

# Bölüm 1

## Endüstriyel Matematik

Endüstriyel matematiğe giriş ismi altında hazırladığımız bu kaynak, özellikle üst düzey lisans öğrencileri veya başlangıç lisansüstü öğrenciler düzeyinde hazırlanmış olup, endüstriyel problemlerin matematiksel formülasyonunun nasıl gerçekleştirildiğini ve çözüm sürecinde kullanılan matematiksel araçları tanıtmayı amaçlamaktadır. Bu bölümde ana hatlarıyla

- Endüstriyel Matematik kavramı ve
- organizasyonlarını tanıtarak,
- Endüstriyel Matematik kapsamında değerlendirilen problemlerin ortak özelliklerini tipik bazı örnekler üzerinde sunuyoruz.

### 1.1 Endüstriyel Matematik

Endüstriyel Matematik, endüstriyel alanda karşılaşılan ve çözümünü matematiksel yöntem veya araçların kullanımını gerektiren problemlerin analizini gerçekleştirir[1]. Burada “endüstri” kısaca mal veya hizmet üretimidir. O halde,

- kaliteli ürün için gerekli simülasyon modellerinin oluşturulması ve analizi,
- üretim maliyetinin düşürülmesi için gerekli işgücü organizasyonu,

- ürünlerin satış noktalarına minimum maliyetle ulaştırılması,
- tüketici eğilimlerinin belirlenmesi,
- kişisel tercihlere uygun esnek üretim geliştirilmesi sürecinde

karşılaşılan ve çözümü matematiksel yöntemlerin kullanılmasını gerektiren her problem Endüstriyel Matematik kapsamında değerlendirilebilir.

Herhangi bir konunun Endüstriyel Matematik kapsamında değerlendirilip, değerlendirilemeyeceğini belirlerken kullanılan iki temel prensip

- problemin endüstriyel bir alanda ortaya çıkmış olması ve
- problem çözüm sürecinin matematiksel öğeler(araç, yöntem) kullanımını gerektirmesidir.

Endüstriyel Matematik, matematiğin daha gelişmiş bir alanı olarak bilinen Uygulamalı Matematikten biraz daha farklı değerlendirilir:

- Uygulamalı Matematik bir uygulama alanına sahip matematiksel teoriyi geliştirip, inceleyen ve uygulamalarını sunan bir anabilim dalı iken, Endüstriyel Matematik direk olarak endüstriyel problemlerin analizine odaklanır.
- Uygulamalı matematikçiler kendilerine önce bir alan seçer ve bu alandaki ilgi çekici problemlerle ilgilenirler. Endüstriyel matematikte ise bir alan seçiminden ziyade, odak noktası endüstriyel problemidir.
- Endüstriyel matematik problemleri için endüstri temsilcileri ve akademisyenlerin en azından ilgili problemin matematiksel formülasyon aşamasına kadar belirli bir süre beraber çalışması gerekir. Uygulamalı matematik problemleri için grup çalışma zorunluluğu yoktur.

Endüstriyel alanlar ile matematiksel alanlar arasında yakın ilişki söz konusudur. Örneğin

- Şifreleme ve veri güvenliği problemleri için Cebir ve Sayılar Teorisi,
- Bilgisayar destekli tasarım problemleri için Geometri,

- Statik veya dinamik denge, geleceği tahmin ve finansman problemleri için Diferensiyel Denklemler,
- Sınırlı kaynaklarla maksimum kazanç problemleri için Optimizasyon,
- Hemen hemen her nonlinear problem için Sayısal Analiz ve
- Mekanik ve elektrik sistemler için Nonlinear kontrol gerekli teorik desteği sağlamaktadır.

