Bölüm 2

Birinci basamaktan denklemler ve karakteristikler yöntemi

Bu bölümde birinci basamaktan

- sabit ve değişken katsayılı lineer denklemlerin özel bazı doğru veya eğriler üzerinde bayağı diferensiyel denkleme nasıl dönüştüğünü,
- sözkonusu bayağı diferensiyel denklemin çözümü yardımıyla genel çözümün nasıl elde edileceğini ve
- bu tür denklemlerle oluşturulan Başlangıç Değer Problemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği problemlerini inceleyeceğiz. Ayrıca
- parçalı fonksiyonlar yardımıyla tanımlanan Başlangıç Değer Problemlerinin "genelleştirilmiş" çözümlerini incelleyerek
- yarı-sonsuz bölge üzerinde uygun başlangıç değer problemlerinin çözümünü örneklerle inceliyoruz.

2.1 Sabit katsayılı problemlerin karakteristikler yöntemi ile çözümü

Karakteristikler yöntemini mümkün olabilecek basit örnekler üzerinde incelemeye başlayacağız. Ancak öncelikle aşağıda verilen zincir kuralı ile türev özelliğini hatırlayalım.

Hatırlatma 2.1. *$x = x(t), y = y(t)$ olmak üzere $\Gamma = \{(x(t), y(t))|t\epsilon R\}$ eğrisi üzerinde $u = u(x, y)$ fonksiyonunun türevi, zincir kuralı yardımıyla*

$$\frac{du(x(t), y(t))}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} \tag{2.1}$$

olarak hesaplanır. Γ eğrisi kartezyen formda $y = y(x)$ bağıntısı ile verilmişse, bu durumda x değişkenini parametre olarak düşünerek, $y = y(x)$ eğrisi üzerinde $u = u(x, y(x))$ fonksiyonunun türevi

$$\frac{du(x, y(x))}{dx} = u_x + u_y \frac{dy}{dx} \tag{2.2}$$

olarak ifade edilir.

ÖRNEK 2.1. *x, y bağımsız değişkenler ve u bağımlı değişken olmak üzere*

$$u_x = 0, -\infty < x, y < \infty \tag{2.3}$$

denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

- $y = y(x)$ boyunca u bağımlı değişkeninin türevini

  $$\frac{du(x, y(x))}{dx} = u_x + u_y \frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.4}$$

  olarak elde ederiz.

- $$\frac{dy}{dx} = y'(x) = 0$$

  seçimi ile verilen (2.3) denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözümü olarak x' ten bağımsız olan

  $$y = c \tag{2.5}$$

  yatay doğrularını elde ederiz.

- O halde (2.3) kısmi diferensiyel denklemi (2.5) doğruları üzerinde (2.4) ile verilen

  $$\frac{du(x, c)}{dx} = 0 \tag{2.6}$$

bayağı diferensiyel denklemine dönüşür. Ancak (2.6) denklemi ise u nun söz konusu doğrular üzerinde x değişkeninden bağımsız olduğunu ifade etmektedir. O halde (2.6) denkleminin $y = c$ doğrusu üzerinden integralini alarak

$$u(x, c) = sabit \tag{2.7}$$

elde ederiz. Şimdi (2.7) deki *sabit* değerini yorumlayalım: Söz konusu *sabit*, $y = c$ doğrusu üzerinde u nun herhangi bir noktada, örneğin $(x, c) = (0, c)$ noktasında, aldığı değere eşit olmalıdır, çünkü bu doğru üzerinde u fonksiyonu x ten bağımsızdır. u nun $(0, c)$ deki değerinin bir f fonksiyonu için

$$u(0, c) = f(c)$$

olduğunu kabul edelim.

- O halde

  $$sabit = f(c)$$

  olmalı, yani

  $$u(x, c) = f(c)$$

  elde ederiz.

- *$y = c$ doğrusu üzerinde gerçekleştirdiğimiz bu işlemi herhangi bir doğru üzerinde de gerçekleştirebileceğimiz için* , veya kısmi diferensiyel denklemler kitaplarındaki ifadesiyle *c sabitini yok ederek*,

  $$u(x, y) = f(y) \tag{2.8}$$

  genel çözümünü elde ederiz .

TANIM 2.1. *Bir kısmi diferensiyel denklemin daha basit kısmi diferensiyel denkleme veya bayağı diferensiyel denkleme dönüştüğü doğru veya eğrilere denklemin karakteristikleri adı verilmektedir.*

O halde Örnek 2.1 de (2.5) doğruları (2.3) denkleminin karakteristikleridir, çünkü bu doğrular üzerinde

$$u_x = 0$$

Kısmi Diferensiyel Denklemi(KDD)

$$\frac{du(x, y(x))}{dx} = 0$$

Bayağı Diferensiyel Denklemine(BDD) dönüşmüştür. Yukarıdaki örnekte karakteristikler yönteminin bir uygulamasını gerçekleştirmiş olduk. Yöntemin adımlarını aşağıda özetliyoruz.

Karakteristikler yöntemi aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır:

1. Verilen kısmi diferensiyel denklemin daha basit kısmi diferensiyel denklem veya bayağı diferensiyel denkleme dönüştüğü ve karakteristikler adı verilen eğri(sabit katsayılı denklemler için doğru) ailesine ait diferensiyel denklem(ler) yardımıyla karakteristikler elde edilir.

2. Karaktersitikler üzerinde söz konusu denklem çözülür. Bu çözümde keyfi sabit olarak Örnek 2.1 de olduğu üzere karakteristikler ailesindeki sabitin keyfi fonksiyonu alınır.

3. Elde edilen çözümde keyfi sabit(ler) mümkünse yok edilerek, karakteristikler üzerinde elde edilen çözüm genelleştirilir, diğer bir deyimle genel çözüm problemin bağımsız değişkenleri cinsinden ifade edilir.

4. Eğer denklemle birlikte yan şart verilmişse, genel çözümde ilgili yan şartları sağlayan fonksiyonlar belirlenerek istenilen özel çözüm elde edilir.

