Bölüm 1

Temel Kavramlar(Bayağı ve Kısmi Diferensiyel Denklemler)

Bu bölümde

- kısmi diferensiyel denklemler için temel kavramları, bayağı diferensiyel denklemler teorisi ile ilişkili olarak tanıtıyor,
- bayağı diferensiyel denklemlerle modellenen tipik olayları dikkate alarak, yerel değişimlerin dikkate alındığı daha kapsamlı analizin kısmi diferensiyel denklem modelleri ile gerçekleştirilebileceğine dikkat çekiyor ve bu suretle kısmi diferensiyel denklem çalışmalarını motive ediyoruz. Ayrıca
- bayağı diferensiyel denklem çözüm yöntemleri yardımıyla çözülebilen kısmi diferensiyel denklemleri gözönüne alıyor ve genel çözümlerini elde ederek, bayağı diferensiyel ve kısmi diferensiyel denklem genel çözümleri arasındaki ilişkilere dikkat çekiyoruz.

1.1 Ön bilgi(Bayağı Diferensiyel Denklemler için hatırlatma)

Tek bir bağımsız değişkene sahip bir bağımlı değişkenin, söz konusu bağımsız değişkene göre türevini içeren denkleme **Bayağı(veya Adi) Diferensiyel**

Denklem(BDD) adı verildiğini hatırlayalım. En genel halde birinci basamaktan bir bayağı diferensiyel denklem

$$F(t, y, y\prime) = 0 \tag{1.1}$$

biçimde bir f bağıntısı yardımıyla ifade edilebilir, burada t bağımsız değişken ve $y = y(t)$ ise bağımlı değişkendir. Elemanter uygulamalarda (1.1) denklemi $y\prime$ ne göre açıkça ifade edilebilir, yani

$$y' = f(t, y) \tag{1.2}$$

şeklinde ifade edilebilir. f nin özel durumları için (1.2) denklemine özel isimler verildiğini hatırlayalım:

- $$f(t, y) = -P(t)y + Q(t)$$

  yani,

  $$y' = -P(t)y + Q(t)$$

  veya daha yaygın ifadesiyle

  $$y' + P(t)y = Q(t)$$

  ise (1.2) denklemi birinci basamaktan lineer denklem,

- $$f(t, y) = h(t)g(y)$$

  ise (1.2) denklemi değişkenlerine ayrılabilen denklem olarak adlandırılmaktadır.

- Sürekli bir $f(t, y)$ fonksiyonu için (1.2) denkleminin genel çözümü, türevi mevcut ve sürekli olup, c parametresinin her bir değeri için denklemi özdeş olarak sağlayan $y = \varphi(t, c)$ eğri ailesidir.

- Örneğin

  $$y' = t - y$$

  denkleminin genel çözümü, integral parametresi yardımıyla

  $$y = ce^{-t} + t - 1, c \in R$$

  olarak elde edilebilen eğri ailesidir.

- $$y' = t + y$$
  denkleminin genel çözümü de yine integral parametresi yardımıyla
  $$y = ce^t - t - 1, c \in R$$
  eğri ailesidir.

- Değişkenlerine ayrılabilen
  $$y' = ty$$
  denkleminin genel çözümü
  $$y = ce^{t^2/2}, c \in R$$
  eğri ailesidir.

- Öte yandan ikinci basamaktan olan
  $$y'' - y = 0$$
  denkleminin genel çözümü
  $$y = ce^t + de^{-t}, c, d \in R$$
  ile ifade edilebilen iki parametresli bir eğri ailesidir. Aynı eğri ailesi c ve d cinsinden elde edilebilen uygun A ve B sabitleri için
  $$y = A\sinh(t) + B\cosh(t)$$
  biçiminde de ifade edilebilir.

- Yine ikinci basamaktan olan
  $$y'' + y = 0$$
  denkleminin genel çözümü,
  $$y = c\sin(t) + d\cos(t), c, d \in R$$
  biçiminde ifade edilebilen iki parametreli bir eğri ailesidir.

- Ayrıca
  $$y'' + y = t^2$$
  denkleminin genel çözümünün parametre değişimi veya belirsiz katsayılar yöntemi ile
  $$y = c\sin(t) + d\cos(t) + t^2 - 2, c, d \in R$$
  olarak elde edilebileceğini hatırlayalım.

1.2 Kısmi Diferensiyel denklemler:Temel Kavramlar

TANIM 1.1. *Birden fazla bağımsız değişkene sahip bir bağımlı değişkenin, bağımsız değişken veya değişkenlerine göre kısmi türevlerini içeren denkleme* ***Kısmi Diferensiyel Denklem(KDD)*** *adı verilmektedir. Kısaca Kısmi Diferensiyel Denklem, bağımlı değişkenin kısmi türev veya türevlerini içeren denklemdir ve bazı kaynaklarda Kısmi Türevli Denklem olarak ta adlandırılmaktadır.*