## 1.2 Uluslararası Endüstriyel ve Uygulamalı Matematik Organizasyonları

Endüstriyel ve Uygulamalı Matematik çalışmalarını koordine eden değişik organizasyonlar mevcuttur. Bu organizasyonların bir kısmı ve yürüttükleri faaliyet türleri aşağıda özetlenmektedir[3]:

- SIAM(Society for Industrial and Applied Mathematics, Endüstriyel ve Uygulamalı matematik Topluluğu[9]) uluslararası endüstriyel ve uygulamalı matematik çalışmalarının organizasyonunda aktif rol alan ve çok sayıda üyesi bulunan geniş bir akademik topluluktur.
- Ayrıca çeşitli SIAM aktivite gruplarıyla(SIAM activity Groups), aşağıda belirtilen alanları da içeren bir çok alanın mühendislik ve diğer bilimlerdeki uygulamalarının geliştirilmesine çalışılmaktadır[9]:
  - Cebirsel Geometri
  - Kısmi Diferensiyel Denklemler Analizi
  - Hesaplamalı bilimler ve mühendislik
  - Kontrol ve sistemler teorisi
  - Veri madenciliği
  - Ayrık matematik
  - Dinamik sistemler
  - Finansal matematik ve mühendislik
  - Geometrik tasarım

- Jeobilimler
  - Görüntü bilimi
  - Canlılar bilimi
  - Lineer cebir
  - Malzeme biliminin matematiksel yönleri
  - Lineer olmayan dalgalar
  - Optimizasyon
  - Ortogonal polinomlar ve özel fonksiyonlar
  - Superhesaplama
  - Belirsizlik analizi
- ECMI (**E**uropean **C**onsortium for **M**athematics in **I**ndustry, Avrupa Endüstride Matematik Konsorsiyumu) Avrupada değişik endüstriyel matematik organizasyonlarının düzenlenmesine katkı sağlamakta ve özellikle "Öğrenci Modelleme Haftaları" adı verilen çalıştaylar ile lisans ve lisansüstü matematik bölüm öğrencilerinin endüstriyel problem çözme yeteneklerinin geliştirilmesine katkı sağlamaktadır.
  - Ayrıca Kanada'da MITACS:Mathematics of Information Technology and Complex Systems, Bilgi Teknolojileri ve Karmaşık Sistemlerin Matematiği; Almanya'da MATHEON, İngiltere'de KTN:Knowledge Transfer Network, Bilgi Transfer Ağı gibi kuruluşlar endüstriyel firmaların matematiksel problemlerine aktif katkı sağlamaktadırlar. Ülkemizde ise TÜBİTAK Sentez Projeleri ile endüstriyel problemlere odaklanmayı teşvik etmektedir.
- Global Bilim Forumu(A Global Science Forum) adı verilen forum tarafından hazırlanan ve Endüstride Matematiğin gelişim hızını artırmaya yönelik 2009 yılı OECD raporunda endüstriyel matematiğin gelişimi önündeki engeller analiz edilerek, uluslararası faaliyetler özetlenmektedir.
- Endüstriyel Matematik Çalışma Grupları(Study Groups with Maths in Industry) ise 1970 li yıllarda Oxford üniversitesinde bir grup akademisyen ve endüstriyel kuruluşlar arasında başlatılan bir işbirliği formatıdır. Bu formata göre çalışma grupları haftanın ilk gününden başlamak üzere

son gününe kadar 5-10 firma tarafından ilk gün sunulan problemler üzerinde çalışırlar. Her bir problem için tahsis edilen salonda probleme ilgi duyan araştırmacılar, problemi sunan firma Ar-Ge temsilcisinden probleme ait daha teferruatlı bilgiler alarak, problem üzerinde çalışırlar. Elde edilen sonuçlar haftanın son günü diğer gruplarla birlikte sunulur. Daha sonra elde edilen sonuçlar her bir grupta görevli birkaç araştırmacı tarafından yazılarak probleme ait rapor oluşturulur. 2020 yılı öncesine ait çalışma grubu raporu aşağıda giriş arayüzü sunulan uluslararası endüstride matematik bilgi sistem olarak tanımlanan **miis.math.ox.ac.uk** sitesinde yer almaktadır.

- **miis.math.ox.ac.uk** adresinde yiyecek ve içecek, havacılık ve savunma, finans, malzeme, tıp ve eczacılık, spor ve ulaşım gibi çok değişik alanlarda karşılaşılan matematiksel problemlere ait çok sayıda makale yer almaktadır.
- Güncel çalışmalara ise Cambridge üniversitesi tarafından "open engage" isimli program kapsamında geliştirilen ve yukarıda arayüzü gösterilen site üzerinden erişim sağlanabilmektedir.
- Üniversite-Sanayi işbirliğinin matematiksel boyuttaki diğer somut örnekleri için [10] a bakınız.