ÖRNEK 2.2. *a, b sıfırdan farklı sabitleri için*

$$au_x + bu_y = 0, -\infty < x, y < \infty \tag{2.9}$$

denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

Denklemin her iki yanını $a \neq 0$ ile bölerek,

$$u_x + \frac{b}{a} u_y = 0 \tag{2.10}$$

elde ederiz. Öte yandan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \tag{2.11}$$

eğimli doğrusu üzerinde (2.2) zincir kuralı (2.10) ve (2.11) ile

$$\frac{du(x, y(x))}{dx} = u_x + u_y \frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.12}$$

elde ederiz. Öte yandan (2.11) karakteristik denklemini x e göre çözerek

$$dx = \frac{a}{b}dy$$

veya

$$x - \frac{a}{b}y = x_0 \tag{2.13}$$

karakteristik doğru denklemini elde ederiz. Burada x_0, karakteristik doğrunun x eksenini kesim noktasıdır.Bu doğru üzerindeki her yerde (2.12) gereğince, u fonksiyonu x_0 noktasındaki değerine eşit olmalıdır, eğer bu değer $f(x_0)$ ise o halde

$$u(x, y(x)) = f(x_0) \tag{2.14}$$

çözümünü elde ederiz. Bu karakteristik için yapılan işlemi genelleştirerek, veya diğer deyimle x_0 sabitini yok ederek keyfi f fonksiyonu için

$$u(x, y) = f(x - \frac{a}{b}y)$$

genel çözümünü elde ederiz.

ÖRNEK 2.3. *a, b, c sıfırdan farklı sabitleri için*

$$au_x + bu_y = c, -\infty < x, y < \infty \tag{2.15}$$

denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

Verilen denklemin her iki yanını a ile bölerek,

$$u_x + \frac{b}{a}u_y = \frac{c}{a} \tag{2.16}$$

elde ederiz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \tag{2.17}$$

eğimli $x - \frac{a}{b}y = x_0$ karakteristiği üzerinde $u(x, y(x))$ fonksiyonunun türevini aldıktan sonra, (2.16) ve (2.17) bağıntısını kullanarak,

$$\frac{du(x, y(x))}{dx} = u_x + u_y\frac{dy}{dx} = \frac{c}{a}$$

elde ederiz. Bu bayağı diferensiyel denklemin $x - a/by = x_0$ karakteristiği üzerindeki integrali ile

$$u(x, y(x)) = \frac{c}{a}x + f(x_0)$$

çözümünü elde ederiz. x_0 sabit değerini yok ederek,

$$u(x, y) = \frac{c}{a}x + f(x - \frac{a}{b}y)$$

genel çözümünü elde ederiz.

ÖRNEK 2.4.

$$\begin{aligned} 2u_x + 5u_y &= 1, -\infty < x < \infty, y > 0 \\ u(x, 0) &= e^x \end{aligned}$$

Başlangıç Değer Probleminin çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

$$u_x + \frac{5}{2}u_y = \frac{1}{2}$$

den

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}$$

denklemini sağlayan $x - \frac{2}{5}y = x_0$ karakteristiği üzerinde

$$\frac{du(x, y(x))}{dx} = u_x + \frac{5}{2}u_y = \frac{1}{2}$$

denklemini karakteristik doğru üzerinde integre ederek

$$u(x, y(x)) = \frac{1}{2}x + f(x_0)$$

eld ederiz. Aynı işlemi herhangi bir karakteristik üzerinde de tekrarlayabileceğimiz için x_0 değerini yok ederek

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x + f(x - \frac{2}{5}y)$$

elde ederiz. Ayrıca verilen başlangıç şartını kullanarak,

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \frac{1}{2}x + f(x) \\ &= e^x \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(x) = e^x - \frac{1}{2}x$$

elde ederiz. O halde yan şartı sağlayan çözümünü

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{2}x + e^{x-\frac{2}{5}y} - \frac{1}{2}(x - \frac{2}{5}y) \\ &= \frac{1}{5}y + e^{x-\frac{2}{5}y} \end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

ÖRNEK 2.5. *a, b, c sıfırdan farklı sabitleri için*

$$au_x + bu_y = cu, -\infty < x, y < \infty \tag{2.18}$$

denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

Verilen denklemin her iki yanını a ile bölerek,

$$u_x + \frac{b}{a}u_y = \frac{c}{a}u \tag{2.19}$$

elde ederiz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

eğimli $x - \frac{a}{b}y = x_0$ karakteristiği üzerinde $u(x, y(x))$ fonksiyonunun türevini alıp, (2.19) denklemini kullanarak,

$$\frac{du(x,y(x))}{dx} = u_x + u_y\frac{dy}{dx} = \frac{c}{a}u$$

elde ederiz. Bu denklemin belirtilen karakteristik doğru üzerinde integralini alarak keyfi f fonksiyonu için

$$u(x, y(x)) = e^{\frac{c}{a}x}f(x_0)$$

elde ederiz. Aynı işlemi herhangi bir karakteristik üzerinde de tekrarlayabileceğimiz için x_0 değerini yok ederek

$$u(x,y) = e^{\frac{c}{a}x} f(x - \frac{a}{b}y)$$

çözümünü elde ederiz.

ÖRNEK 2.6. *a, b, c sıfırdan farklı sabitleri için*

$$au_x + bu_y = cu + d, -\infty < x, y < \infty \tag{2.20}$$

denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

Verilen denklemin her iki yanını a ile bölerek,

$$u_x + \frac{b}{a}u_y = \frac{c}{a}u + \frac{d}{a} \tag{2.21}$$

elde ederiz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \tag{2.22}$$

eğimli $x - \frac{a}{b}y = x_0$ karakteristiği üzerinde $u(x, y(x))$ fonksiyonunun türevini aldıktan sonra , (2.21) ve (2.22) yi kullanarak,

$$\frac{du(x,y(x))}{dx} = u_x + u_y\frac{dy}{dx} = \frac{c}{a}u + \frac{d}{a}$$

elde ederiz. Birinci basamaktan sabit katsayılı bir lineer denklem olarak

$$\frac{du}{dx} - \frac{c}{a}u = \frac{d}{a}$$

denklemi için $\lambda = e^{-(c/a)x}$ integral çarpanı ile

$$\begin{aligned} u(x,y(x)) &= e^{(\frac{c}{a})x}\left[\int \frac{d}{a}e^{-(\frac{c}{a})x}dx + f(x_0)\right] \\ &= -\frac{d}{c} + e^{(\frac{c}{a})x}f(x_0) \end{aligned}$$

veya x_0 sabitini yok ederek,

$$u(x,y) = e^{\frac{c}{a}x} f(x - \frac{a}{b}y) - \frac{d}{c}$$

genel çözümünü elde ederiz.