- Kısmi Diferensiyel Denklem örnekleri:
- $u = u(t, x)$ olmak üzere

$$u_t = 0, \tag{1.3}$$
$$u_x = 1, \tag{1.4}$$
$$u_t + u_x = u, \tag{1.5}$$
$$u_t = ku_{xx}, \tag{1.6}$$
$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{1.7}$$
$$u_t + \mathrm{u}u_x = u_{xxx} \tag{1.8}$$

- $u = u(x, y)$ olmak üzere

$$u_x + u_y = 1 \tag{1.9}$$
$$u_x + u_y = cu \tag{1.10}$$
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.11}$$
$$u_{xx} + u_{yy} = x - y \tag{1.12}$$

- $u = u(t, x, y, z)$ olmak üzere

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \tag{1.13}$$

TANIM 1.2. *Bayağı diferensiyel denklemlerde olduğu gibi Kısmi Diferensiyel Denklemlerde de* ***denklemin basamağı*** *en yüksek basamaktan türevin basamağına eşittir.*

ÖRNEK 1.1. *(1.3)-(1.5),(1.9),(1.10) denklemleri birinci basamaktan, (1.6),(1.7), (1.11)-(1.13) denklemleri ikinci basamaktan, (1.8) denklemi ise üçüncü basamaktandır.*

TANIM 1.3. *Kısmi diferensiyel denklemlerde t zaman değişkeni, x, y, z ise konum değişkeni olarak adlandırılır.*

Birinci basamaktan u bağımlı değişkenli, t ve x bağımsız değişkenli en genel bir Kısmi Diferensiyel Denklem uygun bir f bağıntısı ile

$$f(t, u, u_t, u_x) = 0 \tag{1.14}$$

biçiminde ifade edilebilir.

TANIM 1.4. *Bir Kısmi Diferensiyel Denklemdeki konum değişkeninin sayısına* ***denklemin boyutu*** *adı verilir.*

ÖRNEK 1.2. *(1.3)-(1.8) denklemleri bir boyutlu, (1.9)-(1.12) denklemleri iki boyutlu, (1.13) ise üç boyutludur.*

Uyarı. *(1.3) denklemi konum değişkenine göre türev içermemesine rağmen, $u = u(t, x)$ olarak tanımlandığı için denklem bir boyutludur.*

TANIM 1.5. *L , bayağı veya kısmi türev operatörü, f bağımsız değişken*

veya değişkenlerin bir fonksiyonu, u ise operatörün tanım kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere operatör notasyonuyla ifade edilen

$$Lu = f \tag{1.15}$$

denklemini gözönüne alalım. L operatörünün tanım kümesindeki herhangi keyfi iki u, v fonksiyonları ve α sabiti için

- $L(\alpha U) = \alpha L(u)$
- $L(u + v) = L(u) + L(v)$

kriterleri sağlanıyorsa, L ye ***lineer operatör*** *ve (1.15) denklemine de* ***lineer diferensiyel denklem*** *adı verilir. Eğer L lineer değilse, L ye* ***nonlineer operatör*** *ve ilgili diferensiyel denkleme de* ***nonlineer diferensiyel denklem*** *adı verilir.*

TANIM 1.6. *L lineer operatör olmak üzere (1.15) denkleminde $f \equiv 0$ ise veya diğer deyimle $u \equiv 0$ denklemin çözümü ise denkleme* ***homojen denklem*** *adı verilir, diğer durumda denklem* ***nonhomojen*** *olarak sınıflandırılır.*

ÖRNEK 1.3. *Lineer ve nonlineer denklem örnekleri:*

- $u = u(x), Lu = u\prime$, olmak üzere

$$L(\alpha u) = (\alpha u)\prime = \alpha u\prime = \alpha L(u),$$
$$L(u+v) = (u+v)\prime = u\prime + v\prime = Lu + Lv.$$

  O halde $Lu = u\prime = f$ denklemi lineer bir denklemdir.

- $u = u(x), Lu = au\prime + bu^2$, olmak üzere herhangi α skaleri için

$$L(\alpha u) = a(\alpha u)\prime + b(\alpha u)^2 = a\alpha u\prime + b\alpha^2 u^2 \neq \alpha L(u) = \alpha(au\prime + bu^2),$$

  o halde

$$au\prime + bu^2 = f$$

  nonlineer bir denklemdir.

- $u = u(x), Lu = u\prime + p(x)u - q(x)u^n$,$n \neq 1$ olmak üzere herhangi α skaleri için

$$L(\alpha u) \neq \alpha L(u)$$

  dir. O halde özel olarak

$$u\prime + p(x)\,\mathrm{u} - q(x)u^n = 0$$

  veya Bernoulli denklemi olarak bilinen

$$u\prime + p(x)\,\mathrm{u} = q(x)u^n$$

  denklemi nonlineerdir.

- a, b sabitleri,$u = u(x,y), f = f(x,y)$ fonksiyonları için $au_x + bu_y = f$ denkleminin lineerdir: $u = u(x,y), a, b$ sabitleri için $Lu = au_x + bu_y$ olarak tanımlansın. Herhangi $\alpha \in R$ skaleri için

$$\begin{aligned} L(\alpha u) &= a(\alpha u)_x + b(\alpha u)_y = \alpha(au_x + bu_y) = \alpha Lu \\ L(u+v) &= a(u+v)_x + b(u+v)_y = au_x + bu_y + av_x + bv_y = Lu + Lv \end{aligned}$$

  O halde

$$au_x + bu_y = f$$

  denklemi lineer bir KDD dir.

