Bölüm 5

Sınır-değer problemleri, özdeğerler ve özfonksiyonlar

Bu bölümde

- parametre içeren ve özel formatta ifade edilen bayağı diferensiyel denklemleri göz önüne alarak,
- ilgili denklemler ile farklı türden sınır-değer şartları ile oluşturulan sınır-değer problemlerini inceliyoruz.
- Sınır-değer probleminin özfonksiyon adı verilen sıfırdan farklı çözümlerini ve
- söz konusu çözümleri elde etmemizi sağlayan ve özdeğer adı verilen özel parametre değerlerinin nasıl elde edildiğini inceliyoruz. Ayrıca
- özdeğer ve ilgili özfonksiyonların özelliklerini inceleyerek,
- özel bazı sınır değer problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonları yardımıyla bir sonraki bölümde inceleyeceğimiz Fourier seri açılımlarına esas teşkil eden teoriye değiniyoruz. Son olarak
- değişken katsayılı problemlerin özdeğer ve özfonksiyonlarını hesaplamak üzere başlangıç düzeyinde bir uygulama geliştiriyor ve sonuçlarını test yapıyoruz.

5.1 Giriş

Önceki bölümde incelediğimiz değişkenlerine ayırma yönteminde λ sabitinin işaretine göre farklı çözüm aileleri belirlemiştik. Problemle birlikte yan şartların verilmesi durumunda λ nın işaretinin ötesinde alması gereken değerlerin de belirlenmesi gerekir. Önceki bölümden λ sabitini içeren $y = y(x)$ olmak üzere

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{5.1}$$

türünde denklemle sıkça karşılaştık. Genelde türevlenebilir p ve sürekli q için

$$(py')' + (\lambda - q)y = 0 \tag{5.2}$$

biçiminde ifade edilebilen ve $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde

$$a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) = 0, (a_{11}, a_{12}) \neq (0, 0) \tag{5.3}$$
$$a_{21}y(b) + a_{22}y'(b) = 0, (a_{21}, a_{22}) \neq (0, 0), a_{ij} \in R \tag{5.4}$$

ile tanımlanan ve *ayrık sınır şartı(separated boundary condition)* adı verilen sınır-şartlarını sağlayan çözümlere ihtiyacımız olacaktır. Bu bölümde esas itibariyle (5.2)-(5.4) problemini göz önüne alarak ilerleyen bölümlerde ihtiyacımız olacak kısmına ait temel kavramları ve teoriyi özetliyoruz. Konuyla ilgili kapsamlı bilgi için bu bölümü hazırlarken yararlandığımız ve bölüm sonunda sunduğumuz kaynakları ve özellikle kapsamlı bir çalışma olan Sturm-Liouville Teorisi isimli [3] referans kaynağını öneririz.

Öncelikle tipik bazı sınır değer problemlerine göz atalım:

ÖRNEK 5.1.

$$\begin{aligned} y'' + 9y &= 0, 0 < x < 1 \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

probleminin çözümünü araştırınız.

Çözüm.

Problemin lineer bağımsız çözüm kümesi $\{\cos(3x), \sin(3x)\}$ olup, genel çözümünü

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

olarak ifade edebiliriz. Şimdi de sınır şartlarını sağlayan çözümünü belirlemeye çalışalım:

$$y(0) = c_1 = 0 \Rightarrow y = c_2 \sin(3x)$$

elde ederiz. Ancak

$$y(1) = c_2 \sin(3) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

elde ederiz. O halde problemin aşikar çözümü olarak ilk bakışta elde edilebilen $y = 0$ çözümü tek çözümdür.

Şimdi de aşağıdaki örneği inceleyelim:

ÖRNEK 5.2.

$$\begin{aligned} y'' + \pi^2 y &= 0, 0 < x < 1 \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

probleminin çözümünü araştırınız.

Çözüm.

Problemin genel çözümünü

$$y = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x)$$

olarak ifade edebiliriz. Şimdi de sınır şartlarını sağlayan çözümünü belirlemeye çalışalım:

$$y(0) = c_1 = 0 \Rightarrow y = c_2 \sin(\pi x)$$

elde ederiz. Ancak

$$y(1) = c_2 \sin(\pi) = 0$$

elde ederiz. O halde problemin

$$y = c_2 \sin(\pi x), c_2 \in R$$

biçiminde sonsuz sayıda çözümünü elde ederiz.

Gözlem 5.1. *Örnek 5.1 ve Örnek 5.2 den görüleceği üzere*

$$y'' + \lambda y = 0, \ 0 < x < 1 \tag{5.5}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{5.6}$$

probleminin bazı λ değerleri için tek çözüm $y = 0$ aşikar çözümü iken, bazı λ değerleri için sonsuz sayıda çözüm mevcut olabilmektedir. Bu tür problemlerde biz sıfırdan farklı çözümleri belirlemek istiyoruz. Bu nedenle hangi λ değerleri için sıfırdan farklı çözümlerin olduğunu araştırmak istiyoruz.

TANIM 5.1. *(5.2) denkleminin (5.3),(5.4) sınır şartları ile sıfırdan farklı($y \neq 0$) çözümler elde edilmesini sağlayan λ değerlerine probleminin özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen $y \neq 0$ çözümlerine de söz konusu problemin özfonksiyonları adı verilmektedir.*

Göz önüne alınan $[a, b]$ kapalı aralığında özel olarak $p > 0, q >$ ise (5.2)-(5.4) probleminin *özdeğer ve özfonksiyonlarını* belirleme problemi **Regüler Sturm-Liouville***(RSL)* problemi olarak adlandırılır.

Özel olarak

- bilinmeyenin sınırdaki değerlerinden oluşan sınır şartlarına *Dirichlet şartları* ve

$$\begin{aligned} (py')' + (\lambda - q)y &= 0, \ a < x < b && (5.7) \\ y(a) &= y(b) = 0 && (5.8) \end{aligned}$$

  problemine Dirichlet problemi adı verilmekte ve

- bilinmeyenin türevler üzerindeki değerlerinden oluşan sınır şartlarına Neumann şartları ve

$$\begin{aligned} (py')' + (\lambda - q)y &= 0, \ a < x < b && (5.9) \\ y'(a) &= y'(b) = 0 && (5.10) \end{aligned}$$

  problemine *Neumann problemi* adı verilmektedir.

- (5.3) ve (5.4) formatında olup, sınır bölgesinin bir kısmında Dirichlet ve diğer kısmında Neumann sartlarını içeren sınır şartlarına ise *karışık sınır şartları* adı verilir. Örneğin

$$y(a) = y'(b) = 0$$

  veya

$$y'(a) = y(b) = 0$$

  gibi sıkça kullanılan karışık sınır şartlarıdır, ve ilgili problem ise *karışık sınır-değer problemi* olarak adlandırılır.

- $\left[y + c\frac{\partial y}{\partial n}\right]|_{sınır} = 0$ biçiminde verilen ve fiziksel uygulamalar için önemli olan bir diğer sınır şartı ise *Robin sınır şartı* olarak adlandırılır, ilgili problem de *Robin problemi* olarak adlandırılır, burada n dışarı yönde birim normal vektör ve $c \neq 0$ sabittir. Tek boyutlu problemimiz için, sol sınırda $n = [-1, 0]$, sağ sınırda ise $n = [1, 0]$ olduğu için bu şart

$$\begin{aligned} y(a) - cy'(a) &= 0 \\ y(b) + cy'(b) &= 0 \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir.