2.2 Cauchy Problemi için varlık-teklik teoremi ve uygulamaları

Bayağı diferensiyel denklemlerde başlangıç değer problemi, ilgili diferensiyel denklem ve başlangıç noktası adı verilen bir noktadaki fonksiyon ve gerekirse türev değerini içermektedir. Kısmi diferensiyel denklemlerde başlangıç değer problemleri **Cauchy problemleri** olarak adlandırılır ve çözümün varlık ve tekliği için karakteristik adı verilen doğru veya eğrilerle *tek ve yanlız bir tek noktada kesişen ve başlangıç eğrisi adı verilen eğri üzerindeki değerin (veya yüksek basamaktan problemler için türev değeri veya değerlerinin) verilmesi yeterlidir, ancak gerekli değildir!*

TEOREM 2.1. *[2]a, b, c sabitler ve $f = f(x, y)$ olmak üzere f_x, f_y, kısmi türevleri sürekli fonksiyonlar ve g',h' fonksiyonları da sürekli olmak üzere*

$$\begin{aligned} au_x + bu_y + cu &= f, -\infty < x, y < \infty \\ u(x, g(x)) &= h(x) \end{aligned} \tag{2.23}$$

başlangıç değer problemi verilmiş olsun. Eğer $y = g(x)$ eğrisi (2.23) probleminin her bir karateristiği ile tek bir noktada kesişiyorsa, (2.23) problemi tek bir çözüme sahiptir.

Teorem 2.1 in hipotezlerinin sağlanmaması durumunda teorem şüphesiz uygulanamaz, bu durumda çözümün varlığı veya tekliği hakkında bu teorem yardımıyla herhangi bir bilgi elde edemeyiz. Ancak çözümün mevcut olmaması veya birden fazla olmaması durumunda ise Teorem 2.1 in hipotezlerinden en az birisi sağlanmamış olduğu sonucuna varabiliriz.

ÖRNEK 2.7.

$$\begin{aligned} u_x &= 0, \\ u(0, y) &= \sin(y) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Başlangıç Değer Probleminin *çözümünü belirleyiniz.*

Çözüm.

Öncelikle denklemin genel çözümünü Örnek 2.1 e benzer olarak

$$u(x, y) = f(y)$$

olarak elde edilir. Genel çözümden, $x = 0$ için

$$u(0, y) = f(y) = \sin(y)$$

elde ederiz. O halde problemin tek çözümünü

$$u(x, y) = \sin(y)$$

olarak elde ederiz. Bu durumda

$$\Gamma = \{(0, y)|, y \epsilon R\} \tag{2.25}$$

başlangıç doğrusu, her bir $y = y_0$ karakteristik doğru ile tek bir noktada, yani $(0,y_0)$ noktasında kesişir. Dolayısıyla başlangıç doğrusu üzerinde tanımlanan fonksiyon değeri ile birlikte problem tek bir çözüme sahiptir.

ÖRNEK 2.8.

$$\begin{aligned} u_x &= 0, \\ u(x, 0) &= \sin(x) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Başlangıç Değer Probleminin(BDP) çözümünün ***mevcut olmadığını*** *gösteriniz.*

Çözüm.

Bu örnekte Γ eğrisi

$$\Gamma = \{(x, 0)|, x \epsilon R\}$$

olarak verilmiştir. Bu durumda Γ eğrisi(yani $y = 0$ doğrusu), $y = y_0 = 0$ karakteristik doğrusu ile sonsuz sayıda noktada kesişir. Γ eğrisi üzerinde verilen $sin(x)$ başlangıç değeri ile

$$\begin{aligned} u_x &= 0, -\infty < x < \infty, y > 0 \\ u(x, 0) &= \sin(x) \end{aligned}$$

problemi çözüme sahip değildir. Çünkü $u(x, y) = f(y)$ genel çözümünden

$$u(x, 0) = f(0) \neq \sin(x), x \epsilon R$$

elde ederiz. Bu durum bir çelişkidir, çünkü tek değişkenli bir fonksiyonunun tek bir noktadaki değeri, sabit olmayan bir fonksiyona eşit olamaz. O halde verilen başlangıç değerini sağlayan f fonksiyonu belirlenemez, yani verilen BDP çözüme sahip değildir.

ÖRNEK 2.9.

$$\begin{aligned} u_x &= 0, \\ u(x,0) &= 1 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Başlangıç Değer Probleminin birden fazla çözüme sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Problemin genel çözümü

$$u(x,y) = f(y)$$

olup,

$$u(x,0) = f(0) = 1$$

elde ederiz. Bu durumda bir çelişki söz konusu değildir, ancak $f(0) = 1$ özelliğini sağlayan her f için bir çözüm elde edilir. Örneğin

$$u(x,y) = \cos(y), \cosh(y), y+1, (y+1)^2, ...$$

fonksiyonları verilen BDP nin çözümleridirler. O halde verilen BDP sonsuz sayıda çözüme sahiptir. Bu örnekte başlangıç doğru olarak verilen $y = 0$ doğrusunun $y_0 \neq 0$ için hiç bir $y = y_0$ karakteristiği ile kesişmediğine ve $y_0 = 0$ için ise sonsuz sayıda noktada kesiştiğine dikkat edelim.