## 1.3 Endüstriyel Problemlerin Ortak Özellikleri

Çok farklı uygulama alanlarından üretilmiş olsalar bile, endüstriyel problemler bazı ortak özelliklere sahiptirler[3].

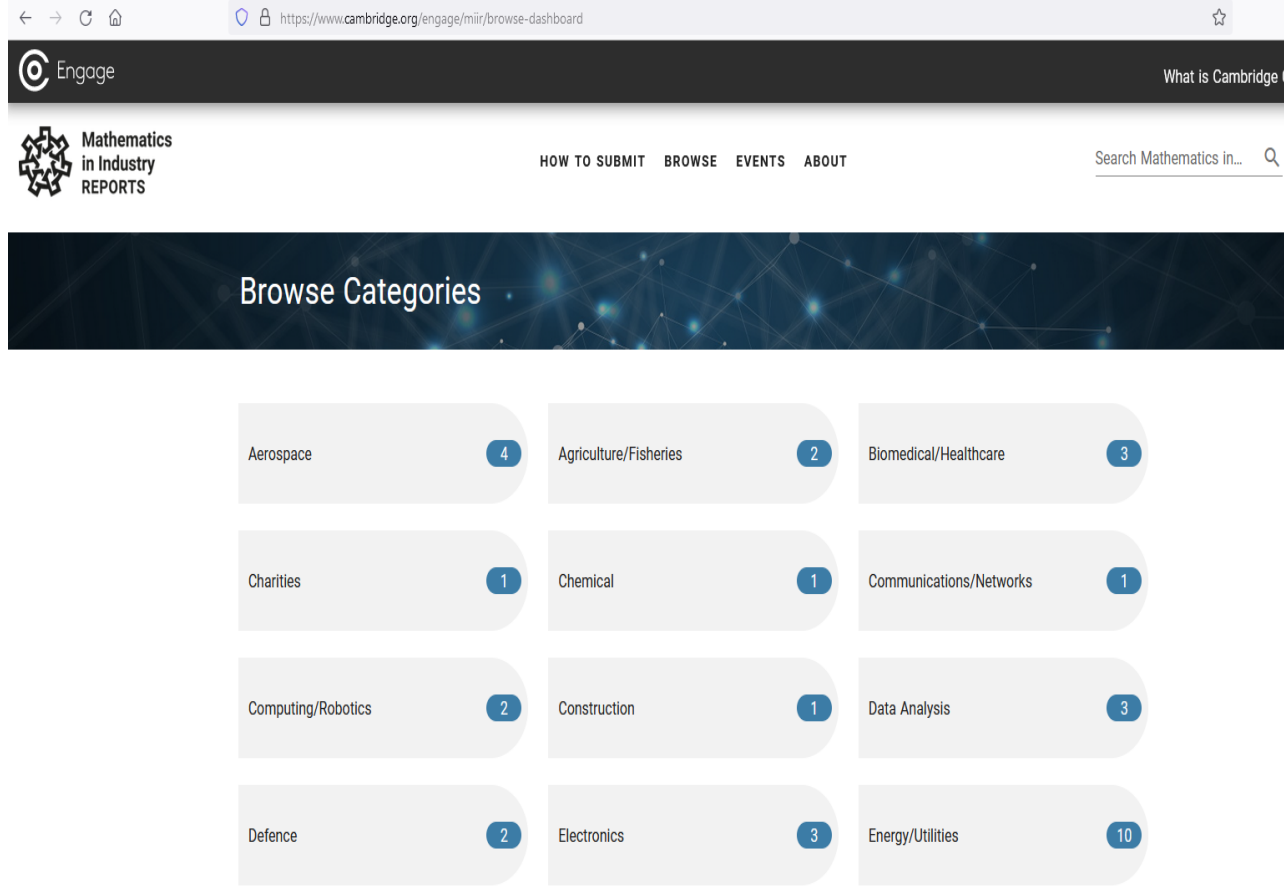
- **Minimum Enerji ve Denge:**

Matematik, Fen bilimleri ve Mühendislik başta olmak üzere diğer bir çok alanda karşılaşılan çok sayıda problem uygun bir  $A$  matrisi ve  $b$  vektörü için

$$AX = b$$

lineer sisteminin çözümünü gerektirir.