Uygulamalarımızda genelde $p \equiv 1, q \equiv 0$ olacaktır. Problem tanım kümesini $(0, 1)$ aralığı olarak alabiliriz. Bu durumda

$$y'' + \lambda y = 0, 0 < x < 1 \tag{5.11}$$

denkleminin aşağıda verilen

1. $y(0) = y(1) = 0$(Dirichlet)
2. $y'(0) = y'(1) = 0$(Neumann)
3. $y'(0) = y(1) = 0$(Karışık-I)
4. $y(0) = y'(1) = 0$(Karışık-II)
5. $y(0) - y'(0) = 0$ ve $y(1) + y'(1) = 0$ (Robin)

şartlarından herhangi birisi ile oluşturulan probleme *kanonik RSL problem* adı verelim, çünkü (5.11) ile (1-5) problemleri (5.2)-(5.4) formunda ifade edilebilen en sade veya diğer bir deyimle "kanonik" problemlerdir.

Hatırlatma 5.1. *Lineer cebirden hatırlayacağımız üzere A bir kare matris olmak üzere*

$$AX = 0$$

denkleminin sıfırdan farklı çözüme sahip olabilmesi için $det(A) = 0$ sağlanmalıdır.

Gözlem 5.2. *y_1 ve y_2 (5.3) sınır şartlarını $a = 0$ noktasında sağlayan türevlenebilir fonksiyonlar ise*

$$\begin{aligned} a_{11}y_1(0) + a_{12}y_1'(0) &= 0 \\ a_{11}y_2(0) + a_{12}y_2'(0) &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz, buradan $(a_{11}, a_{12}) \neq (0,0)$ olduğundan yukarıdaki hatırlatma gereği katsayı matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır:

$$y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) = 0$$

Benzer sonuç $b = 1$ noktası için de geçerlidir:

$$y_1(1)y_2'(1) - y_1'(1)y_2(1) = 0 \tag{5.12}$$

5.2 Kanonik problemler üzerinden RSL problemin özellikleri

1. **RSL problemin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldir**: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar sırasıyla y_1 ve y_2 olsun. O halde

$$y_1'' + \lambda_1 y_1 = 0 \tag{5.13}$$
$$y_2'' + \lambda_2 y_2 = 0 \tag{5.14}$$

elde ederiz. (5.13) ve (5.14) in sırasıyla y_2 ve y_1 ile iç çarpımını alalım, yani söz konusu fonksiyonlarla çarparak $[0,1]$ aralığı üzerinde (1)-(5) sınır şartları ile integrallerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (y_1'' + \lambda_1 y_1)y_2 dx = \int_0^1 y_1'' y_2 dx + \int_0^1 \lambda_1 y_1 y_2 dx \\ &= (y_1' y_2)|_0^1 - \int_0^1 y_1' y_2' dx + \lambda_1 \int_0^1 y_1 y_2 dx \\ &\Rightarrow \lambda_1 \int_0^1 y_1 y_2 dx + (y_1' y_2)|_0^1 = \int_0^1 y_1' y_2' dx \end{aligned} \tag{5.15}$$

ve benzer biçimde

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (y_2'' + \lambda_2 y_2) y_1 dx = \int_0^1 y_2'' y_1 dx + \int_0^1 \lambda_1 y_1 y_2 dx \\ &= (y_2' y_1)|_0^1 - \int_0^1 y_1' y_2' dx + \lambda_2 \int_0^1 y_1 y_2 dx \\ &\Rightarrow \lambda_2 \int_0^1 y_1 y_2 dx + (y_2' y_1)|_0^1 = \int_0^1 y_1' y_2' dx \end{aligned} \tag{5.16}$$

elde ederiz. (5.15) ve (5.16) dan

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^1 y_1 y_2 dx + (y_1' y_2)|_0^1 - (y_2' y_1)|_0^1 = 0 \tag{5.17}$$

elde ederiz. Ayrıca (**??**) ve (5.12) den

$$\begin{aligned} & (y_1' y_2)|_0^1 - (y_2' y_1)|_0^1 \\ = \;& y_1'(1) y_2(1) - y_1'(0) y_2(0) - y_2'(1) y_1(1) + y_2'(0) y_1(0) \\ = \;& y_1'(1) y_2(1) - y_2'(1) y_1(1) + y_2'(0) y_1(0) - y_1'(0) y_2(0) \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

elde ederiz.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğu için buradan

$$\int_0^1 y_1 y_2 dx = 0$$

elde ederiz, yani $\{y_1, y_2\}$ kümesi $[0, 1]$ aralığında ortogonaldir.

2. **RSL probleminin tüm özdeğerleri reeldir.**

   λ karmaşık sayısı için problemin en az bir karmaşık (λ, y) özdeğer-özfonksiyon çiftine sahip olduğunu kabul edelim. Bu taktirde eşlenik almak suretiyle

$$y'' + \lambda y = 0 \Rightarrow \overline{y}'' + \overline{\lambda}\overline{y} = 0$$

elde ederiz, yani $(\overline{\lambda},\overline{y})$ de diğer bir karmaşık özdeğer özfonksiyon çifti olur. Soldaki denklemi $\overline{y}$ ve sağdakinin ise y ile iççarpımını alıp 1) deki işlemleri y_1 yerine y, y_2 yerine $\overline{y}$ alarak takip ederek,

$$(\lambda-\overline{\lambda})\int_0^1 y\overline{y}dx=0$$

elde ederiz ki bu bir çelişkidir. Ne ile çelişir?

- Birincisi y sürekli fonksiyon ve dolayısıyla

  $$\int_0^1 y\overline{y}dx=\int_0^1 |y|^2dx>0$$

  sonucu ve

- İkincisi ise 1) de ispatladığımız farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların ortogonal olma özelliği ile çelişir:$\lambda\neq\overline{\lambda}$ kabulümüzden

$$0=\int_0^1 y\overline{y}dx=(\lambda-\overline{\lambda})\int_0^1 y\overline{y}dx=(\lambda-\overline{\lambda})\int_0^1 |y|^2dx\neq 0$$

O halde kabulümüz yanlış, ve dolayısıyla $\lambda=\overline{\lambda}$ olmalı, yani λ reel olmalıdır.

3. **RSL problemleminin Dirichlet şartları ile özdeğerleri pozitif, Neumann sınır şartları ile nonnegatiftir.**

(5.11) denkleminin her iki yanını y ile çarparak $[0,1]$ aralığı üzerinden

$(1)-(2)$ sınır şartlarından herhangi birisi ile integralini alalım:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (y''y + \lambda y^2)dx \\ &= \int_0^1 y''y dx + \lambda \int_0^1 y^2 dx \\ &= (y'y)|_0^1 - \int_0^1 (y')^2 dx + \lambda \int_0^1 y^2 dx \\ &= -\int_0^1 (y')^2 dx + \lambda \int_0^1 y^2 dx \end{aligned}$$

ve ilk ve son terimden

$$\lambda = \frac{\int_0^1 (y')^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx} \geq 0 \tag{5.18}$$

elde ederiz, burada (1) veya (2) sınır şartı ile

$$(y'y)|_0^1 = y'(1)y(1) - y'(0)y(0) = 0$$

olduğunu kullandık.

4. **Özdeğerler monoton artan bir dizi oluşturur ve basittirler**

   - Özdeğerler
   $$-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$$
   biçiminde monoton artan bir dizi oluştutururlar ve bu dizi üstten sınırlı değildir, yani
   $$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$
   sağlanır.