ÖRNEK 2.10.

$$\begin{aligned} u_y &= 0, -\infty < x < \infty, y > 1 \\ u(x,1) &= \cos(x) \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

Bu örnekte Γ eğrisi

$$\Gamma = \{(x,1)|, x\epsilon R\}$$

eğrisi veya kartezyen koordinat ifadesi ile $y = 1$ doğrusu olarak verilmiştir. Bu doğru her bir $x_0 \epsilon R$ için $x = x_0$ karakteristik doğrusu ile tek bir noktada kesişmektedir. O halde çözüm mevcut ve tektir.

$$u(x,y) = f(x)$$

genel çözümünden
$$u(x,1) = f(x) = \cos(x)$$
veya $u(x,y) = \cos(x)$ çözümünü elde ederiz.

ÖRNEK 2.11. *2.2 x, y bağımsız değişkenler ve u bağımlı değişken olmak üzere*

$$u_y = 0, -\infty < x, y < \infty, \tag{2.28}$$
$$u(0,y) = 2y + 1 \tag{2.29}$$

denkleminin çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

Örnek 2.1 e benzer olarak keyfi f fonksiyonu için
$$u(x,y) = f(x)$$
genel çözümünü elde ederiz.

Bu örnekte $x = 0$ başlangıç doğrusunun, $x_0 \neq 0$ olan hiç bir $x = x_0$ karakteristiği ile kesişmediğine, $x_0 = 0$ için ise sonsuz sayıda noktada kesiştiğine dikkat edelim. O halde verilen Cauchy Problemi için VTT uygulanamaz.

Genel çözümden
$$u(0,y) = f(0) = 2y + 1$$
çelişkili durumunu elde ederiz, dolaysıyla verilen başlangıç şartını sağlayan f fonksiyonunu belirleyemeyiz. O halde verilen BDP çözüme sahip değildir.

ÖRNEK 2.12. *Yukarıda Örnek 2.2 ile verilen problemin aşağıda verilen başlangıç değerleri ile çözümlerini araştırınız.*

Çözüm.

- $u(x,0) = x^2$
- $u(x, \frac{b}{a}x + c) = x^2, c \in R.$

- Birinci problemde $\Gamma = \{(x,0)|x\epsilon R\}$ başlangıç eğrisi (2.11) ile verilen ve b/a eğimili (2.13) karakteristik doğrularını her bir x_0 için tek bir noktada kesmektedir. Bu durumda tek bir çözüm belirleyebilmeliyiz. Gerçekten de (2.14) yardımıyla

$$u(x,0) = f(x) = x^2$$

elde ederiz. Belirlediğimiz f fonksiyonunu (2.14) da yerine yazarak

$$u(x,y) = (x - \frac{a}{b}y)^2$$

elde ederiz.

- İkinci problemde $\Gamma = \left\{(x, \frac{b}{a}x + c)|x\epsilon R\right\}$ başlangıç eğrisi (2.13) karakteristik doğrularına paraleldir. O halde verilen BDP Teorem 2.1 in hipotezlerini sağlamamaktadır. Dolayısıyla teorem uygulanamaz. Öte yandan (2.14) yardımıyla

$$u(x, \frac{b}{a}x + c) = f(x - \frac{a}{b}(\frac{b}{a}x + c)) = f(-\frac{ac}{b}) = x^2$$

bağıntısı ile çelişkili bir durum oluşmaktadır ve f fonksiyonu belirlenememektedir. O halde verilen BDP çözüme sahip değildir.

ÖRNEK 2.13.

$$\begin{aligned} 2u_x + 3u_y &= -4u, -\infty < x < \infty \qquad (2.30) \\ u(x,0) &= x^2 \qquad (2.31) \end{aligned}$$

denkleminin çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

Verilen denklemin her iki yanını 2 ile bölerek,

$$u_x + \frac{3}{2}u_y = -2u \qquad (2.32)$$

elde ederiz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$$

eğimli $x - \frac{2}{3}y = x_0$ karakteristiği üzerinde $u(x, y(x))$ fonksiyonunun türevini alıp, (2.32) denklemini kullanarak,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= u_x + \frac{3}{2}u_y = -2u \\ u(0) &= f(x_0) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu denklemi çözerek

$$u = e^{-2x} f(x_0)$$

ve *sabit* değerini yok ederek

$$u = e^{-2x} f(x - \frac{2}{3}y)$$

çözümünü elde ederiz.

Verilen başlangıç şartını kullanarak

$$u(x, 0) = e^{-2x} f(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = x^2 e^{2x}$$

elde ederiz. O halde başlangıç değerini sağlayan çözümü

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^{-2x}(x - \frac{2}{3}y)^2 e^{2(x-\frac{2}{3}y)} \\ &= (x - \frac{2}{3}y)^2 e^{-\frac{4}{3}y} \end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

ÖRNEK 2.14.

$$\begin{aligned} u_x + u_y &= 0 \\ u(x, x+1) &= \sin(x) \end{aligned}$$

BDP'nin çözümünün varlık ve tekliğini araştırınız.

Çözüm.

Verilen denklemin karakteristikleri

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

denkleminin çözümü olarak

$$y = x + sabit$$

doğrularıdır. Öte yandan başlangıç doğrusu

$$y = x + 1$$

olarak verilmektedir. $sabit \neq 1$ değeri için hiç bir karakteristiğin başlangıç doğrusunu kesmediği ve $sabit = 1$ için ise sonsuz sayıda noktada kestiği görülmektedir. O halde verilen BDP Teorem 2.1 in hipotezlerini sağlamamaktadır. Dolayısıyla teorem uygulanamaz.

Öte yandan

$$u(x, y) = f(y - x)$$

genel çözümünden

$$u(x, x + 1) = f(1) = \sin(x)$$

gibi çelişkili bir durum elde ederiz. Dolayısıyla verilen BDP **çözüme sahip değildir**.

ÖRNEK 2.15.

$$\begin{aligned} u_x + u_y &= 0 \\ u(x, 2x + 1) &= \sin(x) \end{aligned}$$

BDP nin çözümünün varlık ve tekliğini araştırınız.

Çözüm.

