekli herhangi bir fonksiyonu birim basamak fonksiyonu cinsinden hesaplayabiliriz: Örneğin

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \textit{diğer } x \textit{ ler} \end{cases}$$

ile tanımlanan f fonksiyonunu Maxima ortamında

$$kutu(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \textit{diğer } x \textit{ ler} \end{cases}$$

yardımı ile

$$f(x) = kutu(x)(1 - x^2)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Öte yandan birim basamak fonksiyonu cinsinden yukarıda tanımlanan $kutu(x)$ fonksiyonu

$$kutu(x) = unit\_step(x+1) - unit\_step(x-1)$$

olarak tanımlanabilir.

- *Buna göre yukarıda verilen dalembert bloku ile Soru 7 de verilen problemlerin çözüm grafiklerini $[-5, 5] \times [0, 2]$ bölgesi üzerinde belirleyiniz.*

Maxima ile ilgili daha kapsamlı bilgi için [3] e başvurunuz.

Kaynaklar

[1] Duchateau, P., Zachmann D, Applied Partial Differential Equations, Dover Pub., New York, 1989.

[2] Coleman, P. Matthew, An introduction to Partial Differential Equations with MATLAB, Chapman& Hall/CRC, 2004.

[3] Coskun, E. Maxima ile Sembolik Hesaplama ve Kodlama, http://erhancoskun.com.tr