- $u_x + \mathrm{u}u_y = f$ denklemi nonlineerdir:

  $u = u(x,y)$ için $Lu = u_x + u\,\mathrm{u}_y$ olarak tanımlansın. Herhangi $\alpha \in R$ skaleri için

  $$L(\alpha u) = (\alpha u)_x + (\alpha u)(\alpha u)_y = \alpha u_x + \alpha^2 u\,\mathrm{u}_y \neq \alpha(u_x + \mathrm{u}u_y) = \alpha L(u).$$

  olup, L operatörü nonlineer ve dolayısıyla da

  $$Lu = u_x + u\,\mathrm{u}_y = f$$

  denklemi nonlineer bir denklemdir.

- $u_t - ku_{xx} = 0$ denkleminin lineer ve homojendir:

  $u = u(x,t), k$ sabiti için $Lu = u_t - ku_{xx}$ olarak tanımlansın.Herhangi $\alpha \in R$ skaleri için

  $$\begin{aligned} L(\alpha u) &= a(\alpha u)_t - k(\alpha u)_{xx} = \alpha(au_t - ku_{xx}) = \alpha Lu \\ L(u+v) &= (u+v)_t - k(u+v)_{xx} = u_t - ku_{xx} + v_t - kv_{xx} = Lu + Lv \end{aligned}$$

  O halde denklemi lineer bir kısmi diferensiyel denklemdir. Ayrıca $u \equiv 0$ denklemin çözümü olduğu için denklem homojendir.

- Poisson denklemi olarak bilinen

  $$u_{xx} + u_{yy} = f$$

  denklemi lineer bir denklemdir, çünkü

  $$L[u] = u_{xx} + u_{yy}$$

  operatörü lineer bir operatördür(Alıştırma), ancak homojen değildir. $f = 0$ için elde edilen

  $$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

  denklemi Laplace denklemi olarak adlandırılır ve homojendir.

- c bir skaler olmak üzere Dalga denklemi olarak bilinen

  $$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f$$

  denklemi lineer bir denklemdir, çünkü $L[u] = u_{tt} - c^2 u_{xx}$ operatörü lineer bir operatördür.

- $$N_t = N_{xx} + k(N)N, k(N) = 1 - N/M$$

  denklemi nonlineerdir:

  Çünkü $N = N(x,t), LN = N_t - N_{xx} - N(1 - N/M)$ olmak üzere keyfi α sabiti için

  $$\begin{aligned} L(\alpha N) &= (\alpha N)_t - (\alpha N)_{xx} - (\alpha N)(1 - \alpha N/M) \\ &\neq \alpha(N_t - N_{xx} - N(1 - N/M)) \end{aligned}$$

  Denklemi **nonlineer** yapan terim bilinmeyenin çarpım halinde bulunduğu

  $$k(N)N = (1 - N/M)N$$

  ifadesindeki N^2/M terimidir.

Gözlem 1.1. *(x,y) bağımsız değişken ve $u = u(x,y)$ bağımlı değişken olmak üzere, birinci basamaktan en genel bir lineer Kısmi Diferensiyel Denklem*

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \tag{1.16}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Hatırlatma 1.1. *Kısmi türev için alt indis veya türev gösterimleri gibi farklı gösterimler mevcuttur, örneğin*

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

dir. Kısmi türevin vurgulanması gerektiği durumlarda türev gösterimini, diğer durumlarda ise alt indis notasyonunu kullanacağız.

1.3 Matematiksel model olarak Bayağı ve Kısmi Diferensiyel denklemler

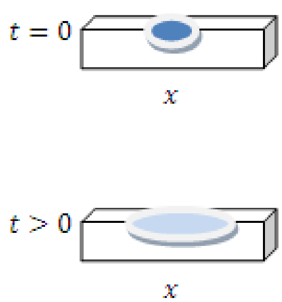
Hangi olaylar bir bayağı diferensiyel denklem ve hangileri kısmi diferensiyel denklem ile modellenebilmektedir?

Bu soruyu kısaca aşağıdaki gibi cevaplayabiliriz:

Fiziksel boyut içerisindeki yerel değişimlerinin dikkate alınmadığı durumlar bir bayağı diferensiyel denklem ile modellenebilirken, fiziksel boyut içerisindeki yerel değişimlerin dikkate alındığı durumlar kısmi diferensiyel denklem ile modellenebilmektedir.

Bayağı ve kısmi diferensiyel denklem ile modellenebilen olayları somut örnekler üzerinde inceleyelim:

1. **Kütle korunumu**: Su dolu bir kab içerisine bir damla mürekkep damlatalım, $c = c(t)$, kab içerisinde t anındaki toplam mürekkep miktarı olsun. Mürekkep miktarı zamanla değişmeyecek, yani kütle korunacaktır. Bu durumda kütle korunumunun matematiksel ifadesi olarak
$$\frac{dc}{dt} = 0$$
diferensiyel denklemini elde ederiz. Bu denklem birinci basamaktan bir bayağı diferensiyel denklemdir. Eğer $t = 0$ anındaki miktar c_0 ise bu taktirde
$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= 0 \\ c(0) &= c_0 \end{aligned} \tag{1.17}$$
başlangıç değer problemi olarak adlandırılan (1.17) probleminin çözümü olarak $c(t) = c_0$, $t > 0$ elde ederiz.