Verilen denklemin karakteristikleri

$$y = x + sabit$$

doğrularıdır. Öte yandan başlangıç doğrusu

$$y = 2x + 1$$

olarak verilmektedir. başlangıç doğrusu her bir karakteristiği tek bir noktada keser. O halde Teorem 2.1 gereğince verilen BDP tek bir çözüme sahiptir. Gerçekten de

$$u = f(y - x)$$

genel çözümünden

$$u(x, 2x + 1) = f(x + 1) = \sin(x) \Rightarrow f(x) = \sin(x - 1)$$

ve dolayısıyla

$$u(x, y) = \sin(y - x - 1)$$

çözümünü elde ederiz.

ÖRNEK 2.16. *(Taşınım(Adveksiyon) modeli)*

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

BDP Teorem 2.1 nin hipotezlerini sağlar.Gerçekten de denklemin

$$x - ct = x_0$$

ile verilen karakteristikleri $y = 0$ *başlangıç doğrusunu tek bir noktada keser. O halde*

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

verilen problemin tek çözümüdür.

ÖRNEK 2.17. *(Taşınım-reaksiyon modeli)*

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= -\alpha u \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

BDP Teorem 2.1 nin hipotezlerini sağlar. Gerçekten de denklemin

$$x - ct = x_0$$

ile verilen karakteristikleri $y = 0$ *başlangıç doğrusunu tek bir noktada keser. O halde*

$$u(x, t) = e^{-\alpha t} f(x - ct)$$

verilen problemin tek çözümüdür.

2.3 Değişken katsayılı problemlerin karakteristikler yöntemi ile çözümü

Yukarıda sabit katsayılı problemlere uyguladığımız karakteristikler yöntemini değişken katsayılı problemlere de uygulayabiliriz. Ancak bu durumda karakteristiklerin sabit katsayılı problemler için elde ettiğimiz doğrular yerine, genelde eğri aileleri olduğuna dikkat edelim:

ÖRNEK 2.18. *Aşağıda verilen*

$$\begin{aligned} u_t + xu_x &= 0, \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

$$\frac{dx}{dt} = x$$

denklemini sağlayan

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= dt \\ &\Rightarrow \ln|x| = t + c_1 \\ &\Rightarrow |x| = x_0 e^t, x_0 = e^{c_1} > 0 \\ &\Rightarrow x = x_0 e^t, x_0 \in R \end{aligned}$$

karakteristik eğrileri boyunca

$$\frac{du(t,x(t))}{dt} = u_t + u_x \frac{dx}{dt} = 0$$

olup, u karakteristik eğriler boyunca değişmemektedir, o halde

$$u(x,t) = u(x_0, 0) = f(x_0) = f(xe^{-t})$$

elde ederiz.

ÖRNEK 2.19.

$$u_t + (xu)_x = 0$$

denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

Verilen denklemi açıkça

$$u_t + u + xu_x = 0$$

veya

$$u_t + xu_x = -u$$

olarak ifade edebiliriz. Buradan

$$\frac{dx}{dt} = x$$

karakteristikler denklemini çözerek

$$\frac{dx}{x} = dt \Rightarrow \ln(|x|) = t + c \Rightarrow x = x_0 e^t, x_0 \in R \tag{2.33}$$

elde ederiz.

Karaktersitikleri üzerinde

$$\frac{d}{dt}u(t, x(t)) = u_t + u_x \frac{dx}{dt} = -u$$

elde ederiz.Bu denklemin karaktersitik eğri üzerinden intgralini alarak

$$\frac{du}{u} = -dt \Rightarrow \ln(|u|) = -t + F(x_0)$$

elde ederiz.

Uyarı. *Karakteristikler üzerinden integral alırken, integral sabitini karakterisitik eğri aile parametresinin keyfi fonksiyonu olarak aldığımıza dikkat edelim.*

Yukarıdaki integral sonucunu düzenleyerek, yani her iki tarafı üstel fonksiyon üzerine yükselterek,

$$e^{\ln(|u|)} = |u| = e^{-t+F(x_0)}$$

veya düzenleyerek, keyfi f fonksiyonu için

$$u = e^{-t} f(x_0)$$

elde ederiz.

x_0 parametresini (2.33) ile verilen karakteristikler ailesinde elde edip, yukarıda yerine yazarak

$$u = e^{-t} f(xe^{-t})$$

genel çözümünü elde ederiz.

ÖRNEK 2.20.

$$u_t + (x^2 u)_x = 0$$

denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

Verilen denklemi açıkça

$$u_t + 2xu + x^2 u_x = 0$$

veya

$$u_t + x^2 u_x = -2xu$$

olarak ifade edebiliriz. Buradan

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

karakteristikler denklemini çözerek

$$\frac{dx}{x^2} = dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + c \Rightarrow -2x = \frac{2}{t+c}, c \in R$$

elde ederiz.

Karaktersitikleri üzerinde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t,x(t)) &= u_t + u_x\frac{dx}{dt} \\ &= u_t + x^2 u_x = -2xu \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu denklemden karakteristikler üzerinde

$$\frac{du}{u} = -2xdt$$

elde ederiz. Ancak bu denklemi bu şekliyle çözemeyiz. Karakteristikler üzerinde $-2x$ için t cinsinden elde edilen değeri yerine yazarak

$$\frac{du}{u} = \frac{2}{t+c}dt$$

veya integral almak suretiyle, integral sabitini karakteristikler ailesinin c parametresinin keyfi F fonksiyonu alarak,

$$\ln(|u|) = 2\ln(t+c) + F(c)$$

veya düzenleyerek

$$u = (t+c)^2 f(c)$$

elde ederiz. c parametresini yok etmek suretiyle

$$u = \frac{1}{x^2} f(t + \frac{1}{x})$$

genel çözümünü elde ederiz.

ÖRNEK 2.21.

$$u_t + tu_x = 0$$

denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

$$\frac{dx}{dt} = t$$

karakteristikler denklemini çözerek

$$x - \frac{t^2}{2} = x_0, x_0 \in R$$

elde ederiz.