Problem bazen bir kütle(veya miktar) korunumu, bazen lineer elektrik devrelerinde akım yasaları, bazen statikte iç ve dış kuvvetlerin dengesi



Şekil 1.1: Cambridge Üniversitesi Endüstriyel Matematik Çalıştay raporları web sitesi.

ve hatta bazen de ekonomide belirtilen talebi karşılayan üretim miktarı olabilir. Biraz daha somutlaştırmak gerekirse,

- Bir trafik şebekesinde, dengeli trafik akışı için her bir kavşağa birim zamanda gelen araç sayısı kavşağı yine birim zamanda terkeden araç sayısına eşit olmalıdır (araç sayısının korunumu).
- Bir elektrik akım devresinde, her bir düğüm noktasına gelen akım, düğüm noktasını terkeden akıma eşit olmalıdır (Kirchoff Akım yasası).
- Denge halinde bulunan bir yapı elemanına etki eden yatay kuvvetler

toplamı sifıra eşit olmalı ve benzer biçimde düşey kuvvetler toplamı da sifıra eşit olmalıdır. Benzer denge bir noktaya göre alınan moment(döndürme kuvveti) için de geçerlidir.

- Ekonominin farklı sektörlerinin kendi aralarındaki talepleri(ara talep) toplam üretim miktarından çıkarıldığında elde edilen miktar dış talebe eşit olmalıdır(Liontief girdi-çıktı modeli).

Bu problemlerden Liontief modelini 2. Bölümde inceliyoruz.

- **Sınırlı kaynaklarla maksimum kazanç(veya minimum maliyet)**

Öte yandan sınırlı kaynaklarla maksimum kazancın veya minimum maliyetli bir çözümün elde edilmesi, toplumsal yaşamımızın her boyutunda karşılaştığımız bir problemdir ve bu durum bir çok endüstriyel uygulamanın ortak yönüdür. Biraz daha somutlaştırmak gerekirse

- Gelirimiz ve ihtiyaçlarımız arasında uygun bir denge kurarak, en yüksek refah seviyesinde bir yaşam sürdürmeyi isteriz.
- Sınırlı zamanımız içerisine çok şeyler sıkıştırarak, en yüksek başarıyı elde etmek isteriz.
- Profesyonel boyutta aynı hedef firmalar için de geçerlidir. Her firma elindeki kaynakları mevcut kısıtlamalarını da göz önünde bulundurmak suretiyle en iyi bir biçimde değerlendirerek, doğrudan kazancını maksimum düzeye ulaştırabileceği gibi, maliyetlerini minimize etmek suretiyle de kazancını artırabilir.
- Bu durumda çok bilinmeyenli ve çok sayıda kısıtlama içeren lineer veya nonlineer bir problemden bahsedilmektedir. Bu tür problemler **optimizasyon** problemi olarak adlandırılırlar. Uluslararası havayolu şirketleri, uçuş planlarını belirlerken *optimizasyon modeli* adı verilen bu tür modellerden elde ettikleri sonuçları kullanırlar[4].

Standart bir lineer optimizasyon problemi matematiksel olarak

$$\begin{aligned} \min \quad & CX \\ \text{s.t.} \quad & AX = b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir. 3. Bölümde yukarıda bahsettiğimiz türde ifade edilebilen tipik bazı problemleri örneklerle birlikte inceliyoruz.

- **İletişimde kalite**

İletişim uyduları ile telefonumuza ulaşan sinyaller gürültü adı verilen istenmeyen faktörleri içererek, ses kalitesinin bozulmasına neden olur. 4. Bölümde **Fourer ve ters Fourier dönüşümü** yardımıyla gürültünün ses sinyalinden nasıl ayıklandığını basit örneklerle inceliyoruz. Daha kapsamlı teknikler Elektronik ve Haberleşme birimleri tarafından kullanılmaktadır.