Şekil 1.1: Su dolu kabda mürekkep yayılım şematiği

O halde kab içerisine başlangıçta damlatılan mürekkep miktarı zamanla değişmemektedir.

2. **Korunan kütle difüzyonu**: *Fick* yasası olarak bilinen yasa gereği yukarıda göz önüne alınan kab içerisindeki mürekkep, yüksek yoğunluklu bölgelerden düşük yoğunluklu bölgelere doğru moleküler etkileşimler sonucu yayılacaktır. Moleküler etkileşimler sonucu oluşan bu yayılma işlemine *difüzyon* adı verilmektedir. Kabımızın Şekil 1.1 de görüdüğü üzere üstü açık ve su dolu olduğunu düşünelim. Uzun ekseni x ekseni olarak düşünelim, x noktası ve t anındaki mürekkep konsantrasyonunu $c(x,t)$ ile gösterelim. Bu durumda bardak içerisindeki mürekkep konsantrasyonu, ilerleyen derslerimizde açıkça nasıl elde edildiğini inceleyeceğimiz

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \qquad (1.18) \\ c(x,0) &= c_0 \end{aligned}$$

ile verilen difüzyon kuralına göre yayılır. Örneğimizde c değeri konum(x) ve zamana(t) bağlı olarak değişmektedir, yani $c = c(x,t)$ dir.

(1.18) modeli,

- herhangi bir x_0 noktasındaki değerin komşu noktalara göre küçük olması, örneğin x_0 noktasında yerel minimuma sahip olması durumunda $c_{xx}(x_0) > 0$ olacağından söz konusu nokta komşuluğunda noktada $c_t > 0$ olacağını, dolayısıyla c nin artacağını ifade eder. Öte yandan
- herhangi bir x_0 noktasındaki değerin komşu noktalara göre büyük olması, örneğin x_0 noktasında yerel maximuma sahip olması durumunda $c_{xx}(x_0) < 0$ olacağından söz konusu nokta komşuluğunda $c_t < 0$ olacağını, dolayı sıyla c nin azalacağını ifade eder.

3. **Korunan kütle adveksiyonu(taşınımı):** Öte yandan $x = x(t)$, tek yönde(örneğin sağa doğru) $dx/dt = v > 0$ hızıyla hareket eden akışkan içerisinde yayılmayan(difüze olmayan) kimyasalın konumunu göstersin. $c(x,t)$, x noktası ve t anında birim hacimdeki kimyasal miktarı, yani kimyasal konsantrasyonu olmak üzere, v hızıyla hareket eden ortamda toplam konsantrasyonun zamanla değişmediğini kabul edelim. Bu durumda zincir kuralı yardımıyla modelimiz

$$\begin{aligned} \frac{dc(t,x(t))}{dt} &= \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt} \\ &= c_t + vc_x = 0 \qquad (1.19) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Bu denklem **adveksiyon(taşınım)** denklemi olarak bilinen denklem türüne aittir ve denklem birinci basamaktandır.

4. **Enerji korunumu: Newton soğuma yasası,** bir cismin yüzey sıcaklığının zamana göre değişiminin, yüzey sıcaklığı ve dış ortam sıcaklığı arasındaki fark ile orantılı olduğunu ifade eder. Cismin t anındaki yüzey sıcaklığı $T(t)$ olmak üzere, bu yasa

$$T' = -\alpha(T - A)$$

olarak ifade edilebilir, burada A sabit veya zamanla değişebilen dış ortam sıcaklığı, $\alpha > 0$ ise ısı transfer katsayısıdır. Örneğin başlangıçta 75 derecedeki bir fincan kahveyi 25 derecede oda sıcaklığına getirdiğimizi düşünelim. İlerleyen zamanlarda kahve üst yüzeyinin sıcaklığı,

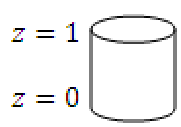
$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -\alpha(T - 25) \qquad (1.20) \\ T(0) &= 75 \end{aligned}$$

başlangıç değer problemi çözülerek elde edilebilir. Denklemi çözerek

$$T(t) = 25 + 50e^{-\alpha t}$$

elde ederiz. $t- > \infty$ için T değerleri azalarak 25 değerine yaklaştığına dikkat edelim

- Ancak kahve üst yüzeyinin sıcaklığı, fincan içerisindeki sıcaklıktan genelde farklıdır. $z-$yönünü kupa uzun ekseni olduğunu, sadece bu ekse boyunca ısı değişiminin olduğunu ve fincanın ısı yalıtımlı olduğunu, ayrıca bir birim yüksekliğinde olduğunu kabul edelim, Şekil 1.2.