- Özdeğerler basittirler, yani her bir özdeğere tek bir özfonksiyon karşılık gelir(bir özfonksiyonun sabit katı da özfonksiyondur, fakat sabit katlar ile elde edilen özfonksiyonlar farklı özfonksiyon olarak kabul edilmezler): Kabul edelmin ki λ_k özdeğerine y_k ve Y_k gibi iki öz fonksiyondan oluşan lineer bağımsız $\{y_k, Y_k\}$ kümesi karşılık gelsin. Her iki özfonksiyon da sol ve sağ uçnoktadaki sınır şartlarını sağlamalıdır. Örneğin $x = 0$ noktasında

$$\begin{aligned} a_{11}y_k(0) + a_{12}y_k'(0) &= 0 \\ a_{11}Y_k(0) + a_{12}Y_k'(0) &= 0 \end{aligned}$$

sağlanmalıdır, ancak $(a_{11}, a_{12}) \neq (0,0)$ dır, o halde katsayı matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır, yani

$$\det\begin{pmatrix} y_k(0) & y_k'(0) \\ Y_k(0) & Y_k'(0) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} y_k(0) & Y_k(0) \\ y_k'(0) & Y_k'(0) \end{pmatrix} = 0$$

sağlanmalıdır. Ancak **Wronkskian** olarak bilinen bu determinantın bir noktada sıfır olması,

  - $(0,1)$ içerisinde her noktada sıfır olmasını gerektirir[5]. Öte yandan
  - ikinci basamaktan bir denklemin çözümlerine ait Wronskian'nın sıfıra eşit olması, söz konusu çözümlerin lineer bağımlı olmasını gerektirir. Bu sonuç ise kabulümüzle çelişir.

5. **Özfonksiyonların sıfır yerleri**

- y_n $(n > 1)$ile göstereceğimiz $n - inci$ özfonksiyonunun $(0,1)$ aralığında $(n-1)$ adet sıfır yeri vardır.
- y_n nin her bir sıfır yeri, y_{n-1} in ardışık sıfır yerleri arasında yer alır.

6. **RSL probleminin özfonksiyonlarının tamlığı** Ortogonal olan

$$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$$

özfonksiyonlar kümesi $[0,1]$ aralığında karesi integrallenebilir fonksiyon uzayı olan $L_2[0,1]$ de *tamdır*: Diğer bir deyimle problemin sınır şartlarını sağlayan bu uzaydaki f fonksiyonu

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n \tag{5.19}$$

olarak ifade edilebilir ve

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} c_n y_n$$

kısmi toplamı için

$$||f - S_N||_{L_2} \to 0, N \to \infty$$

bağıntısı bilinmektedir, yani

$$\int_0^1 (f(x) - S_N(x))^2 dx \to 0, N \to \infty \tag{5.20}$$

geçerlidir. f fonksiyonun süreklilik ve türevlenebilirlik gibi regülerite özellikleri olarak bilinen özellikleri ne kadar iyi olursa, zayıf yakınsama olarak bilinen (5.20) yakınsaklığı bundan daha güçlü olan noktasal yakınsama ve hatta düzgün yakınsama olarak ta gerçekleşebilmektedir. Bu kavramları Fourier serilerini incelediğimiz bir sonraki bölümde netleştirmeye çalışacağız.

f fonksiyonunun (5.19) biçiminde ifade edilebilmesi durumunda, özfonksiyonlar kümesinin ortogonalliğinden

$$c_n = \frac{\int\limits_0^1 f(x) y_n(x) dx}{\int\limits_0^1 y_n^2(x) dx}, n = 0, 1, \cdots \tag{5.21}$$

elde ederiz.

5.3 Özdeğer ve özfonksiyonların hesaplanması

1. **Dirichlet Probleminin özdeğer ve özfonksiyonları:** Yukarıdaki analizimizden $\lambda > 0$ olduğunu biliyoruz, işlemlerimizden oluşabilcek köklü ifadelerden kurtulmak için $\lambda = k^2, k > 0$ biçimde özdeğer arayalım ve karşılık gelen öz fonksiyonu y_k ile gösterelim. Buradan

$$y'' + \lambda y = 0 \Rightarrow y'' + k^2 y = 0$$

elde ederiz. Denklemimizin lineer bağımsız çözümler kümesi

$$\{\cos(kx), \sin(kx)\}$$

olup, genel çözümümüzü

$$y = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

olarak ifade edebiliriz. Sınır şartlarını sağlayan çözümü bulalım:

$$y(0) = a_k = 0 \Rightarrow y = b_k \sin(kx)$$

ve

$$y(1) = b_k \sin(k) = 0, b_k \neq 0 \Rightarrow k = k_n = n\pi, n = 1, 2, \cdots$$

elde ederiz. O halde

$$\lambda_n = k_n^2 = n^2\pi^2, n = 1, 2, \cdots$$

elde ederiz. Bir özfonksiyonun sabit katı da özfonksiyondur $b_k = 1$ seçimiyle temsilci bir özfonksiyon seçerek, λ_n e karşılık gelen özfonksiyonu

$$y_n = \sin(n\pi x), n = 1, 2, \cdots$$

olarak elde ederiz. O halde Dirichlet probleminin özdeğer ve özfonksiyon çiftlerini

$$\lambda_n = n^2\pi^2, y_n = \sin(n\pi x), n = 1, 2, \cdots \tag{5.22}$$

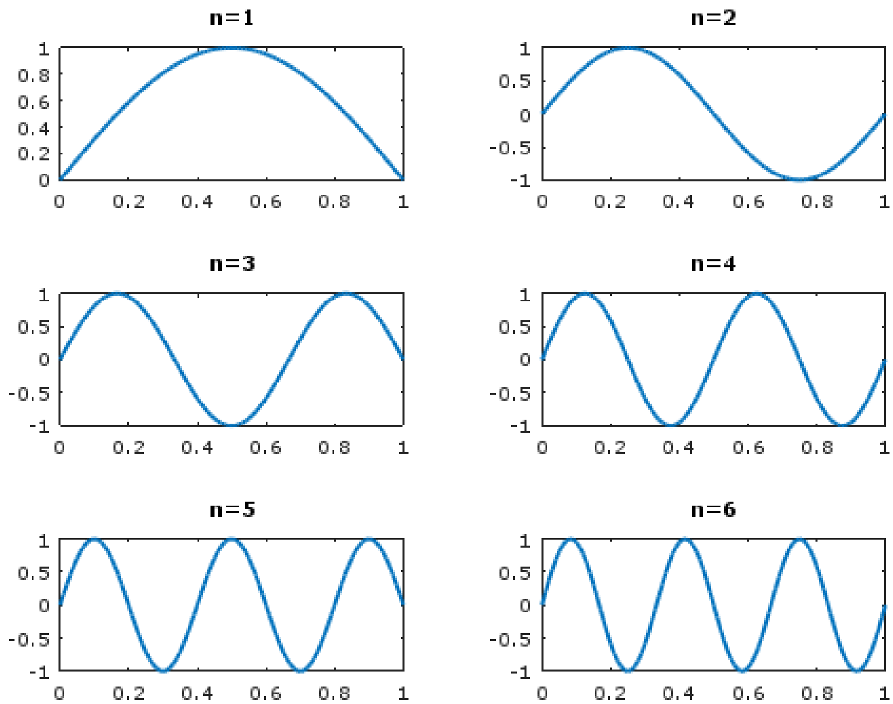
olarak elde ederiz.Yukarıda (5.22) ile tanımlanan ilk altı özfonksiyonun grafiği Şekil 5.1 ile verilmektedir.