Bu karaktersitikleri üzerinde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t, x(t)) &= u_t + u_x \frac{dx}{dt} \\ &= u_t + t u_x = 0 \end{aligned}$$

elde ederiz.Bu denklemden karakteristikler üzerinde

$$u = f(x_0)$$

elde ederiz. x_0 parametresini yok ederek

$$u = f(x - \frac{t^2}{2})$$

genel çözümünü elde ederiz.

2.4 Parçalı başlangıç değerli Cauchy problemleri

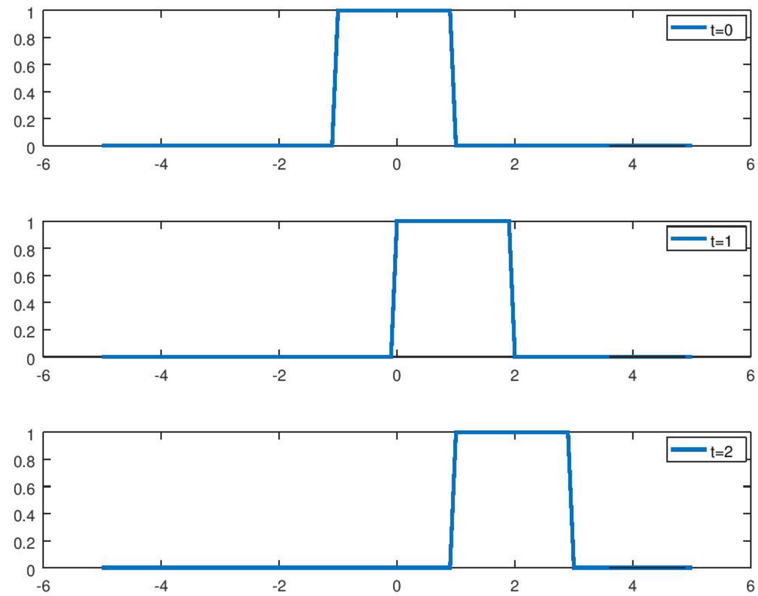
Bu bölümde başlangıç değerleri parçalı fonksiyon olarak verilen Cauchy problemlerinin, her noktada sürekli olmayabilen ve zayıf çözüm olarak adlandırılan çözümlerinin nasıl elde edildiğini inceleyeceğiz.

ÖRNEK 2.22.

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & diğer\ x\ ler \end{cases} \end{aligned}$$

probleminin çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.



Şekil 2.1: Farklı t değerleri için çözüm.

Öncelikle problemin genel çözümünü

$$u(x,t) = f(x-t)$$

olarak elde ederiz. O halde

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{diğer } x \text{ ler} \end{cases}$$

ve dolayısıyla

$$u(x,t) = f(x-t) = \begin{cases} 1, & |x-t| \leq 1 \\ 0, & \text{diğer } x \text{ ler} \end{cases}$$

elde ederiz. Şekil 2.1 de $t = 0, 1$ ve 2 değerleri için elde edilen çözümler grafiksel olarak sunulmaktadır.

Denklemin sağ yöne doğru bir birim hızla taşınım(kimyasal yoğunluğu vb) gerçekleştirdiğine dikkat edelim.

2.5 Yarı-sonsuz bölge üzerinde Cauchy problemi

Önceki bölümde sonsuz bölge ($-\infty < x < \infty, t > 0$) üzerinde tanımlı adveksiyon veya adveksiyon-reaksiyon denklmlerinin çözümlerini inceledik. Bu bölümde ise yarı-sonsuz bölge olarak adlandıracağımız ($0 < x < \infty, t > 0$) bölgesi üzerinde söz konusu denklemlerin çözümlerini, fiziksel uygulamalarıyla birlikte inceleyeceğiz.

Öncelikle yarı sonsuz bölge üzerinde tanımlanan problemlerde başlangıç değerin $(x, 0), x \geq 0$ ve ve $(0, t), t > 0$ ile verilen doğrular üzerinde verilmesi gerektiğine dikkat çekmek istiyoruz.

ÖRNEK 2.23.

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{2}u_x &= 0, 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) = x, x \geq 0 \\ u(0,t) &= g(t) = \sin(t), t > 0 \end{aligned}$$

probleminin çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$$

denklemini sağlayan

$$x - t/2 = x_0 > 0$$

karakteristikleri üzerinde

$$u(x,t) = f(x_0) = f(x - t/2), x - t/2 \geq 0$$

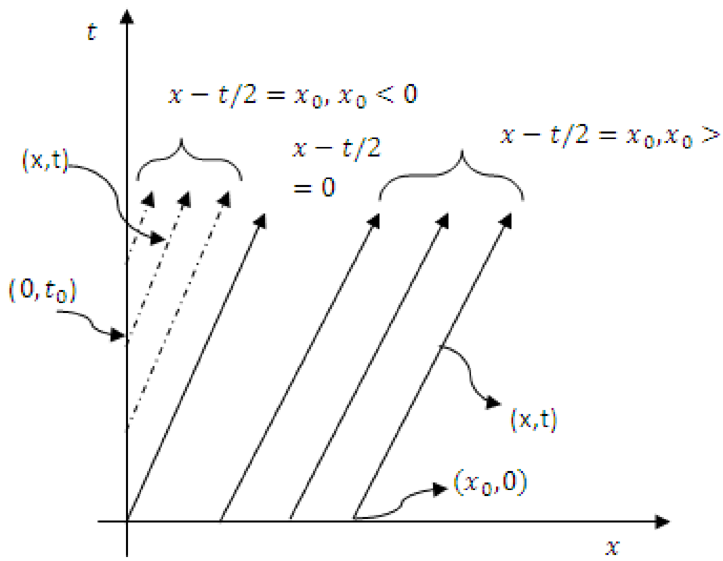
çözümünü elde ederiz. Dolayısıyla verilen başlangıç şartı yardımıyla

$$u(x,0) = f(x) = x$$

olup,

$$u(x,t) = x - t/2, x \geq t/2 > 0$$

çözümünü elde ederiz.



Şekil 2.2: x ve t eksenini kesen karakteristikler.