Şekil 1.2: Fincan şematiği

Sıcaklık değişim modeli olarak düşey eksen ve zamana bağlı olarak

$$\begin{aligned} T_t &= kT_{zz} \quad (1.21)\\ T_z|_{z=0} &= 0\\ T_z|_{z=1} &= -\alpha(T-25)\\ T(z,0) &= 75 \end{aligned}$$

- Burada T_{zz} terimi **Termodinamik** yasalar çerçevesinde ısının sıcak bölgeden soğuk bölgeye doğru hareket edeceğini ifade eder. Herhangi bir z_0 noktasında $T_{zz} > 0$ ise, komşu noktalardaki ısının daha yüksek olduğu ve dolayısıyla difüzyon katsayısı $k > 0$ olduğu için $T_t > 0$ olacağından T nin z_0 noktasında artması gerektiği, yani komşu sıcak bölgelerden z_0 noktasına doğru moleküler etkileşimler sonucu ısı difüzyonunun gerçekleşmesi gerektiği görülür. Fakat eğer z_0 noktasında $T_{zz} < 0$ ise komşu noktalardaki ısının daha düşük olduğu ve dolayısıyla $T_t < 0$ olacağından T nin z_0 noktasında azalması gerektiği, yani ısının komşu bölgelere doğru yayılması gerektiği anlaşılmaktadır. T_z nin herhangi bir noktadaki işareti ısı akım yönünü belirler. Soğuma problemi için soğuma süresince $T_z > 0$ dır.
- Şimdi (1.20) ve (1.21) arasındaki ilişkileri inceleyelim:(1.20) probleminde $T = T(t)$ olup, denklem bir bayağı diferensiyel denklemdir ve basamağı bire eşittir, çünkü en yüksek basamaktan türevin basamağı bire eşittir.(1.21) probleminde $T = T(z,t)$ olup, denklem ikinci basamaktan bir kısmi diferensiyel denklemdir.
- Bu modelde fincan sıcaklığının sadece zaman ve fincan uzun ekseni yani z ekseni boyunca değiştiğini kabul ettik, ancak fincan içerisindeki her (x,y,z) noktasındaki sıcaklığı belirlemek isteyseydik, bu taktirde modelimizin

  $$T_t = k(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) \quad (1.22)$$

  olarak revize ederek, diğer eksenler yönündeki ısı akımlarını da dikkate almamız gerekirdi. Bu durumda denklemimiz tek bir T bağımlı değişkeni ile (x,y,z) konum değişkenleri ve t zaman değişkeni olmak üzere dört adet bağımsız değişken içerir. (1.20) de tek bir konum değişkeni mevcut olduğu için problem tek boyutlu, (1.22) de ise (x,y,z) ile gösterdiğimiz üç adet konum değişkeni mevcut olduğu için problem üç boyutludur.

5. **Nüfus korunumu**: Öteyandan beşinci örnek olarak lojistik model olarak bilinen nüfus modelini gözönüne alalım.

$$\frac{dN}{dt} = k(N)N, k(N) = 1 - N/M$$

Birinci basamaktan değişkenlerine ayrılabilir bir bayağı diferensiyel denklem olarak bu denklemi çözerek t anındaki ilgili canlı nüfusunu, yani $N(t)$ değerini belirleyebiliriz. Ancak bu bilgi bize *söz konusu bölgenin her bir alt bölgesindeki nüfus değeri hakkında bilgi vermez.*

Bu taktirde modelimizi geliştirmemiz gerekmektedir: Bir sahil şeridi boyunca $x = A$ ve $x = B$ noktaları arasında yerleşim alanlarına sahip şehir düşünelim. Bu şehrin $A < x < B$ noktasındaki nüfusu, lojistik modele göre

$$\begin{aligned} N_t &= N_{xx} + k(N)N, k(N) = 1 - N/M \qquad (1.23) \\ N(x,0) &= N_0, \text{ ilk nüfus değeri} \\ N(A,t) &= N_A, N(B,t) = N_B. \end{aligned}$$

olarak verilir. Burada N_{xx} terimi difüzyon terimi olarak adlandırılık, $N_{xx} < 0$ olduğu yerlerde dN/dt nin azalması ve $N_{xx} > 0$ olduğu yerde ise dN/dt nin artmasını gerektirir. Diğer deyimle insanların nüfusun çok yoğun olduğu bölgelerden daha az yoğun olduğu bölgelere göç etme eyilimini ifade eder. Burada N_A ve N_B değerleri sırasıyla A ve B noktalarında birim uzunluklu bölgelerdeki nüfus değerlerini temsil eder. Alternatif olarak A ve B noktalarından birim zamanda şehire giren net nüfus değerlerinin veya sınırdaki nüfus değeri veya birim zamandaki nüfus hareketliliğinin bilinmesi de şehirdeki nüfusun belirlenmesi için yeterli olur.

1.4 İkinci basamaktan lineer kısmi diferensiyel denklemlerin sınıflandırılması

İkinci basamaktan x ve y bağımsız değişken ve $u = u(x, y)$ bağımlı değişkenli en genel lineer sistem, $u_{xy} = u_{yx}$ kabulü ile

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \qquad (1.24)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada katsayılar bağımsız değişkenlerin her ikisinin veya sadece birisinin fonksiyonu olabileceği gibi sabit te olabilir. $g \equiv 0$ olması durumunda denklem *homojen* olur.