Bu durumda (5.19) ile tanımlanan açılım

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

ile tanımlanan Fourier sinüs açılımıdır.

2. **Neumann Probleminin özdeğer ve özfonksiyonları:** Bu kez yukarıdaki analizimizden $\lambda \geq 0$ dır.



Şekil 5.1: Dirichlet probleminin ilk altı özfonksiyonu.

- $\lambda = 0$ için özfonksiyonu y_0 ile göstererek,

$$y'' = 0 \Rightarrow y = a + bx$$

ve sınır şartlarını sağlaması gerektiğinden

$$y'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

elde ederiz ve temsilci sabit özfonksiyonu $y = a = 1/2$ olarak alabiliriz. O halde özdeğer-özfonksiyon çiftimiz

$$(\lambda_0, y_0) = (0, 1/2)$$

dir.

- $\lambda > 0$ özelliğini sağlayan özdeğer için köklü ifadelerden kurtulmak için $\lambda = k^2, k > 0$ şeklinde özdeğerler arayarak Dirichlet problemine benzer olarak

$$y = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

ve türev almak suretiyle

$$y' = -ka_k \sin(kx) + kb_k \cos(kx)$$

elde ederiz. Sınır şarlarından

$$y'(0) = 0 \Rightarrow b_k = 0$$

ve

$$y'(1) = -ka_k \sin(k) = 0,$$

den $a_k \neq 0 \Rightarrow k = k_n = n\pi$, ve $y = y_n = \cos(n\pi x), n = 1, 2, \cdots$, elde ederiz.

- O halde tüm özdeğer ve özfonksiyon çiftlerini

$$\lambda_0 = 0, y_0 = 1/2, \lambda_n = n^2\pi^2, y_n = \cos(n\pi x), n = 1, 2, \cdots \quad (5.23)$$

olarak elde ederiz. (5.23) ile tanımlanan özfonksiyonların ilk altısının grafiği Şekil 5.2 ile verilmektedir.

- Bu durumda (5.19) ile tanımlanan açılım

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) \quad (5.24)$$

olarak ifade edilir ki bu açılım bir sonraki bölümde detaylı olarak inceleyeceğimiz f fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığındaki *Fourier cosinüs açılımı*dır.

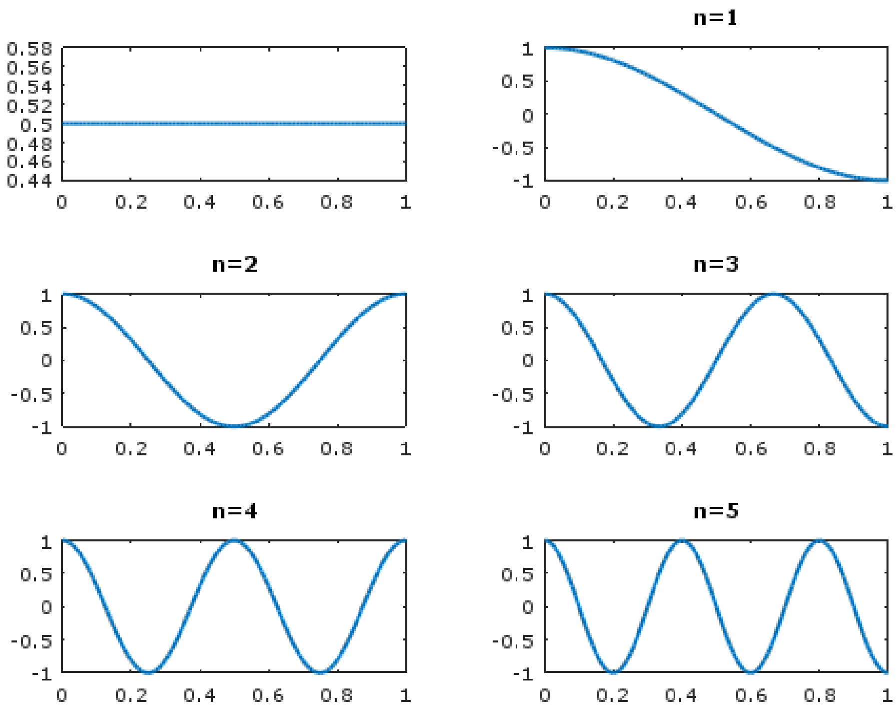
5.4 Periyodik Sturm-Liouvile Problemi

Bu bölümde sadece (a, b) aralığında ifade edebilen

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (5.25)$$

$$y(a) = y(b), y'(a) = y'(b) \quad (5.26)$$

Sturm-Liouville problemini göz önüne alacağız ve bu probleme de kanonik periyodik Sturm-Liouville problemi adını vereceğiz. Sınır şartlarının ayrık olmadığına dikkat edelim.



Şekil 5.2: Neumann probleminin ilk altı özfonksiyonu.

Öncelikle kanonik periyodik Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri de nonnegatiftir, çünkü (5.18) bağıntısını periyodik probem için de elde edebiliriz, çünkü periyodik sınır şartları ile de

$$\begin{aligned}(y'y)|_a^b &= y'(b)y(b) - y'(a)y(a) \\ &= 0\end{aligned}$$

dır. Regüler Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarına ait diğer özelliklerin hemen hemen hepsi periyodik Sturm-Liouville problemi için de sağlanır. Ancak istisnalar söz konusudur, örneğin periyodik Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri basit değildir.

ÖRNEK 5.3.

$$\begin{aligned}y'' + \lambda y &= 0, 0 < x < 1 \\ y(0) &= y(1), y'(0) = y'(1)\end{aligned}$$

probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını belirleyiniz.

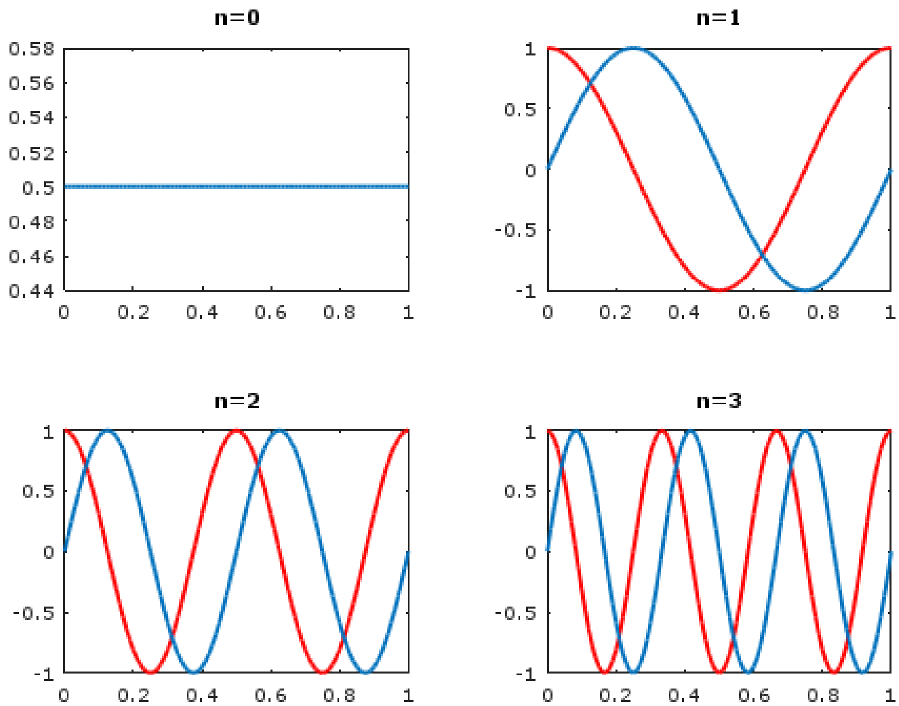
Çözüm.