- **Veri güvenliği, toplumsal asayiş veya tıbbi amaçla görüntü işlemleri**

- Bir tomografi görüntüsünün netleştirilmesi gibi tıbbi amaçlarla veya
- herhangi bir görüntünün istenen özelliklerinin ön plana çıkarılmak istenmesi gibi(parmak izi vb) toplumsal asayiş işlemlerinde veya
- üçüncü kişilere ulaşması istenmeyen bir görüntü bilgisinin bir başka görüntü içinde gizlenmesi(staganografi) işlemlerinde bir matris ile temsil edilebilen siyah-beyaz görüntü veya üç katmanlı bir matris ile temsil edilebilen renkli bir görüntü üzerinde bazı profesyonel modifikasyon işlemlerinin matematiksel yöntemlerle yapılması gerekmektedir. 5. Bölümde **konvolüsyon** adı verilen matematiksel yöntem ile söz konusu modifikasyonların nasıl yapıldığı basit örnekler üzerinde inceliyoruz.

- **Tomografi görüntüsünün elde edilişi**

Tomografi cihazı tarafından çekim esnasında elde edilen verilerin tomografi görüntüsüne dönüştürülmesi işlemi de Fourier ve Radon dönüşümleri gibi etkin matematiksel yöntemlerin kullanılmasını gerektirmektedir. Bu amaçla 6. bölümde tomografi çekim verilerinden hareketle ilgili görüntünün nasıl oluşturulduğunu basit örnekler üzerinde ve elemanter yöntemlerle inceliyoruz.

- **Coğrafi Konum belirleme**

7. Bölümde

$$F(X) = 0$$

biçimde ifade edilebilen çember veya kürelerin arakesini belirleme problemi olarak oluşan nonlineer cebirsel sistemlerin çözümünü gerektiren **GPS** Coğrafi Konumlama Sistemi(Geographic Positioning System) problemini inceliyoruz.



Vektörler veya matrisler üzerinde işlem gerektiren ve ayrık problem olarak adlandıracağımız problemlerin yanısıra ilerleyen bölümlerimizde ise bilinmeyen fonksiyon olduğu problemlere yer veriyoruz.

- **Geleceği tahmin**

- Ülke ekonomisinde kişisel ve kamu harcama oranlarının uzun vadede nasıl değişeceğinin tahmini ve ulaşılabilecek olan denge durumunun kararlı olup olmadığı problemini ulusal ekonomi modeli adı verilen bir diferensiyel denklem sistemi ile 8. Bölümde inceliyoruz.
- Hava tahmini: Tipik bir meteoroloji modeli rüzgar hız bileşenleri, sıcaklık, nem ve basınç gibi bilinmeyen fonksiyonları içeren kısmi diferensiyel denklem sistemidir, ve sistemin temel bileşeni konveksiyon-difüzyon denklemdir.

9. Bölümde atmosfer modellerinin temel bileşeni olan tek boyutlu adveksiyon modelini akışkan içerisinde basit taşınım modeli olarak inceliyoruz.

- Trafik yoğunluğu: Tek yönlü trafik şeridinde kırmızı ışığa yaklaşırken veya kırmızı ışık sonrası araç yoğunluğunun nasıl değiştiğini gösteren nonlineer adveksiyon modelini 10. bölümde inceliyoruz.
- Rüzgar etkisi altında kirli havanın nasıl taşınarak etrafa yayıldığına ait adveksiyon-difüzyon modelini 11. Bölümde inceliyoruz.
- Geçmiş bir zaman diliminden alınan verileri kullanarak geleceğe dair tahminde bulunmak, geleceğe yönelik planlar açısından oldukça önemlidir. Bu bağlamda lojistik nüfus modeli, nüfus artış eğilimi ve bir ortamın besleyebileceği maksimum nüfus verilerine bağlı olarak bir canlı nüfusunun (örneğin ülke nüfusu) gelecekteki değerini tahmin etmek amacıyla kullanılmaktadır[5] Bu bağlamda

$$N_t = f(N, N_{xx})$$

gibi ifade edilen reaksiyon-difüzyon modelleri kullanılır[6]. Söz konusu modeli 12. Bölümde inceliyoruz.