Bu denklemin sınıflandırma işlemine ışık tutması açısından öncelikle ikinci basamaktan **sabit katsayılı**

$$ay'' + by' + cy = f \tag{1.25}$$

denklemini göz önüne alalım. Homojen kısmın genel çözümü için $y = e^{rt}$ biçimde çözüm ararken, r lerin

$$ar^2 + br + c = 0$$

denklemini sağladığını biliyoruz. Denklemin köklerinin reel ve birbirinden farklı, reel ve çakışık veya karmaşık olması durumuna göre çözümün artan zaman değerleri için farklı davranış sergilediğini hatırlayalım. Daha açık olarak denklem kökleri için tanımlı

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

diskriminantı önemli rol oynar:

- $\Delta > 0$ ise kökler reel,
- $\Delta = 0$ ise kökler çakışık,
- $\Delta < 0$ ise kökler karmaşıktır.

Tıpkı 1.25 denklemindeki sınıflandırma gibi, (1.24) denklemin çözümleri de diskriminant adı verilen ve herhangi bir (x, y) noktasında

$$\Delta(x, y) = b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y)$$

ifadesinin işaretine bağlı olarak farklı özellikler gösterir. $\Delta(x, y)$ nin işarete göre de denklem farklı sınıflara ayrılır. Herhangi bir (x, y) noktasında

- $\Delta(x, y) > 0$ ise (1.24) denklemi (x, y) noktasında **hiperbolik**,
- $\Delta(x, y) = 0$ ise (1.24) denklemi (x, y) noktasında **parabolik** ve
- $\Delta(x, y) < 0$ ise (1.24) denklemi (x, y) noktasında **eliptiktir** denir.

Üç farklı sınıfa ait çözümlerin özellikleri kendi sınıfı içerinde benzerlik gösterdiği için bu sınıflandırma faydalıdır.

- Laplace denklemi olarak bilinen $u_{xx} + u_{yy} = 0$ denkleminde $a = 1, b = 0, c = 1$olup, $\Delta = -3 < 0$ dır. O halde Laplace denklemi olarak bilinen bu denklem eliptik türden bir denklemdir ve eliptik denklemlerin en basit biçimi(kanonik formu) olarak bilinir.

- Difüzyon denklemi veya daha çok ısı denklemi olarak bilinen $u_t - ku_{xx} = 0$ denkleminde $a = -k, b = c = 0$ olup, $\Delta = 0$ dır. O halde difüzyon denklemi parabolik bir denklemdir ve parabolik denklemlerin en basit biçimi olarak bilinir.

- Dalga denklemi olarak bilinen dalga yer değiştirmesini belirleyen $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ denkleminde $\Delta = 4c^2 > 0$ olup, dalga denklemi hiperbolik denklemdir ve hiperbolik denklemlerin basit biçimlerinden birisi olarak bilinir.

- $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ denkleminde $a = 1, b = 0, c = x$ olup, $\Delta = -4x$ dır. O halde $x > 0$ yarı düzleminde denklem eliptik, $x = 0$ doğrusu üzerinde $u_{xx} = 0$ denklemine dönüşür ki bu denklem parabolik, $x < 0$ yarı düzleminde ise denklem hiperboliktir. O halde değişken katsayılı denklemler, farklı bölgelerde farklı denklem türlerine ait olabilmektedir.

- $u_{xx} + (1 - x^2)u_{yy} = 0$ denkleminde $a = 1, b = 0, c = 1 - x^2$ olup, $\Delta = 4(x^2 - 1)$ dır. O halde

  - düzlemde $x = \pm 1$ doğrusu üzerinde denklem parabolik(P),
  - $D = \{(x, y) \in R^2 | -1 < x < 1\}$ bölgesi üzerinde denklem eliptik(E) ve
  - $D = \{(x, y) \in R^2 | x < -1$ veya $x > 1\}$ bölgesi üzerinde denklem hiperboliktir(H).
  - Soldan sağa doğru sıralamak gerekirse, denklem düzlemde $HP_{x=-1}EP_{x=1}H$ veya kısaca $HPEPH$ türündedir.

1.5 Bazı kısmi diferensiyel denklemlerin bayağı diferensiyel denklem çözüm yöntemi yardımıyla çözümü

Aşağıdaki tabloyu inceleyerek, bazı lineer bayağı diferensiyel denklemlerin çözümlerini hatırlayalım.

Bayağı Dif. Denklem	Genel çözüm
$y = y(t), y\prime = 0$	$y = c, c \in R$
$y\prime = 1$	$y = t + c, c \in R$
$y\prime = y$	$y = ce^t, c \in R$
$y' + 3y = 0$	$y = ce^{-3t}, c \in R$
$y'' = 0$	$y = c + dt, c, d \in R$
$y'' + y = 0$	$y = c\sin(t) + d\cos(t), c, d \in R$
$y'' - y = 0$	$y = c\sinh(t) + d\cosh(t), c, d \in R$

Şimdi ise tıpkı bayağı diferensiyel denklemlerde olduğu üzere integral yardımıyla veya bayağı diferensiyel denklem çözümlerine benzeterek, bazı kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümlerini belirleyebiliriz.