- $y = sabit$ özfonksiyondur ve dolayısıyla $\lambda = 0$ özdeğerdir, özfonksiyonumuzu $u_0 = 1/2$ olarak seçelim ve karşılık gelen özdeğerimiz $\lambda_0 = 0$ olur.

- $\lambda > 0$ özelliğini sağlayan özdeğer için köklü ifadelerden kurtulmak için $\lambda = k^2, k > 0$ şeklinde özdeğerler arayarak Dirichlet problemine benzer olarak
$$y = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$
ve türev almak suretiyle
$$y' = -ka_k \sin(kx) + kb_k \cos(kx)$$
elde ederiz. Sınır şartlarından
$$\begin{aligned} y(0) &= y(1) \Rightarrow a_k = a_k \cos(k) + b_k \sin(k) && (5.27) \\ y'(0) &= y'(1) \Rightarrow kb_k = -ka_k \sin(k) + kb_k \cos(k) && (5.28) \end{aligned}$$
elde ederiz. $\cos(k) = 1$ ve dolayısıyla $\sin(k) = 0$ seçersek, sağlanır. Ancak
$$\cos(k) = 1 \Rightarrow k = k_n = 2n\pi, n = 1, 2, ...$$
ve özfonksiyonlarımızı ise
$$y_n = a_n \cos(2n\pi x) + b_n \sin(2n\pi x)$$
olarak elde ederiz. Ancak daha özel olarak

- $a_n = 1, b_n = 0$ seçerek $u_n = \cos(2n\pi x), n = 1, 2, ..$ ve

- $a_n = 0, b_n = 1$ seçerek $v_n = \sin(2n\pi x), n = 1, 2, ..$ alt ailelerini elde ederiz. O halde özdeğer ve özfonksiyon ailelerini
$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, u_0 = 1/2, \lambda_n = (2n\pi)^2, u_n = \cos(2n\pi x), n = 1, 2, . && (5.29) \\ v_n &= \sin(2n\pi x), n = 1, 2, . && (5.30) \end{aligned}$$
olarak elde ederiz. Özdeğerlerin regüler problemin aksine basit olmadıkları açıkça görülmektedir. İlk $n = 0, 1, 2, 3$ için özfonksiyon grafikleri Şekil5.3 de sunulmaktadır.



Şekil 5.3: Örnek 5.3 probleminin ilk yedi özfonksiyonu

- Kanonik periyodik SL probleminin özfonksiyonlarının da ortogonal bir küme olduğunu kolayca görebiliriz(Alıştırma 13).
- Ayrıca her bi n için v_n 'nin $2n-1$ adet, u_n 'nin ise $2n$ adet sıfır yeri olduğunu gözlemliyoruz.

ÖRNEK 5.4. $[-1,1]$ *aralığında tanımlanan aşağıdaki probleme Kanonik Periyodik Sturm-Liouville problemi adını vereceğiz.*

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, -1 < x < 1 \\ y(-1) &= y(1), y'(-1) = y'(1) \end{aligned}$$

probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını belirleyiniz.

Çözüm.

- $y = sabit$ özfonksiyondur ve dolayısıyla $\lambda = 0$ özdeğerdir, özfonksiyonumuzu $u_0 = 1/2$ olarak seçelim ve karşılık gelen özdeğerimiz $\lambda_0 = 0$ olur.

- $\lambda > 0$ özelliğini sağlayan özdeğer için köklü ifadelerden kurtulmak için $\lambda = k^2, k > 0$ şeklinde özdeğerler arayarak Dirichlet problemine benzer olarak
$$y = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$
ve türev almak suretiyle
$$y' = -ka_k \sin(kx) + kb_k \cos(kx)$$
elde ederiz. Sınır şartlarından
$$\begin{aligned} y(-1) &= y(1) \Rightarrow a_k \cos(k) - b_k \sin(k) = a_k \cos(k) + b_k \sin(k) \\ y'(-1) &= y'(1) \Rightarrow ka_k \sin(k) + kb_k \cos(k) = -ka_k \sin(k) + kb_k \cos(k) \end{aligned}$$
elde ederiz. $\sin(k) = 0$ için denklem sistemi sağlanır.
$$\sin(k) = 0 \Rightarrow k = k_n = n\pi, n = 1, 2, ...$$
ve özfonksiyonlarımızı ise
$$y_n = a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$
olarak elde ederiz. Ancak daha özel olarak $a_n = 1, b_n = 0$ seçerek $u_n = \cos(n\pi x), n = 1, 2, ..$ ve

- $a_n = 0, b_n = 1$ seçerek $v_n = \sin(n\pi x), n = 1, 2, ..$ alt ailelerini elde ederiz. O halde özdeğer ve özfonksiyon ailelerini
$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, u_0 = 1/2, \lambda_n = (n\pi)^2, u_n = \cos(n\pi x), n = 1, 2, . && (5.31) \\ v_n &= \sin(n\pi x), n = 1, 2, . && (5.32) \end{aligned}$$
olarak elde ederiz.

- Bu durumda (5.19) ile tanımlanan açılım, *Kanonik Periyodik SL* probleminin özfonksiyonları ile
$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n v_n \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir ki bu açılım bir sonraki bölümde detaylı olarak inceleyeceğimiz f fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığındaki *Fourier açılımı*dır.

5.5 Değişken katsayılı Regüler Sturm-Liouville Problemleri için sayısal bir yöntem

p, q, veya w nın sabit olmaması durumunda özdeğer veya özfonksiyonları analitik olarak, yani önceki bölümlerdeki gibi kağıt-kalem, yardımıyla elde edemeyiz. Bu durumda sayısal yöntemlerin kullanılması gerekir. Bu amaçla geliştirilmiş ileri düzey SLEIGN[4] ve değişik versiyonları veya alternatif yazılımlar mevcuttur. Bu bölümde ana hatları itibariyle Prüfer dönüşümü adı verilen dönüşümle ikinci basamaktan lineer olan RSL probleminin birinci basamaktan nonlineer sisteme dönüştürülerek, söz konusu nonlineer sistemin sayısal olarak Octave ortamında çözümünü esas alan bir yöntemi inceleyeceğiz ve bazı sabit ve değişken katsayılı RSL problemlerinin kullanıcı tarafından verilen başlangıç tahmini özdeğer ve özdeğer indisi(pozitif tamsayı) ile nasıl hesaplandığını inceleyeceğiz.

Bu amaçla değişken katsayılı olabilen $p = p(x) > 0, q = q(x), w = w(x) > 0$ için

$$\begin{aligned} -(py')' + qy &= \lambda wy, 0 < x < 1 \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Değişen Katsayılı RSL problemini Dirichlet sınır şartları ile göz önüne alalım. *Prüfer dönüşümü* adı verilen

$$y = \rho\sin(\theta), py' = \rho\cos(\theta) \tag{5.34}$$

şeklindeki dönüşüm ile Problem (5.33) $\rho(x)$ ve $\theta(x)$ için

$$\theta' = \frac{1}{p}\cos^2(\theta) + (\lambda w - q)\sin^2(\theta) \tag{5.35}$$

$$\rho' = \frac{1}{2}(\frac{1}{p} + q - \lambda w)\sin(2\theta)\rho \tag{5.36}$$

$$\theta(0) = 0, \theta(1) = n\pi, n = 1, 2, ... \tag{5.37}$$

$$\rho(0) = 1 \tag{5.38}$$

sistemine dönüşür. $n-$inci özfonksiyonu belirlemek için $\theta(1) = n\pi$ alınmaktadır.