Şekil 2.2 de $x_0 > 0$, $x_0 = 0$ ve $x_0 < 0$ için $x - t/2 = x_0$ karakteristikleri görülmektedir. $x_0 < 0$ için belirtilen karakteristik doğrular, başlangıç doğrusu olarak tanımlanan $(0, \infty)$ doğrusunu kesmemektedir. Bu durumda $x < t/2$ özelliğini sağlayan herhangi (x, t) noktası için $u(x, t)$ çözümü belirlenememektedir. Ancak $x - t/2 = x_0, x_0 < 0$ karakteristiklerinin başlangıç doğrusu olan $x = 0$ doğrusunun da sisteme dahil edilmesi durumunda her (x, t) noktası için çözümü belirleyebiliriz. Buarada dikkat edilmesi gereken iki nokta söz konusudur:$x - t$ düzlemindeki herhangi bir (x, t) noktası için ya $x \geq t/2$ veya $x < t/2$ dir.

- $x \geq t/2$ olması durumunda (x, t) noktasının üzerinde olduğu $x - t/2 = x_0$ karakteristiği x eksenini $x_0 > 0$ noktasında kesmektedir. Bu durumda $u(x, t) = f(x_0) = f(x - t/2)$ elde ederiz.

- $x < t/2$ olması durumunda (x, t) noktasının üzerinde olduğu $x - t/2 = x_0$ karakteristiği, $x = 0$ doğrusunu $(0, t - x/2)$ noktasında kesmektedir. Gerçektende karaktersitiğin $x = 0$ doğrusunu kesim noktası $(0, t_0)$ ise karakteristik denkleminden

$$-t_0/2 = x_0 \Longrightarrow t_0 = -2x_0 = -2(x - t/2) = t - 2x$$

elde ederiz. Bu durumda

$$u(x,t) = u(0,t_0) = u(0,t-2x) = g(t-2x)$$

elde ederiz. O halde problemin çözümünü

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \begin{cases} f(x-t/2) & x \geq t/2 \\ g(t-2x) & x < t/2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-t/2 & x \geq t/2 \\ g(t-2x) & x < t/2 \end{cases} \end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

ÖRNEK 2.24.

$$\begin{aligned} u_t + 2u_x &= 0, 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= e^{-x}, x \geq 0 \\ u(0,t) &= \cos(t), t > 0 \end{aligned}$$

probleminin çözümünü belirleyiniz.

Çözüm.

Yukarıdaki örnekteki yöntemimizi takip ederek

$$u(x,t) = \begin{cases} e^{-(x-2t)} & x \geq 2t \\ \cos(t-x/2) & x < 2t \end{cases}$$

elde ederiz.

Genelleştirecek olursak,

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0, 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), x \geq 0 \\ u(0,t) &= g(t), t > 0 \end{aligned}$$

probleminin çözümünü

$$u(x,t) = \begin{cases} f(x-ct) & x \geq ct \\ g(t-x/c) & x < ct \end{cases}$$

olarak elde ederiz.

Özetle bu bölümde

- kısmi diferensiyel denklemlere ilişkin basamak, boyut, lineerlik, homojenlik gibi denklem tanımlayıcı kavramları,
- bayağı diferensiyel denklemlerden kısmi diferensiyel denklemlere geçişi zorunlu kılan modelleme problemlerini,
- bayağı diferensiyel denklem çözüm yöntemi yardımıyla bazı kısmi diferensiyel denklemlerin nasıl çözüldüğünü,
- sabit ve değişken katsayılı birinci basamaktan lineer denklemlerin karakteristikler yöntemiyle nasıl çözüldüğünü,
- birinci basamaktan denklemler için Cauchy problemine ait çözümün varlık ve tekliğini uygulamalarla birlikte inceledik. Ayrıca
- yarı-sonsuz bölge üzerinde tanımlanan Cauchy problemlerin çözümülerinin nasıl elde edildiğini inceledik.

Alıştırmalar 2.1.

1. *Aşağıda verilen sabit katsayılı denklemlerin genel çözümlerini belirleyiniz ve karakteristikler ailesinin grafiğini çiziniz*

   (a) $u_t + 2u_x = 0$

   (b) $u_t + 2u_x = x$

   (c) $u_t + 2u_x = x + t$

   (d) $u_t + 2u_x = \sin(x)$

   (e) $u_t + 2u_x = -u + t$

   (f) $u_t + 2u_x = -u + e^{-(x-2t)}$

   (g) $u_t + \frac{1}{x}u_x = 0$

2. *Aşağıda verilen değişken katsayılı denklemlerin genel çözümlerini belirleyiniz ve karakteristikler ailesinin grafiğini çiziniz*

(a) $u_t + \frac{1}{x} u_x = 0$

(b) $u_t + (xu)_x = u$

(c) $u_t + t\,\mathrm{u}_x = -u + 1$

(d) $u_t + xt\,\mathrm{u}_x = -u + t$

(e) $u_t + t\,\mathrm{u}_x = -2u + 3x$

3. *Soru 1(a) da verilen denklemin aşağıda verilen her bir yan şart ile tek bir çözümünün mevcut olup olmadığını araştırınız. Mevcutsa çözümü belirleyiniz. Çözümün mevcut olmadığı veya birden fazla olduğu durumları inceleyiniz.*

   (a) $u(x,0) = e^{-|x|}$

   (b) $u(x,2x) = 1$

   (c) $u(x,2x) = x$

4. *Soru 2(a) de verilen denklemin aşağıda verilen her bir yan şart ile tek bir çözümünün mevcut olup olmadığını araştırınız. Mevcutsa çözümü belirleyiniz. Çözümün mevcut olmadığı veya birden fazla olduğu durumları inceleyiniz.*

   (a) $u(x,0) = x^2$

   (b) $u(x,x^2/2) = 1$

   (c) $u(x,x^2/2) = x$

5. *Parçalı fonksiyonlarla verilen aşağıdaki başlangıç-değer problemlerinin türevlerde sonlu sayıda noktada süreksizliğe izin veren genelleştirilmiş çözümlerini belirleyiniz ve $t = 0, 1, 2$ değerleri için grafiklerini aynı eksende çizdiriniz.*