- **Hareket halindeki cisimlerin hareket karakteristiklerinin tahmini**

- Bir başlangıç konumu, açısı ve hızı ile harekete başlayan cismin, sonraki bir  $t$ -anında bulunacağı pozisyonun veya hızının ne olacağı veya belirlenen bir konuma ne zaman ulaşabileceğinin belirlenmesi teknolojik açıdan oldukça önemlidir. Hedefini vurmak isteyen bir top mermisi, sorunsuz bir şekilde yörüngesine oturtulmak istenen uzay aracına ait uçuş planı, değişik fiziksel yasaları esas alan matematiksel modeller ile tahmin edilmektedir. Belirli bir yükseklikten, belirli bir açı ve başlangıç hızı ile bırakılan bir patlayıcıyı, yerden fırlatılan ve belirli bir yükseklikte imha etmesi planlanan imha sisteminin(basitçe füzenin) üç boyutlu uzayda takip ettiği yolun, zaman değişkeninin fonksiyonuna bağlı olarak çok hassas bir biçimde tahmin edilmesi gerekmektedir.
  - Kendi iç dinamikleri ile hareket eden bir sistemin davranışının dış etkenler altında nasıl değiştiği diğer önemli bir araştırma konusudur. Asma köprülerin rüzgar etkisi altındaki salınımlarının incelenmesi bu açıdan ilginç bir mühendislik ve matematik problemidir. Eğer söz konusu davranış önceden belirlenemez ise, ya sağlam olması için gereğinden çok fazla masraf yapılarak köprüleri inşa etmek gerekecek, ya da dış etkenlerin gücünün tahmin edilemediği durumlarda inşa edilen sistemlerin çok kısa ömürlü olması durumu söz konusu olacaktır. Nitekim, Amerika Birleşik Devletleri Washington Eyaletinde 1000 metre uzunluğunda ve 12 metre genişliğinde zarif bir biçimde inşa edilen Tacoma Narrows köprüsü 1940 yılında rüzgar etkisi altında çökmüştür[7]. Bu olaydaki sorun dış etkenlerin köprü sisteminin dinamikleri üzerindeki etkisinin iyi tahmin edilememesinden veya diğer bir deyimle iyi bir teorik modelleme ve analiz yapılamamasından kaynaklanmıştır.
13. Bölümde asma köprü salınım modeli ile köprü salınımını dış etkenler etkisi altında inceliyoruz.

#### • Dış etkenler ve Geometrik Tasarım

Dış etkenlerin hareket halindeki sistemler veya cisimler üzerindeki etkisi, doğal olarak bu sistemlerin belirtilen dış etkenlerin etkisini minimize etmek amacıyla sahip olması gereken geometrik şeklin de belirlenmesine katkı sağlamıştır:

Kullanım amaçları gibi bir çok etkenin yanında bir otomobil tasarımında önemli hususlardan birisi hareket halinde iken aracın hareketi ile oluşan

dış hava akımının veya değişik yönlerden aracın maruz kalabileceği rüzgarın araç hareketini minimum düzeyde etkilemesi için sahip olması gereken geometrinin belirlenmesidir.

Havayolu araçları için aerodinamik etkenlerin, deniz yolu araçları için hidrodinamik etkenlerin ve kara yolu araçları için ise ağırlıklı olarak sürtünme ve aerodinamik etkenlerin fiziksel yasalar çerçevesinde tahmin edilebilmesi ve gerekli tasarımların söz konusu etkenler çerçevesinde gerçekleştirilmesi gerekmektedir.

Geometrik şekilleri gereği farklı drag katsayılarına sahip küçük cisimlerin buldukları ortam içerisindeki davranışlarını 14. Bölümde inceleyeceğiz.