(5.35)-(5.38) sistemi $(0,1)$ aralığı üzerinde tanımlı bir nonlineer sınır-değer problemidir. Aşağıdaki Algoritma ile özetlendiği üzere tahmini λ ile problem aralığın solundan sağa ve sağından sola kadar uygun bir $x_p \in (0,1)$ noktasına kadar sayısal yöntemlerle çözülüp

$$\lim_{x \to x_p^-} \theta(x) = \lim_{x \to x_p^+} \theta(x)$$

eşitliğini nümerik tolerans çerçevesinde sağlayan λ değeri belirlenmeye çalışılır. Biz burada $x_p = 1/2$ alıyor ve sayısal yöntem olarak *MATLAB/OCTAVE ode45[7],[8]* çözücüsünü kullanıyoruz.

Örneğin kanonik RSL problemi için $w = 1, q = 0, p = 1$ olup, $y = \rho \sin(\theta)$ nin x e göre türevini alarak

$$y' = \rho' \sin(\theta) + \rho \cos(\theta)\theta' = \rho \cos(\theta) \tag{5.39}$$

elde ederiz. Öte yandan $y' = \rho \cos(\theta)$ nın x e göre türevini alarak $y'' = -\lambda y$ olduğunu kullanarak

$$y'' = \rho' \cos(\theta) - \sin(\theta)\theta'\rho = -\lambda y = -\lambda\rho \sin(\theta) \tag{5.40}$$

elde ederiz. Birlikte yazarak ρ' ve θ' bilinmeyenli

$$\begin{aligned} \sin(\theta)\rho' + \rho\cos(\theta)\theta' &= \rho\cos(\theta) \\ \cos(\theta)\rho' - \rho\sin(\theta)\theta' &= -\lambda\rho\sin(\theta) \end{aligned}$$

sistemini elde ederiz. Yok etme yöntemiyle bu sistemi çözerek

$$\begin{aligned} \theta' &= \cos^2(\theta) + \lambda \sin^2(\theta) \\ \rho' &= \rho \sin(\theta)\cos(\theta)(1-\lambda) \\ &= \frac{1}{2}(1-\lambda)\sin(2\theta) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Verilen tahmini $\lambda = \lambda\_b, n$ değeri için Modifiye SLEIGN (M_Sleign) adını verdiğimiz aşağıdaki algoritma ile(λ_n, y_n) özdeğer ve özfonksiyon çiftini hesaplıyoruz. SLEIGN dan farklı olarak orta noktadaki teta bileşeni üzerindeki eşleştirme işlemini Newton yöntemiyle gerçekleştiriyoruz.

Algoritma(M_Sleign)

1. Girdi p, q, w,$lamda = \lambda\_b$,n
2. $test = 1$ al ve $tol = 1e-8$ olmak üzere $test > tol$ olduğu sürece aşağıdaki adımları tekrarla
   (a) Prüfer dönüşümü altında
   $$y = \rho\sin(\theta), py' = \rho\cos(\theta)$$
   biçiminde aranan çözüm bileşenleri için, $x_p = 0.5$ olmak üzere, $[0, x_p]$ aralığında $\theta(0) = 0, \theta_\lambda(0) = 0, \rho(0) = 1$ başlangıç değerleri ile **ekli sistem** adını vereceğimiz aşağıdaki sistemi çöz.
   $$\begin{aligned}\theta' &= \frac{1}{p}\cos^2(\theta) + (\lambda w - q)\sin^2(\theta)\\ \theta'_\lambda &= (-\frac{1}{p} + \lambda w - q)\sin(2\theta)\theta_\lambda + w\sin^2(\theta)\end{aligned}$$
   $x_p = 0.5$ noktasındaki $\theta_1 = \theta(x_p), \theta_{1\lambda} = \theta_\lambda(x_p)$ değerlerini kaydet. Ayrıca $X1$: çözüm elde edilen x değerler vektörü olmak üzere $Teta1 = \theta(X1)$ değerini kaydet.
   (b) $\theta(1) = n\pi, \theta_\lambda(1) = 0$ baslangıç değerleri ile Ekli sistemi $[x_p\ 1]$ aralığında *geriye doğru* çöz. x_p noktasındaki $\theta_2 = \theta(x_p), \theta_{2\lambda} = \theta_\lambda(x_p)$ değerlerini kaydet. Ayrıca $X2$: çözüm elde edilen x değerler vektörü olmak üzere $Teta2 = \theta(X2)$ değerini kaydet.
   (c) $fark = \theta_1 - \theta_2$ ve $fark\_lamda$=$\theta_{1\lambda} - \theta_{2\lambda}$ değerlerini tanımla ve $fark(\lambda) = 0$ denklemini sağlayan λ değerini bulmak için Newton yöntemiyle $lamda$ değerini güncelle:
   $$lamda = lamda - fark/fark\_lamda$$
   (d) $test = abs(fark) > tol$ degerini tanımla
   (e) $X = [X1\ X2]$ ve $Teta = [Teta1\ Teta2]$ vektörlerini tanımla
3. (2)(e) de elde edilen X değerleri için
   $$\begin{aligned}\rho' &= \frac{1}{2}(\frac{1}{p} + q - \lambda w)\sin(2\theta)\rho\\ \rho(0) &= 1\end{aligned}$$
   başlangıç değer problemini çöz.

4. Çıktı: $y = \rho \sin(Teta)$ özfonksiyonu ve $lamda$ değeri

ÖRNEK 5.5. *Kanonik RSL Probleminin Dirichlet sınır şartı ile sayısal özdeğer ve özfonksiyonlarını yuarıda tanıttığımız M_Sleign ile hesaplayınız.*

Çözüm.

```
>> [T,Y,lamda]=sturmnewton(8,1);
>> lamda
lamda = 9.8696
>> [T,Y,lamda]=sturmnewton(15,2);
>> lamda
lamda = 39.479
>> [T,Y,lamda]=sturmnewton(80,3);
>> lamda
lamda = 88.828
```

n	λ gerçek	λ sayısal
1	$\pi^2 \doteq 9.8696$	9.8696
2	$4\pi^2 \doteq 39.478$	39.479
3	$9\pi^2 \doteq 88.826$	88.828
4	$16\pi^2 \doteq 157.91$	157.92

Sırasıyla $n = 1, 2, 3, 4$ değerleri için elde ettğimiz özfonksiyon grafikleri Şekil 5.4 de sunulmaktadır.