ÖRNEK 1.4. $u = u(x, t)$ *olmak üzere*

$$u_t + 3u = t,$$

denkleminin bayağı diferensiyel denklem çözümü yardımıyla belirleyiniz.

Çözüm.

$y = y(t)$ olmak üzere

$$y' + 3y = t$$

denkleminini nasıl çözdüğümüzü haturlayalım:$\lambda = e^{3t}$ integral çarpanı ile her iki yanı çarparak

$$e^{3t}y' + 3ye^{3t} = te^{3t}$$

veya

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}y) = te^{3t}$$

elde ederiz. Her iki yanın t ye göre integralini alarak

$$e^{3t}y = \int te^{3t}dt^{1} = \frac{1}{9}e^{3t}(3t-1) + c$$

veya

$$y = \frac{1}{9}(3t-1) + ce^{-3t}$$

elde ederiz.

Benzer biçimde verilen kısmi diferensiyel denklemin her iki yanını $\lambda = e^{3t}$ ile çarparak

$$e^{3t}u_t + 3ue^{3t} = te^{3t}$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{3t}u) = te^{3t}$$

elde ederiz. Her iki yanın t ye göre integralini alarak

$$e^{3t}u = \frac{1}{9}e^{3t}(3t-1) + c(x)$$

veya

$$u = \frac{1}{9}(3t-1) + c(x)e^{-3t}$$

genel çözümünü elde ederiz.

ÖRNEK 1.5. *$u = u(x,t)$ olmak üzere*

$$u_x + 2u = t,$$

denkleminin bayağı diferensiyel denklem çözümü yardımıyla belirleyiniz.

Çözüm.

---

[1] $u = t, dv = e^{3t}dt$ ile

$$\int udv = uv - \int vdu$$

kısmi integrasyon kuralını uygulayınız.

Verilen kısmi diferensiyel denklemin her iki yanını $\lambda = e^{2x}$ ile çarparak

$$e^{2x}u_x + 2ue^{2x} = te^{2x}$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{2x}u) = te^{2x}$$

elde ederiz. Her iki yanın t ye göre integralini alarak

$$e^{2x}u = \frac{1}{2}e^{2x}t + c(t)$$

veya

$$u = \frac{1}{2}t + c(t)e^{-2t}$$

genel çözümünü elde ederiz

Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz.

Kısmi Diferensiyel Denklem	Genel çözüm
$u = u(x, y)$,$u_x = 0 \Rightarrow$	$u = c(y)$,herhangi $c(y)$ fonksiyonu
$u = u(x, y), u_x = 1 \Rightarrow$	$u = x + c(y)$,
$u = u(x, y), u_y = 1 \Rightarrow$	$u = y + c(x)$, herhangi $c(x)$ fonksiyonu
$u = u(x, t), u_t = u \Rightarrow$	$u = c(x)e^t$,
$u = u(x, t), u_t + 3u = 0 \Rightarrow$	$u = c(x)e^{-3t}$,
$u = u(x, t), u_t + 3u = 1 \Rightarrow$	$u = \frac{1}{3} + e^{-3t}g(x)$
$u = u(x, y), u_{yy} = 0 \Rightarrow$	$u_y = c(x) \Rightarrow u = c(x)y + d(x)$,
$u = u(x, y), u_{xx} = 0 \Rightarrow$	$u_x = c(y) \Rightarrow u = c(y)x + d(y)$,
$u = u(x, y), u_{xy} = 0 \Rightarrow$	$u_x = c(x) \Rightarrow u = C(x) + d(y)$,
$u = u(x, y), u_{xx} + u = 0 \Rightarrow$	$u = c(y)\sin(x) + d(y)\cos(x)$
$u = u(x, y), u_{yy} + u = 0 \Rightarrow$	$u = c(x)\sin(y) + d(x)\cos(y)$
$u = u(x, y), u_{xx} - u = 0 \Rightarrow$	$u = c(y)\sinh(x) + d(y)\cosh(x)$
$u = u(x, y), u_{yy} + 16u = 0 \Rightarrow$	$u = c(x)\sin(4y) + d(x)\cos(4y)$
$u = u(x, y), u_{xx} + 4u = 0 \Rightarrow$	$u = c(y)\sin(2x) + d(y)\cos(2x)$

Özetle bu bölümde

- kısmi diferensiyel denklemler için temel kavramları, bayağı diferensiyel denklemler teorisi ile ilişkili olarak inceledik,

- bayağı diferensiyel denklemlerle modellenen tipik olayları dikkate alarak, daha kapsamlı analizin kısmi diferensiyel denklem modelleri ile gerçekleştirilebileceğine dikkat çekerek ve bu suretle kısmi diferensiyel denklem çalışmalarını motive etmeye çalıştık. Ayrıca
- kısmi diferensiyel denklemler için basamak, boyut, lineerlik, homojenlik kavramlarını incelidik. Son olarak
- bayağı diferensiyel denklem çözüm yöntemleri yardımıyla çözülebilen kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümlerini elde ederek, bayağı diferensiyel ve kısmi diferensiyel denklem genel çözümleri arasındaki ilişkilere dikkat çektik.