- **Enerji(Isı transferi)**

Isı transfer mekanizmaları uygun matematiksel modeller ve başlangıç-sınır koşulları yardımıyla formüle edilirler. En basitleştirilmiş şekli ile problem Newton soğuma yasasının matematiksel modeli olarak adi diferensiyel denklem ve uygun başlangıç şartı ile ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}dT/dt &= -h(T - A) \\T(0) &= T_0\end{aligned}$$

Burada  $T(t)$ ,  $t$  anında cismin sıcaklığı,  $A$  ortam sıcaklığı ve  $h > 0$  orantı sabitidir.

Difüzyon faktörünün de ilavesiyle

$$T_t = aT_{xx} + g(x, t), a < x < b$$

biçiminde ifade edilebilen model elde edilir.

Eğer rüzgar vs gibi konvektif etkenler de söz konusu ise olay bizleri Navier-Stokes modeli olarak bilinen ve hala en genel halde çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanamamış bir matematiksel probleme taşır. Elde edilen modelin çözülmesi için matematiksel yöntemlerin geliştirilmesi, uygulanması ve elde edilen çözümlerin problem kapsamında değerlendirilmesi oldukça önemlidir.

Bu problem üzerinde Termodinamik alanındaki mühendisler yoğun olarak çalışmakta ve çeşitli elektronik cihazların veya kurutma sistemlerinin

ısı transfer karakteristiklerini belirlemeye çalışmaktadırlar. Elde edilen sonuçlar ısı transferini gerektiren mutfak malzemelerinin bir kısmı veya engellemesi gereken bina ısı yalıtım sistemleri gibi sistemlerin tasarım ve imalatı için son derece önemlidir.

Enerji transferini minimize etmeyi amaçlayan ısıcam problemini 15. Bölümde inceliyoruz.

### Alıştırmalar 1.1.

1. 2018 yılı ve daha önceki yıllarda Endüstriyel Matematik çalıştaylarında çalışılan problem raporları [miis.math.ox.ac.uk](http://miis.math.ox.ac.uk) sitesinde yer almaktadır. Daha güncel raporlar ise Cambridge üniversitesi tarafından organize edilen ve

[cambridge.org/engage/miir/public-dashboard](http://cambridge.org/engage/miir/public-dashboard)

isimli web sitesinde yer almaktadır. Bu web sitelerinden herhangi birisini ziyaret ederek,

- taşımacılık ve otomotiv
- spor
- tıp ve eczacılık
- malzeme
- yiyecek ve içecek
- çevre veya
- havacılık ve savunma

sektörüne ait matematiksel problemlerden bir tanesinin özetini kendi cümlelerinizle ifade ediniz. İlgili problemde hangi matematiksel yöntemler kullanılmıştır?

2. Google'da "industrial mathematics" kelimeleri ile tarama yaparak karşınıza çıkan

- lisansüstü programların yer aldığı üniversiteleri
- temel ders kaynaklarını ve
- sempozyumları inceleyiniz.

# Kaynaklar ve ilgili literatür

- [1] Friedman Avner, Littman Walter, Industrial Mathematics, A course in Solving Real World Problems, SIAM.
- [2] MacCluer, R. Charles, Industrial Mathematics, Modelling in Industry, Science and Government, Prentice Hall.
- [3] OECD Endüstride Matematik Raporu:  
<http://www.oecd.org/science/sci-tech/41019441.pdf>
- [4] STOJKOVIC Goran ; SOUMIS Francois ; DESROSIERS Jacques ; SOLOMON Marius M , An optimization model for a real-time flight scheduling problem , Transportation research. Part A, Policy and practice ISSN 0965-8564 .
- [5] Robert Schoen, Dynamic Population Models, Springer, 2006.
- [6] Allen J.S., Linda, An introduction to mathematical Biology.
- [7] P. J. Meckenna and W. Walter, Travelling Waves in a Suspension Bridge.SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 50., No.3, 1990.
- [8] Wilmott P., Howison, S., Dewynne J., The Mathematics of Financial Derivatives, Cambridge Univ.
- [9] SIAM: <http://siam.org.tr>
- [10] Coşkun, Erhan, Endüstriyel Matematik ve Somut Örneklerle Üniversite-Sanayi İşbirliği, Dünyada ve Türkiye’de Üniversite, Bayburt Üniversitesi Yayını, 2016.