ÖRNEK 5.6. *Parçalı sürekli*

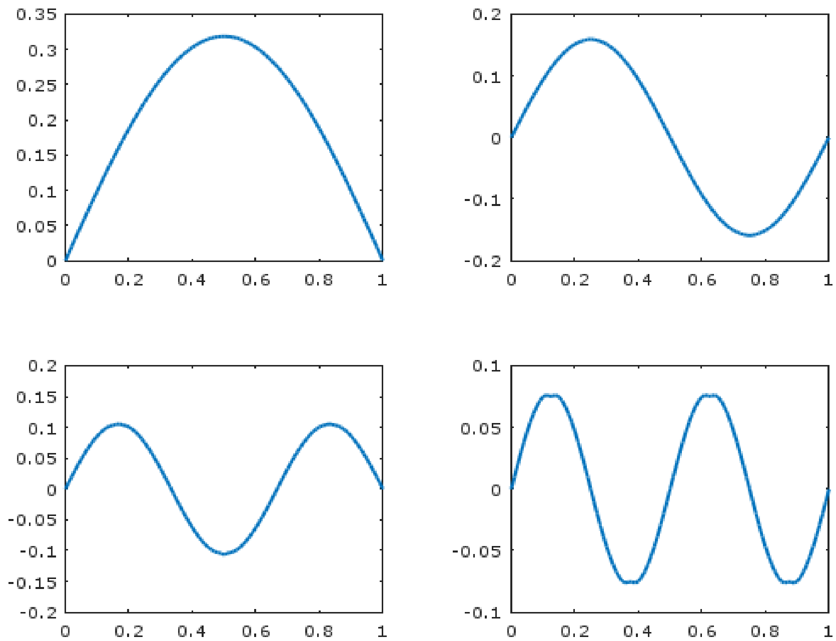
$$p(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 < x < 1/2 \\ 1, & 1/2 \le x < 1 \end{cases}$$

için

$$\begin{aligned} (py')' + \lambda y &= 0 \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

probleminin ilk dört özdeğer ve özfonksiyonunu M_SLEIGN ile belirleyiniz.

Çözüm.

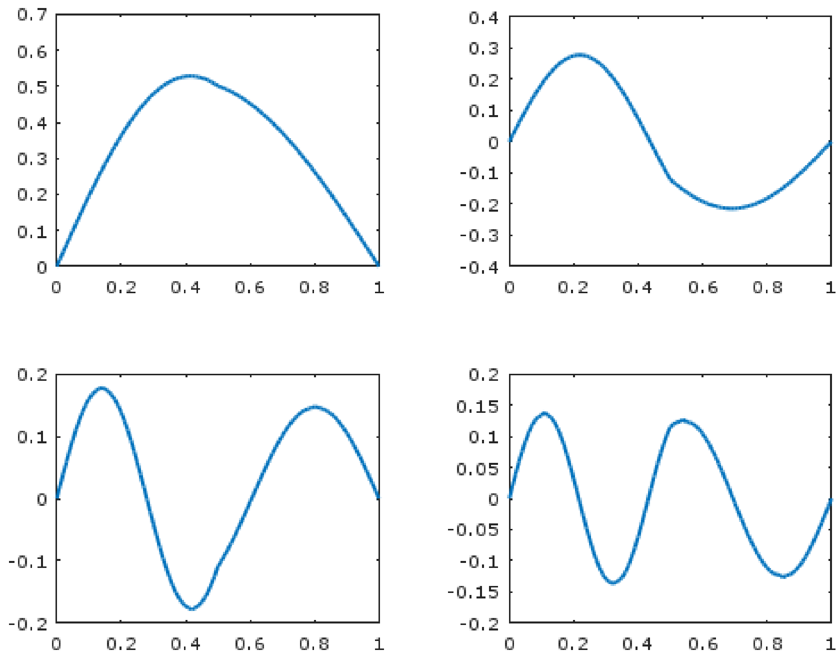


Şekil 5.4: Örnek 5.5 e ait problemin ilk dört özfonksiyonu(sürekli p durumu)

Elde ettiğimiz lamda değerleri aşağıdaki tabloda sunulmaktadır.

n	λ sayısal
1	7.1692
2	25.820
3	63.207
4	105.88

Özfonksiyon grafikleri ise sırasıyla $n = 1, 2, 3, 4$ değerleri için Şekil 5.5 de sunulmaktadır.



Şekil 5.5: Örnek 5.6 ya ait problemin ilk dört özfonksiyonu(parçalı sürekli p durumu)..

Bu bölümde

- Sınır-değer probleminin özfonksiyon adı verilen sıfırdan farklı çözümlerini ve
- söz konusu çözümleri elde etmemizi sağlayan ve özdeğer adı verilen özel parametre değerlerinin nasıl elde edildiğini inceledik. Ayrıca
- özdeğer ve ilgili özfonksiyonların özelliklerini inceleyerek,
- özel bazı sınır değer problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonları yardımıyla bir sonraki bölümde inceleyeceğimiz Fourier seri açılımlarına esas teşkil eden teoriye değindik. Son olarak
- değişken katsayılı problemlerin özdeğer ve özfonksiyonlarını hesaplamak üzere başlangıç düzeyinde bir uygulama geliştirerek, sonuçlarını test yaptık.Yöntemin analtik yöntem sonuçları ile uyumlu sonuçlar verdiğini gözlemledik.

Alıştırmalar 5.1.

1.
$$y'' + \lambda y = 0, 0 < x < 1$$
denkleminin aşağıda verilen sınır şartları özdeğer ve özfonksiyonlarını belirleyiniz

   (a) *Karışık-I:*
   $$y'(0) = y(1) = 0$$
   (b) *Karışık-II*
   $$y(0) = y'(1) = 0$$
   (c) *Robin:*
   $$y(0) - y'(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0$$
   (ipucu:(c) şıkkı için sadece ilk özdeğeri belirleyiniz. Bu amaçla Newton sıfır yeri bulma yöntemini kullanabilirsiniz.)

2. $[0, 1]$ *aralığı üzerinde tanımlı Kanonik RSL probleminin Dirichlet sınır şartları ile elde edilen*
$$\{\sin(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$$
özfonksiyon ailesinin söz konusu aralıkta ortogonal olduğunu gösteriniz.

3. $[0, 1]$ *aralığı üzerinde tanımlı Kanonik RSL probleminin Neumann sınır şartları ile elde edilen*
$$\{1/2\} \cup \{\cos(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$$
iözfonksiyon ailesinin söz konusu aralıkta ortogonal olduğunu gösteriniz.

4. *Soru 1(a) de elde ettiğiniz özfonksiyon ailesinin* $[0, 1]$ *aralığında ortogonal olduğunu gösteriniz.*

5. *Soru 1(b) de elde ettiğiniz özfonksiyon ailesinin* $[0, 1]$ *aralığında ortogonal olduğunu gösteriniz.*

6. *Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır*

(a) $y'' + \lambda y = 0, y'(0) = y'(3) = 0$ *probleminin özfonksiyonları* $[0, 3]$ *aralığı üzerinde ortogonaldir.*

(b) $y'' + (\lambda - 5)y = 0, y(0) = y(1) = 0$ *probleminin en küçük özdeğeri* $5 + \pi^2$ *dir.*

(c) $y'' + (\lambda - 2)y = 0, y'(0) = y'(2) = 0$ *probleminin en küçük özdeğeri* 2 *dir.*

(d) $y'' + \lambda y = 0, y'(0) = y'(1) = 0$ *probleminin en küçük özdeğeri* π^2 *dir.*

7.

$$y'' + \lambda y = 0, 0 < x < L$$

denklemin $[0, L]$ *aralığındaki özdeğer ve özfonksiyonlarını sırasıyla aşağıdaki sınır şartları ile elde ediniz.*

(a) *Dirichlet*

(b) *Neumann*

(c) *Karışık-I*

(d) *Karışık-II*

(e) *Robin*

8.

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y'' + (\lambda - 4)y &= 0, 0 < x < 1 \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonlarını karşılaştırınız. Genelde sabit $q > 0$ *için*

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \text{ ve } y'' + (\lambda - q)y = 0, 0 < x < 1 \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonları arasında nasıl bir ilişki gözlemlersiniz?