   (a)
$$u_t + u_x = -u, u(x,0) = \begin{cases} 1 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{diğer } x \textit{ değerleri} \end{cases}$$

   (b)
$$u_t + 2u_x = 0, u(x,0) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{diğer } x \textit{ değerleri} \end{cases}$$

(c)

$$u_t + tu_x = 0, u(x,0) = \begin{cases} 1-|x| & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{diğer } x \textit{ değerleri} \end{cases}$$

(d)

$$u_t + 2u_x = -u, u(x,0) = \begin{cases} \cos(x) & -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 0 & \textit{diğer } x \textit{ değerleri} \end{cases}$$

(e)

$$u_t + xu_x = -u, u(x,0) = \begin{cases} 1 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{diğer } x \textit{ değerleri} \end{cases}$$

6. *Trafik yoğunluk modeli olarak bilinen[1]*

$$u_t + \mathrm{u}u_x = 0$$

quazi-lineer denkleminin genel çözümünü belirleyerek, aşağıda verilen başlangıç değerlerini sağlayan çözümlerini araştırınız

(a) $u(x,0) = x$

(b) $u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$

(c) $u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

(d) (c) de hangi t *anına kadar çözüm için tek değerli bir fonksiyon elde edebilirsiniz?*

7. *Yarı-sonsuz bölgede tanımlanan aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümlerini belirleyiniz.*

(a) $u_t + 2u_x = 0, 0 < x < \infty,$

$$u(x,0) = x, x \ge 0, u(0,t) = \sin(t), t > 0$$

(b) $u_t + tu_x = 0, 0 < x < \infty,$

$$u(x,0) = x^2, x \ge 0, u(0,t) = t, t > 0$$

(c) $u_t + xu_x = 0, 0 < x < \infty$,

$$u(x,0) = 1, x \geq 0, u(0,t) = \cos(t), t > 0$$

(d) $u_t + 2u_x = -u, 0 < x < \infty$,

$$u(x,0) = x+1, x \geq 0, u(0,t) = 1 + \sin(t), t > 0$$

8. *Aşağıda verilen ifadelerden doğru olanını belirleyiniz.*

   (a) $u_x + 2u_y = 0$ *denklemi* $y - x =$ *sabit karakteristikleri üzerinde* $\frac{du}{dx} = 0$ *denklemine dönüşür ve integral ile* $u = f(y-x)$ *genel çözümünü elde ederiz.*

   (b) $u_x + 2u_y = 0$ *denklemi* $2y - x =$ *sabit karakteristikleri üzerinde* $\frac{du}{dx} = 0$ *denklemine dönüşür ve integral ile* $u = f(y-2x)$ *genel çözümünü elde ederiz.*

   (c) $u_x + 2u_y = 0$ *denklemi* $y - 2x =$ *sabit karakteristikleri üzerinde* $\frac{du}{dy} = 0$ *denklemine dönüşür ve integral ile* $u = f(y-2x)$ *genel çözümünü elde ederiz.*

   (d) $u_x + 2u_y = 0$ *denklemi* $y - 2x =$ *sabit karakteristikleri üzerinde* $\frac{du}{dx} = 0$ *denklemine dönüşür ve integral ile* $u = f(y-2x)$ *genel çözümünü elde ederiz.*

9. *Aşağıda verilen ifadeleri inceleyelim:*

   I- $u_x = 0, u(0,y) = y$ *başlangıç değer problemi tek bir çözüme sahiptir.*

   II- $u_x = 0, u(x,0) = 1$ *başlangıç değer problemi tek bir çözüme sahiptir.*

   III- $u_x = 0, u(x,0) = x$ *başlangıç değer problemi tek bir çözüme sahiptir.*

   IV- $u_x = 0, u(x,0) = 2$ *başlangıç değer problemini sonsuz sayıda çözüme sahiptir ve bir çözümü* $u(x,y) = y + 2$ *dir. Buna göre aşağıda verilen seçeneklerden doğru olanını belirleyiniz.*

   (a) *I yanlış; II,III,IV doğrudur.*

   (b) *I,IV yanlış; II,III doğrudur.*

   (c) *I,IV doğru; II,III yanlıştır.*

(d) *hepsi yanlıştır.*

10.

$$u_t + 2xu_x = -u$$

denklemi ile ilişkili olarak aşağıdakilerin hangisi yanlıştır?

(a) *denklemin karakteristikler ailesi*

$$xe^{-2t} = c$$

eğri aileleridir.

(b) *Karakteristikler üzerinde verilen kısmi diferensiyel denklem*

$$\frac{du}{dt} = 2u$$

bayağı diferensiyel denklemine dönüşür.(doğru)

(c) *Keyfi f için*

$$u = e^{-t}f(xe^{-2t})$$

verilen problemin genel çözümüdür.

(d) $u(x,0) = sin(x)$ *başlangıç değerini sağlayan çözüm*

$$u = e^{-t}\sin(xe^{-2t})$$

olarak elde edilir.

11. $u_t + 3u_x = 2$ *denkleminin karakteristikler ailesi* (x,t) *düzleminde*

(a) 3 *eğimli doğrulardır*

(b) $\frac{1}{3}$ *eğimli doğrulardır*

(c) $x = 3$ *doğrularıdır*

(d) $y = 3$ *doğrularıdır*

12. $u_t + 3u_x = 0$ *denkleminin*

$$u(x,0) = \begin{cases} 1-x, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{diğer } x \text{ ler} \end{cases}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümü için aşağıda verilen seçeneklerden doğru olanını belirleyiniz.

(a) $u(1,1)=0, u(1,\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$
(b) $u(1,1)=0, u(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$
(c) $u(1,1)=\frac{1}{2}, u(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$
(d) $u(1,1)=1, u(1,\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$

Kaynaklar

[1] Duchateau, P., Zachmann D, Applied Partial Differential Equations, Dover Pub., New York, 1989.

[2] Coleman, P. Matthew, An introduction to Partial Differential Equations with MATLAB, Chapman& Hall/CRC, 2004.