Alıştırmalar 1.1.

1. *$y = y(t)$ olmak üzere aşağıdaki tabloyu doldurunuz.*

BDD	*Genel çözüm*
$y''' = 0$	
$y'' - 4y = 0$	
$y'' + 4y = 0$	
$y' + 2y = 1$	
$y' + y = t$	$y = ce^{-t} + t - 1$
$y'' = e^{-t}$	
$y'' + y' + y = 0$	

2. *$u = u(x,t)$ olmak üzere aşağıdaki tabloyu doldurunuz.*

KDD	*Genel çözüm*
$u_{xxx} = 0$	
$u_{xx} - 4u = 0$	
$u_{xx} + 3u = 0$	
$u_x + 2u = 1$	
$u_x + u = t$	$u = t + e^{-x}g(t)$
$u_{xt} = e^{-t}$	
$u_{xx} + u_x + u = 0$	

3. $u = u(x,t)$ *olmak üzere*

$$u_{xx} - 3u_x + 2u = 0$$

denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

(a) $u = ce^t + de^{2t}, c, d \in R$

(b) $u = c(y)e^x + d(y)e^{2x}$,

(c) $u = ce^x + de^{2x}, c, d \in R$

(d) $u = c(t)e^x + d(t)e^{2x}$

4. Deneme yanılma yöntemiyle aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Çözüm,$u = u(x,t)$	*Kısmi Diferensiyel Denklem*
$u = f(x)$	$u_t = 0$
$u = f(x-t)$	
$u = f(x+t)$	
$u = f(2x+3t)$	$3u_x - 2u_t = 0$
$u = xf(t) + g(x)$	
$u = xt + f(t)$	
$u = e^{-t}\sin(x)$	
$u = e^t \sin(x)$	
$u = f(x-t) + g(x+t)$	
$u = \sin(x)\cos(t)$	
$u = \sinh(x)\cosh(t)$	

5.

$$u_t + u\,\mathrm{u}_x = 1$$

denklemi için doğru seçeneği belirleyiniz.

(a) *birinci basamaktandır, lineerdir*

(b) *birinci basamaktandır, nonlineerdir.*

(c) *ikinci basamaktandır, nonlineerdir.*

(d) *doğru cevap yukarıda verilmemiştir.*

6. *Aşağıda verilen denklemlerin lineer olup olmadıklarını araştırınız, basamak ve boyutlarını belirtiniz.*

   (a) $u_{xx} + u_{yy} = 0$
   (b) $u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$
   (c) $u_t + 3u_x - u = 0$
   (d) $u_t + xu_x = u_{xx}$
   (e) $u_t + u^2 u_x = 0$
   (f) $u_{tt} + \alpha u_t = \alpha u_{xxxx}$
   (g) $u_t = k(u_{xx} + u_{yy})$

7. *Aşağıdaki denklemlerin türünü belirleyiniz, homojen olup olmadıklarını belirleyiniz.*

   (a) $u_{xx} - 4u_{yy} = 0$
   (b) $u_{xx} + 4u_{yy} + u_x - u_y = x$
   (c) $u_{xx} + 3u_{xy} + yu_{yy} + u_x = 0$
   (d) $u_{xx} + u_x + u_y = 0$

8. $u = f(t)\cos(2x) + g(t)\sin(2x)$ *fonksiyon ailesini çözüm kabul eden denklem aşağıdakilerden hangisidir?*

   (a) $u_{tt} + 2u = 0$
   (b) $u_{xx} + 2u = 0$
   (c) $u_{xx} + 4u = 0$
   (d) $u_{tt} + 4u = 0$

9. *Aşağıda verilen değişken katsayılı denklemlerin düzlemin hangi alt bölgelerinde hangi türden olduklarını belirleyiniz. İlgili bölgelerin düzlemde tarayarak belirtiniz.*

   (a) $u_{xx} + (1 - x)u_{yy} = 0$
   (b) $u_{xx} + (1 + x)u_{yy} = 0$
   (c) $u_{xx} + (1 + x)u_{xy} + u_{yy} = 0$

(d) $(1-x)u_{xx} + u_{tt} = 0$

10. $u_{xx}+(1-x)u_{xy}+u_{yy} = 0$ *denkleminin düzlemde Hiperbolik(H), Parabolik(P) ve Eliptik(E) olduğu bölgelerin soldan sağa doğru sıralanışı hangisidir?*

(a) *HPEPH*

(b) *PHEPH*

(c) *PEHEPH*

(d) *EPHPE*

Kaynaklar

[1] Duchateau, P., Zachmann D, Applied Partial Differential Equations, Dover Pub., New York, 1989.

[2] Coleman, P. Matthew, An introduction to Partial Differential Equations with MATLAB, Chapman& Hall/CRC, 2004.

[3] Andrews, L., Elementary Partial Differential Equations with Boundary Value Problems, Academic press, 1989.