9. *Soru 8 i Neumann sınır şartları için tekrarlayınız.*

10. *Sabit $p > 0$ için*

$$\begin{aligned} py'' + \lambda y &= 0 \text{ ve } y'' + \lambda y = 0, 0 < x < 1 \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

problemlerinin belirtilen Dirichlet sınır şartları ile özdeğer ve özfonksiyonlarını belirleyiniz. Aralarında nasıl bir ilişki gözlemliyorsunuz?

11. *Sabit $p > 0$ ve $q > 0$ için*

$$\begin{aligned} py'' + (\lambda - q)y &= 0, 0 < x < 1 \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

problemlerinin belirtilen Dirichlet sınır şartları ile özdeğer ve özfonksiyonlarını elde ediniz. Sonucunuzu $p = 1, q = 0$ için elde ettiğimiz özdeğer ve özfonksiyonlarla karşılaştırınız. Sabit p ve q nun özdeğerler ve özfonksiyonlar üzerindeki etkisi nedir?

12. *Soru 1(a) da elde ettiğiniz özfonksiyonların artan indis değerleri için grafiklerini gözlemleyiniz. Ardışık özfonksiyonların sıfır yerlerini inceleyiniz. Ne gözlemliyorsunuz?*

13. *Soru 1(b) de elde ettiğiniz özfonksiyonların artan indis değerleri için grafiklerini gözlemleyiniz. Ardışık özfonksiyonların sıfır yerlerini inceleyiniz. Ne gözlemliyorsunuz?*

14. *Örnek 5.3 ile verilen periyodik problemin özfonksiyonlarının ortogonal olduğunu gösteriniz.*

15. *Örnek 5.3 ile verilen periyodik problemin $[0, L]$ aralığı üzerindeki özdeğer ve özfonksiyonlarını belirleyiniz.*

16. *$p > 0$ sabiti için*

$$\begin{aligned} py'' + \lambda y &= 0, 0 < x < 1 \\ y(0) &= y(1), y'(0) = y'(1) \end{aligned}$$

probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını belirleyiniz. Elde ettiğiniz sonuçları Örnek 5.3 sonuçlarıyla karşılaştırınız.

17. *$q > 0$ sabiti için*

$$\begin{aligned} y'' + (\lambda - q)y &= 0, 0 < x < 1 \\ y(0) &= y(1), y'(0) = y'(1) \end{aligned}$$

probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını belirleyiniz. Elde ettiğiniz sonuçları Örnek 5.3 sonuçlarıyla karşılaştırınız.

18. *$p > 0$ ve $q > 0$ sabitleri için*

$$\begin{aligned} py'' + (\lambda - q)y &= 0, 0 < x < 1 \\ y(0) &= y(1), y'(0) = y'(1) \end{aligned}$$

probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını belirleyiniz. $p = 1, q = 0$ için elde edilen periyodik kanonik problem sonuçlarıyla karşılaştırınız.

19. *$p > 0$ ve $q > 0, L > 0$ sabitleri için*

$$\begin{aligned} py'' + (\lambda - q)y &= 0, 0 < x < L \\ y(0) &= y(L), y'(0) = y'(L) \end{aligned}$$

probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını belirleyiniz. Elde ettiğiniz sonuçları Soru 14'te ki cevabınız ile karşılaştırınız.

20. *RSL problemi için gerçekleştirdiğimiz adımları takip ederek, (5.34) ile verilen Prüfer dönüşümü altında (5.33) sisteminin (5.35)-(5.38) sistemine dönüştüğünü gösteriniz.*

21. *Program 5.1 i çalıştırarak Örnek 5.5 deki sonuçları yeniden türetiniz.*

22. *Program 5.1 i çalıştırarak Örnek 5.6 deki sonuçları yeniden türetiniz.*

```
function [T,Y,lamda]=sturmnewton(lamda,n);
  % -(py')'+qy=lamda_w_y, 0<x<1, y(0)=0 y(1)=0
  % teta'=1/pcos(teta)^2+(lamda_w-q)sin(teta)^2;
  % rho'=[(p^-1 +q-lamda_w)sin(teta)cos(teta)]rho;
  %teta(0)=0, teta(1)=n*pi, rho(0)=1,
  % Nisan 25-26, 2020, ec.

  p=@(x) 1;  q=@(x) 0;w=@(x) 1;
  %p=@(x) 1*(x<1/2)+2*(x>=1/2); parçalı sürekli p, q tanımlanabilir.
  tol=1e-8; test=1;opt = odeset( "RelTol", 1e-6);x_p=0.5;dx=0.01;

  while test
   teta=[0,0];xspan=0:dx:x_p;
   [X1,Teta1]=ode45(@(x,teta) f(x,teta,p,q,w,lamda),xspan,teta,opt);
   teta1=Teta1(end,1);
   teta1_lamda=Teta1(end,2);
   teta=[n*pi 0];xspan=1:-dx:x_p;
   [X2,Teta2]=ode45(@(x,teta) f(x,teta,p,q,w,lamda),xspan,teta,opt);
   teta2=Teta2(end,1);
   teta2_lamda=Teta2(end,2);
   fark=teta1-teta2;
   farklamda=teta1_lamda-teta2_lamda;
   lamda=lamda-fark/farklamda;
   test=abs(fark)>tol;
  end
  X2=flipud(X2);Teta2=flipud(Teta2(:,1));
  X2=X2(2:end);Teta2=Teta2(2:end);
  X=[X1;X2];Teta=[Teta1(:,1);Teta2];
  rho=1;X=X';Teta=Teta';tspan=T;
  [X,Rho]=ode45(@(x,rho) frho(x,rho,p,q,w,lamda,X,Teta),xspan,rho,opt);
  X=X';Rho=Rho';
  Y=Rho.*sin(Teta);

function teta_p=f(x,teta,p,q,w,lamda,Teta)
   teta_p=[1/p(x)*cos(teta(1))^2+(lamda*w(x)-q(x))*sin(teta(1))^2;
          (-1/p(x)+lamda*w(x)-q(x))*sin(2*teta(1))*teta(2)+w(x)*sin(teta(1))^2];

function rho_p=frho(x,rho,p,q,w,lamda,X,Teta)
         tet=interp1(X,Teta,x);
         rho_p=(1/p(x)+q(x)-lamda*w(x))*rho*sin(2*tet)/2;

%--------------------------------------------------------------
```

Karadeniz Teknik Matematik, erhan@ktu.edu.tr

Program 5.1: Newton yöntemi ile uygun eşleştirme ile indisi verilen özdeğer ve özfonksiyonu hesaplar

Kaynaklar

[1] Duchateau, P., Zachmann D, Applied Partial Differential Equations, Dover Pub., New York, 1989.

[2] Coleman, P. Matthew, An introduction to Partial Differential Equations with MATLAB, Chapman& Hall/CRC, 2004.

[3] Zettl, A., Sturm-Liouville Theory, American Mathematical Society, 2010.

[4] Bailey, P. B., Gordon, M. K. and Shampine, L. F. Automatic solution of the Sturm-Liouville problem. ACM Trans. Math. Software, 4 (1978), 193-208

[5] Edwards, C. H, &Penney, D. E. (Akın, Ö., çeviri editörü) Difrensiyel denklemler ve sınır-değer problemleri,Palme yayıncılık, 2006.

[6] Andrews, L. C., Elementary Partial Differential Equations with Boundary Value Problems, Academic Press, Inc., Florida, 1986.

[7] MATLAB,URL:mathworks.com

[8] OCTAVE, URL:octave.sourceforge.net

[9] Coşkun, E. Octave ile Sayısal Hesaplama ve Kodlama, URL:erhancoskun.com.tr